
48 | 168

EVCLIDIS

MEGARENSIS MATHEMATICI CLARISSIMI ELEMENTA GEOMETRICA, LIBRIS XV. AD GERMANAM GEOMETRIAE INTELligentiam è diuersis lapsibus temporis iniuria contractis restituta, adimpletis præter maiorum spem, quæ hactenus deerant, solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus.

His accessit decimus sextus liber, de solidorum regularium sibi inuicem inscriptorum collationibus, tum etiam cœptum opusculum de Compositis regularibus solidis planè peragendum.

AVTHORE

Francisco Flussate Candalla.

AD

Carolum IX. Christianissimum Gallarum Regem.





PARISIIS,

Apud Iohannem Royerium typographum Regium.

Ex iussu & priuilegio Regis.

1566.



Christianissimo Galliarum Regi, Carolo IX.

FRANCISCVS FLVSSAS CANDALLA ROBVR, IMPERIVM, ET PROSPERITATEM.

LIBERAS artes liberos decere viros, commune rationis efflagitat elogium Generosissime Rex, Nihil inclyto principe liberius, cuius numine natura prius astricti, liberi fiunt homines. Quod rarius prudentiæ ac integritatis specimen, quàm veri studia quæque libertate præcellentis consequendi cupiditas? veritas nimirum eatenus libera dicitur, quòd ab antiquissimis absolutissima virtus, summúmque bonum comperta sit: quod nec à materia turbatur, neque corpore obruitur, nudum, conspicuum, immutabile, augustum, ac alterationis expers. Ea de causa circa materies siue ea quæ sensu deprehendi possunt, corruptioni alterationíque obnoxia, omnísque constantia priuata, minimè inuestigandam veritatem esse suademus: sed circa incorporea solius mentis obiecta, nulli calumniæ vel astutiæ subdita: veritas nanque contra hominum ingenia, calliditatem, & solertiam, se per seipsam tuetur, stabili compta libertate Hęc admodum artes disciplinásque fouet liberas, indita eis religione, qua generalibus institutis nihil limitandum, reprimendum, immutandúmue cedat. Est enim radius primæ ac veræ solius essentiæ, cuius instar hęc ab humili & tenui primordio, præcipuos mentis ornatus seu humanæ conditionis fulgores, in tam immensas disciplinarum euexit copias. Quid mirabilius & pręstantius quàm quod exili puncti rudimento, tam ardua & humanis quibúsque ingeniorum viribus abstrusa, exeramus Geometrię arcana? Quid tanto sublimius incremento, quàm à signo omnis quantitatis experte tam immensa numerosáque manare quantitatum theoremata, vnico veritatis splendore nixa? Quid ars? quid disciplina? quàm veritatis fidus assecla? Non cuiuis etenim peritię congruit generalia præscripta vndique veritatem adipisci, nullis verò cogi restrictionibus: sed iis solis, quas ideo disciplinas, quòd discentes vniuersali præscripta lege nulla prorsus incidente renocandi dogmatis labe doceant, propriè antiqui Philosophiæ cultores nuncuparunt, tum etiam quod profitentium mentes regulari mathesium cultui frequenter adnixas, infrequentiorem sui commensurandi habitum ac intelligentiam, suapte natura prouehant Nimirum eorum qui disciplinas perinde scrutantur, vt earum virtutibus & dogmatum dignitate fruituri. Non autem qui primordiis vtcunque perceptis, in plebeios ita seuiunt, vt sola prę fulgendi causa illas perlustrasse satis superque propalent. Quorum itaque animi cupido eo splendore fuit ornata, quo genuinos disciplinarum assecla-

tus (quos Plato à natura humanę menti collatos opinatur) reminisci, seu intelligentię sępius conferre studuerint: hi Mathesiũ simplicitatem à quouis fuco vacuam, non solum candoris animi testem, verum & eius intelligentię esse auctricem, qua Philosophię legibus quęque regenda subeunt, suo commodo captant, Platonis decretum sequuturi: qui philosophis erudiendis suo lumini pręscripserat, nullum sine Geometria ingressurum, his vocibus vetans, generosa philosophię documenta à quoquam geometriæ expertè scrutanda esse: pręcipuos mentis apices philosophię adipiscendę, à Geometriæ primordijs oriundos annuens: non ab his quę agris tantùm metiendis, lineis planisue ducendis, aut equidem ędificiis construendis, cęterisque sensuum pręstigiis duntaxat nituntur: verum ab hac naturę pręstantia (quę ab exilibus admodum geometrię initiis, in tam immensum mentis ornatum prodiit) quod sępius consideratis terminorum rationibus, sępius item rationum proportionali illa societate (à qua mirę emergunt quantitatum conferentię, singulari certitudine docendi huic disciplinę admodum peculiari) ordine discendorum pręter humanas vires longè dispensato, mens humana inde habitũ consequuta sit, à frequentioribus institutis adeptũ. Qui quidẽ habitus, vetitate, ratione, symmetria, ordine, reliquisque geometrię subtilissimis viribus mentẽ illustrans, eã philosophię capessendę, cõdẽdæ legi quibuslibet nodis soluendis frugiferę, cuiuis discibili assequẽdo præmunit. Quòd si huius habitus ad sensuum exequia traducendi sint fœtus (sensus nanque homini veluti nuntios ac satellites concessit natura, seruili operæ obnoxios, tum proprio muneri incumbentes) hæc Imperio administrando, populis regendis, bellis indicendis, prælis committendis, machinis construendis, aggeribus ducendis, ac sensim geometrico reliquo ornatu infectos sensus innouat. Vitia demum (quæ ab antiquissimis irrationales materię vltores dicta sunt) omni otio destituta, propria vi retundit, ac mirum in modum mentem humanam laxamentis obnoxiam & sordescentem excitat, geometricarũmque virtutum studio in mentem politica ac philosophica prudentia decoratam, passim deuehit & excitat. Haud secus quàm verę & piæ religionis suscepta fides stabilis, animam suaptè natura itæ seu exitio deuinctam, in æternum salutis æuum diuina clementia latam regenerat. Quæ singula sui generis nouum hominem edere dicuntur. Nec est quod disciplinarum ac philosophiæ principia à religionis consortio explodamus. Solebant nanque veteres Ægyptij à philosophorum cœtu, sacerdotes ad religionem elicere, à sacerdotum verò societate, Regem, Persæ autem ne vllum quenquam in Regem admitti patiebantur, qui non ante disciplinam scientiámque magorum percepisset. Nec omittendum quàm profuerit propagandæ catholicæ fidei tantis patribus, pręclara disciplinarum ac philosophiæ prudentia. Summus nanque artifex tam egregios animi ornatus, suo obsequio futiles esse non pertulit. Non parum igitur disciplinarum ac philosophię documenta conferre obsequij (Christianissime Rex) senties, in disponenda mentis sagacitate, ad ea quę regię sublimitati congruunt, religionísque capessendæ primordia. Ea nanque his quæ sensibus obaudiunt, longè præstantiora docentur. Nam vt à maioribus traditum est, quęcunque

sensus

sensus mouent, idola sunt, & vanę quędam adumbrationes. Quę verò sensuum organa subterfugiunt, ad pulchrum bonúmque pertinent, cuius beneficentia iustitię piis adiunctę sunt, mentem cui tota patet hominis natura decorantes. Vt igitur generosę menti (Inclyte Princeps) libero veritatis studio nitenti, artes ac disciplinas certo & vero quibusuis aliis prestantes, omníque pigmento vacuas, adhibeam, Matheses haud equidem discendas quinimò (ex Platonis sententia) reminiscendas contemplare quęso: oriuntur enim earum tyrocinia, ab intimis humanæ intelligentię anfractibus, qua à primo mentis habitu condito delitescunt. Mathesim igitur præstantissima geometrię elementa ab Euclide per maiorum manus recepta, interdum tempore propulsante manca siue fœdata, pro viribus fideliore cura restituta, & pręter antecessorum spem integrata, solidorum cœpta peracta, principia quibus totius disciplinę status nititur, in veram theorematum intelligentiam redacta, tuę maiestati defero, munus inquã exiguũ, tua tamen generositas id perenis bonoris mihi indulgeat, gratũ habẽs: videbor nanque mihi non modicis viribus operã adolescere, ac plus geometrica incunabula auribus mortalium infudisse, si tãtùm abs tua sublimitate decus attingam, suscepti laboris. Candor etenim tuæ virtutis, nec minus expectata à teneris annis indoles, nedum studiosos dicam, sed etiam hos quorum debiles conatus tenuit geometricę subtilitatis acumen, in huius disciplinę amorem suscepto munere ciebit. In hoc autem operis tuę celsitudini consecrandi votum me rapuit (candide Princeps) non imperitæ argutię, non balbutientia scripta, non harum inuentionum obtusi conatus, tanti principis dignitate alieni. Sed tuę sublimitatis imperium ter geminis vocibus obtestãs (dum Aquitaniam transcurreret qua tantùm tui visendi mihi beneficium contigit) hos nimitum labores vtcúque perlustratos exponi, tuęq; celsitudini dicari seu consecrati. Obedientiam autem sacrificio pręstantiorem, obsequiúmque votis edoctus, vtq; muneris indicti tantum ne recusem decus. Quinetiam his pręteremissis quę præpollent, immensus in te virtutum cumulus, necnon tua in me ineffabili beneficentia, vultus beneuolus, longè vltra bene merita erga te obsequia gratus apparens. Quo non solum Scythas aut barbaros, sed etiam quantúmuis feras gentes tuo numini subigeres. Hoc munus tuę amplitudini in obsequij monimentum & pignus amoris offero, & veluti censum quo tuo candori me deuinctum profitear, rependo. Quod licet tanta maiestate sit indecens, tua clementia susceptum, dignitatis in se vires conceptutum non dubito. Tuíque culminis vmbram in hæc restituta perlustranda, disciplinarum cultores pellicere quosque. Quòd faxit Deus optimus maximus, tuæ maiestati perpetuam felicitatem pręstolanti, vitam, imperium, ac vires sua ineffabili clementia cumulans. E Cadilliaco ad decimumnonum Calen. Septembreis, Anno reparatæ salutis 1565.

CAROLO NONO GALLORVM REGI INVICTISSIMO SEMPERQVE AVGVSTO, GVLIELmi Calumontani in supremo Parisien. Senatu patroni, Carmen.

EVCLIDES nouus hic, quàm sit mutatus ab illo,
Vulgus quem nuper credidit esse, vides?
Crimen erat magnum te (crede) mathemata, Princeps,
Cernere, tam longa semisepulta die.
Franciscus Flussas cladem miseratus acerbam,
Ocyus è tenebris hæc rediuiua trahit.
Ecce tuo iussu (vt par est) obtemperat: atque
In mundum redigit: mandat & illa typis.
Pellere barbariem regno, reuocare Matheses:
Gloria deuicti non minor hostis erit.
Denique quòd sit adhuc viuus tua maxima laus est,
Euclides stygiis huc reuocatus aquis.
Nanque tibi acceptum referent hoc CARLE nepotes:
Autoris tua vel gloria maior erit.

AD AMPLISSIMVM ILLVSTRISSImúmque principem D. Franciscum Flussatem Candallam, Steph. Manialdus Cleracius.

FRANCISCE, antiquo veniens de sanguine Regum,
Qui superas, morum nobilitate genus.
Dum repeto titulos & auita tropæa tuorum,
Dum recolo vestræ regia sceptra domus,
Dum quoque suspicio diuinæ mentis honores,
Et cultum variis artibus ingenium,
Nescio, nobilitas an maior splendeat in te,
Maius an ingenium: miror vtrumque tamen.
Hoc magis admiror, tetra ambitione remota,
Publica priuatis quod bona prætuleris.
Intentis studiis veterum monumenta renasci
Efficis, exempta sed prius illuuie.
Iam per te Euclidis lucent σοφὰ, vigéntque
Clarum déque tuo lumine, lumen habent.
Regale est factum, regalia scripta nitori
Reddere, verum hoc est nobilitatis opus.
Has artes quondam Reges tractare solebant,
Has quoque principibus discere cura fuit.
Artibus his Reges magna incrementa dedêre,
Proh pudor, has artes nunc didicisse pudet.

Tu FRANCISCE, tuis faueant si numina cœptis,
Restitues studia hæc, quæ iacuere diu.
Et proceres nostros simili inflammabis amore,
Quàm te fœlici Gallia sorte tulit!
Iam numeros abaco, & cōque in puluere metas
Te duce, describit Gallica nobilitas.
Aspice, perpetuæ surgunt præconia famæ,
Ingenio partum est iam sine morte decus.

Ad eundem.

Te domus imperio & sceptris Candallea sacra,
Nobilium primis inserit ordinibus.
Te decus ingenij, mentisque industria solers,
Doctorum primis inserit ordinibus.
Quid mirum, princeps literis, atauisque colende,
Si doctum & verè nobile promis opus?

Φραγκίσκῳ τῷ Φλυξίῳ Κανδαλλέῳ
Ἀντίστροφον.

Εὐγενέαν φάος ὤν, εὐκλείδου κατ' μάθει ἔργα
Φλύξιος, εὐκλείδου ὡς φίλος εὐγενέης.

Τῷ αὐτῷ.

Εὐκλείδῃ ζωὴν καὶ φῶς πολυκαλλὲς ὀπάζεις,
Εὐκλείδης δώσει σοι κλέος ἀθάνατον.

I. BODINI AD FRANCISCUM
Flussatem Candallam.

Si gentile decus, si regum splendor auorum,
Priscáque nobilitas venerandæ stemmata gentis,
Nobilitate tua vix vlla est clarior vsquam.
At minima est laudum de multis ista tuarum:
Nam tua te virtus, & veræ laudis auara
Mens, atque eximius, doctißime Candala, candor,
Et quos afflauit sapiens tibi Pallas honores,
Illustrant multò melius quàm vestra propago.
Quàm proaui claro Creti de sanguine Reges,
Aurea quàm tectis laquearia iuncta superbis.

IN EVCLIDEM FRANCISCI FLVSSATIS
Candallæ viri nobiliß. Io. Auratus.

Æternas mortalis adhuc si quis volet arces
Scandere, & æthereos dinumerare globos.
Spernere si quis humum fugiente per aëra penna,
Metrique modis sydera quæque suis,

á iiij

Siquis ad astra volet raptus, cælestibus aures
Contemplatrices inseruisse choris.
Euclideorum legat hæc elementa librorum,
Nam tres ad reliquas ars facit vna gradum.
Ille sed implicitis vt certus in labyrinthis
Poßit inoffensas ire, redire vias.
Franciscus Candalla dabit, sinuosa viarum
Interpres cuius reddit aperta labor.
Nobilitas aliis latas sit quærere terras,
Et fundos fundis continuare nouis.
Tu cælum stellásque petens, tantò facis illis
Nobilius, quantò nobiliora petis.

AD FRANCISCVM CANDALLAM EX ILlustrißima Flussatum familia oriundum, de Euclide eius opera restituto, & libro de Stereometria locupletato, Carmen.

Si quid nobilitas & forti in pectore virtus,
Candale, sinceræ laudis habere potest,
Hæc propria est, qua tu memoraris origine, gentis
Isq; tibi à patrum stemmate manat honos.
Annam quis nescit quæ rexit Pannonis arua,
Francisci esse amitam, Cæsaris esse auiam?
Quis consobrinas patris, de sanguine Fuxi
Tres alias nescit prosiluisse deas?
Hinc qui nunc annis & sceptri exurgit honore
Carolus & magni Principis omen habet:
Est Annæ pronepos, dotali hæc iure Britannos
Imperio adiunxit rex Ludouice tuo.
Proxima Regina Arragonum quæ Regia neptis
Et magni fertur Gastonis esse soror.
Gastonis illius qui dum victricia signa
Hispano atque Italo victor ab hoste refert,
Rauenna est testis, quàm forte & nobile letum
Oppetiit, patriæ victus amore suæ.
Tertia Nauarræ est, quæ Fuxæ insignia gentis
Perpetua natis lege tenere dedit.
Sic nemo illustris regni mollitur habenas,
Quin tibi cognato sanguine iunctus erit.
Sunt equidem præclara isthæc, & Principe digna,
Qualia quæ paßim dicere magna solent.
Nec tamen hæc quanuis sint in te Regia, apud te
Pondera præcipuæ nobilitatis habent.
Sed quæ nunc tali tantum se iactat alumno
Virtutis, semper laus tibi prima fuit.

Te

Te musæ decorant: itidem decus addere musis
Ingenij certant tot monumenta tui.
En quondam Euclides terrámque & sydera mensus,
Quà vel summa petunt, quà vel ad ima cadunt.
Temporis attritus carie, & caligine mersus,
Difficili rerum cognitione fuit.
Sed nunc quàm facilis, quàm clarus & integer exit
Te duce, & irradiat vindicis ora sui.
Quin & dum solidi mensuram corporis addis,
Crede tibi solidum te peperisse decus.
Nam perit argentum, perit auri copia diues,
Et quicquid rerum maximus orbis habet.
Nobilitas vera est virtus, virtute paratur
Gloria, quæ nullo est interitura die.

Eiusdem ad eundem.

Nobilis is vulgò est ad quem labentibus annis
De claro patrum stemmate manat honos.
At cui virtutis laus pulchro è pectore surgit
A doctis dici nobilis ille solet.
Vtraque laus, Francisce, tua est, tu nobilis ergo
Aut se iudicio fallit vterque suo.

P. Adamsonus Scotus.

DE FRANCISCI FLVSSATIS CANDALLÆ in Euclidem commentariis, Arnoldi Puiolij in academia Burdegalensi I. V. D. Carmen.

Dum maria, & terras radio metitur, & astra
Euclides campis lætus in Elysiis.
Quocum Chrysippus, quocum Plato, Pytagorásque
Quicum (lazomenus ludit Anaxagoras.
Ludit & Ypsicles, Archita, Theónque, Conónque,
Archesilas, Zeno, Pappus, Anaximenes.
Necnon qui paruo circundedit æthera vitro.
Fecit & humana sydera mente regi.
Fecit & vt patriæ defensor callidus vrbis,
Incuteret magnas hostibus arte minas:
Ecce sciens terra & cœlo quæcunque geruntur,
Et quæcunque mari nuntia fama venit:
Et volitans quot habet plumas, tot lumina pandit
Oráque, & Euclidi talia voce refert.

Ecquid opus fuerat mandare mathemata libris,
Composuit mira quos tuus arte labor?
Quid decuit tantùm noctu vigilare diùque,
Iacturámque olei sustinuisse grauem?
Quando tui libri mendis interpretis horrent,
Vt nunc si videas diffiteare tuos.
Quæ cùm dixisset, gemuit Megareius heros,
Signáque tristitiæ non dubitanda dedit.
Atque Iouem subitò supplex adit, & rogat, aura
Vt liceat paucis anteriore frui,
Donec librorum errorem purgauerit omnem,
Quò tersi possint, & sine labe legi.
Excipit Altitonans: factis extendere famam
Haud dubiè vita concomitante licet.
Morte obita sedenim rediuiuum exurgere in auras
Mortalem fati iura seuera negant.
Vnum posse sinunt fieri, vt cum corpore vita
Exiit, in corpus sit reditura nouum.
Sic Rudius vates animam suscepit Homeri,
Sic animam Euforbus induit Athalidæ.
Quique prius pisces captabat arundine Pirrhus,
Pythagoræ in corpus transiit ille nouum.
Vnde dare vt possis mœstis solatia rebus,
Ne sis qui fueras, forma nouanda tibi est.
En ego Flussatum formabo ex semine corpus,
In quod Mercurio te decet ire duce.
Et te Franciscum dicet quicunque videbit,
Tu tamen & tali nomine notus eris.
Hæc vbi dicta, Iouis iussu Cyllenius vmbram
Susceptam Euclidis, summa per astra gerit:
Francíscique illam Flussatis corpore claudit,
In tali lætam sede manere diu.
Inde sua Euclides quotquot conscripserat, omni
Erroris vitio liberat arte libros.
Et vitio tersos offert Franciscus, eosdem
Quisque suo tersos à genitore putet.

QVA

Qua de causa, quóque numinis afflatu hæc restituta sint elementa, modesto lectori Fr. Fluss. Candalla, Salutem.

HVMANÆ conditioni olim à summo maximo actionum & motuum auctore constructæ, quãto cætera creata egregiis præcellebat muneribus, tanto receptæ dignitati tuendæ toto pectore incũbendum erat, omniq; studio cuncta huic aliena propulsandum, quo ritè susceptis eius dignitatis subsidiis, expeditior fieret actionum & motuum conformis opificis numini operatio: excluderetur autem humani consilij truculenta labes, qua singulæ eius vnitates, assidua mora admotis impensè vinculis à bonarum actionum cœptis reuocantur, & quæ sensibus tanquam corpora vel materies attrectantur, siue quæ intelligentiæ ratiocinanti summi opificis imagini, velut eius essentiæ communicant. Hanc ignorantiam, & religionis antistites & philosophorum proceres, omnésque disciplinarum ac sapientiæ cultores pari consensu denominarunt. Cuius essentia (si qua foret) inter ea quæ more eorum quę mala sunt, priuationi demersa iacet, ab omni habitu, à quo veræ essentiæ splendorem consequuntur, prorsus eiecta; at virtutum tamen illud vnicum culmen intelligentiam funditus euertere, ab humano consortio delere, ac innumeris artibus abigere molitur, quibus ab æterno priuatio habitum opprimere tentat. Est namque virtus, animi habitus naturæ moderationi consentaneus. Cognitio autem, æternæ intelligentiæ radius, quæ sua dispensat studia instar seminis opportunè in terram dispositã sparsi, incrementum à proximis inchoat, tandem pullulante ac adolescente stipite, in gemmas turgescit, ac demum in frondes vicinia possidentes propagatur, quoad finem à constitutione sibi inditum fœlix assequatur. Hanc sumpsius agnitionem, admodum veteres prudentissimi cõmendarunt, qua patefieret aditus, scrutandi rerum susceptarum auctorem. Quippe optimus ille maximus, quémq; per sumpsius notionẽ quoad singulorum pertulerit capacitas, suæ cognitionis depulsa ignorantia consortem efficiat, in his gradus siue differentias obseruans, quibus quò quilibet ignorantię potissimam partem à se pepulerit, tanto se cognitioni seu intelligentię diuinæ demersum competiet. Nam vt à maioribus receptum est, ignorantia malorum origo, incuria & ignauia gignitur, negligentia verò alitur & increscit, dilectaq; sensibus hominũ radicatur, inde tanquam ab antiquis & hæreditariis sedibus molestè reuocatur, tum maximè cum læso cuidam cerebro prætensa scientia, patentem ignorantiam insinuat, falsis deinceps innumeris syllogismis ibidem tutandam. Veræ itaque cognitionis lumen adeũtes, per varios quosque errorum incursus, ignorantię caliginem propulsare, imploratis quæ defuerint viribus operę est precium. Qui ideo amorem clementissimi illius patris, munera summi maximi liberalissimiq; monarchæ, disciplinam prudentissimi æterneq; intelligentiæ fontis, mihi cõciliare cupiebam, propellendam à me potissimùm curaui, virtutũ ac studio infensam ignorantiam, vt quę si tamen non radicitus euulsa, saltem pro viribus concussa, quidquam (tenuè quãuis) donorum illius ineffabilis essentiæ contingerem, per quę meatus afforet æternę ac immensæ bonorum plenitudinis considerãdæ. Nam propriæ imbecillitatis animaduersio, pręcordia in cupidinem intelligendæ æternæ virtutis extollit, eadem causa qua contraria contrariis curari deposcunt, cupiditas autem seu intelligendi studium, propensam animi voluntatem ac laborem vrget, labor postmodum etiam mediocris quędam attingit, improbus demũ, ab antiquis omnia subigere docetur. Hæc singula mente voluenti, subiit inter moras discernendum, ac discutiendum quibus studiis à summo omnium moderatore susceptam mentem suscepturumq; quondã ingenij incremẽtum subiicerem, cui serio animi impetu incumbens, nullum nõ moui lapidem, tum scibilium, artium singularum, professionum, disciplinarumq; scopos, vtrumque conlectos mihi proposui, è quibus quæ virtuti & veritati coniunctissima fore cernerem, diuinis auspiciis delecta prosequerer, sese ab improuiso mihi offert Iuris illa prudentia, cuius effectu (mortaliũ contagiis vitiato) iura quandoq; iniurias mutuò sibi mortales ingerunt, hanc pro foribus aspectans argumentum seu materiam à nequitia ac humanorum scelerum contagione ducentem bipartitam reperi: in eam scilicet, cuius decreta à viris probatis constituta sunt, qui à quouis tranquilli animi perturbatore liberi, remq; suam nõ agentes, illã cuius verè rationem animam esse fatemur iurisprudentiam ædificarunt. Alteram autem comperimus, cuius sanctiones à viris res suas agentibus editæ sunt, & proinde his obnoxiis passionibus, quibus plurimum solent indui, qui proprii facti censores aut iudices sese cõprobant (mortalium nãque vt plurimũ quis-

que sibi proximus adest) Hanc non rarò extra boni veriq; consortia degere, nempe cùm ad actum reuocandam potentiam, vtræque confunduntur, tum iis iniuriæ conglobantes, procliuius perturbatos suarum potentiarum effectus generant, æquumq; sæpius personatum, quasi iustum venerandum compellunt. Medicinam verò scrutans, huius originis potissimã causam, ab effrenatis cupidinibus humana corpora inscitia alterantibus, scatere concepi, quare humanæ conditioni his admodum propẽsæ necessariam fateor. Hãc artem vocari cohiber, eam præsertim quæ corpus curat, doctissimus ille Plato, quoniam, inquit, nullam eorum quæ affert, qualia sint natura habet rationem, eamq; coquinariam nuncupat, à gymnastica disterminans: attamen illam non exigua obseruantia, sed sua ductus necessitate amplissimo cultu dignã haberi reor. Rhetoricam autem non esse artem opinatus est Plato, quinimo peritiam quandam, cuius caput ac studium est adulatio, & ideo quidam natura turpe existimat: binorum nãq; rhetorum ad se inuicem causas agentium, alter vt plurimum rem turpem suadere aut vterq; conatur. Dialecticam differendi facultatem eò quòd omnium sciẽtiarum sit vnica via summopere commendat, quæ cuiuslibet oblati verum scrutari docet, eam itaque cuius sciẽtiæ necessario conducere fatebimur. Grammaticam demum satis indicat eius vnica authoritas (vsus) ratione, methodo, ordine, omniq; verarum disciplinarũ energia destitutus. Is nanque vsus docendorum turbida & concitata quouis ordine postposito venatur elemẽta. Præter has perplures mihi proposui disciplinas arte libera æquè & mechanica quærendas, innumerasq; intelligibilium species.

Cum itaque omnium ac singularum naturam datis viribus perquirerem, vt demũ illas mihi deligerem, quæ animi notitiam certo veróque illustrarent, illúdque audirem (de mathematicis) Ciceronis à Pythagora, à numeris scilicet & mathematicarum initiis proficisci omnia, ac in summo apud illos honore geometriam fuisse, itaque nihil mathematicis illustrius esse, pluresque philosophorum sententias, geometriam cæterasq; matheses summopere commendãtes, nonnihil diuinitatis his inesse disciplinis arbitratus sum, ac aliquod numen præ se ferre, eis solis communicandum, qui intelligendi veri, non qui cõtentionis aut spectatus cupidi fuerint, ac perinde discentium mentes præ cæteris eousque in virtutis & veritatis rapere auiditatẽ, atque præ cæteris hæ disciplinæ certitudini & veritati sunt familiares. Quapropter non arbitratus sum has quæ confuso, instabili, incerto, aut turpi niterentur fundamẽto, erudiendæ mentis humanæ condignas, sed eas præcipuè carpendas conieci, quæ virtuti & vero hærentes, animæ intelligentiam in priorem sui ortus formam cultu perseuerante excitant. Huiusmodi potissimam haberi liquet, sacrarum literarum lecturam, qua prior ac genuinus animæ candor, diuinæ clementiæ dono perennis restituitur, & obstructus primi parentis lapsu perperuæ felicitatis aditus, cuique mortali reseratur. Hanc subsequutus ratus sum vero certóque illustratas matheses siue disciplinas, quarum intellectum natura tam mira arte genituræ animæ copulauit, vt quicquid in eis quantumuis abstrusum obiicitur animæ discendum, id idem non discere sed verius reminisci doceat esse Plato: hæ nanque disciplinæ ex principiis eidem animæ familiaribus nullo aliunde conducto famulatu, sua quæque construunt theoremata. Quæ demũ non per nouam alicuius documenti notitiam, sed ex primordiorum iam notorum sola reminiscentia, mẽti seu animæ innotescunt. Principia nimirum si per se cuius ratiocinanti animæ innotescant, cùm menti offeruntur, non ab illa ideo disci, sed sanius reminisci dicemus, tanquam prius scita. Ab iis rursus constructa theoremata priora, ac illorum progrediente obsequio progenita, sola arguendi vi (cuique ratiocinanti animæ insita) ex assumptis principiis fluunt. Ratiocinantis nanque animæ potissimus vsus est, ex præscriptis antecedentibus veris, consequentia deligere necessaria. Nõ aliud itaque à reminiscẽtia disciplinarum adeptionem esse fatebimur. Hæc inde animæ peculiaria instituta, omnis prorsus doli expertia, vero virtutéque sedulo nixa, neglectis peritiis quæ humanorũ contagiorũ innumeris anfractibus sunt pollutæ, propenso animo amplectendas duxi, vt olim candor ille ingenuus animæ, continuis huius vitæ illecebris opacatus, discendi otio reuiuiscat, ac demum fausto diuinæ clementiæ munere, disciplinarum structori vnico, fiat vnus. Hæc interdum mihi ingenio voluenti, ac apprimè contractam discendi sitim extinguere paranti, occurrunt procellæ, quibus amicorum potissimum impulsu, in principum aulas me vectũ cognominis necessitate reperi, quo loco tantũ abest quemq̃ philosophari posse, vt aulicorum tam frequentes versutiæ disciplinarum exosam simplicitatem conculcantes, potius captandi principis ingenui insidias, quàm artium principia edoceant. Huic impedimẽto successit illico negotiorum principis gerendorũ apparatus, cui iugis perpetuò nectitur sedulitas, mentem sycophantiis sollicitans. Confluunt insuper innumeri vafri, & solertes queru-

li sua

li,sua tela admouentes,quibus incautam audientis mentem suo commodo aucupent. Quandoque pij supplices,quorum suscipienda sunt patrocinia principi conferenda. Rursus subeunt ærarij, inuolucra proferentes, mille suppilandi technis obnoxia, necnon principis stipatus copia,stipis vt plurimum auida.demum secretorũ scriptores innumeris negocijs expediendis onusti,ibidẽ subit cogẽda sinagoga,rebus digerendis addicta.quę omnia tranquillam mentẽ ita discerpunt,ac varijs telis impetunt,à disciplinis non tantùm aliena,verumetiam in ipsas tanto tumultu pugnantia,vt ne qua menti supersit quies,turbato concitatóque tranquilli animi motu.His tandem strtibus me liberum aut expeditum fore,per tot rerum discrimina ratus,in deteriorem incidi sillam:quæ quidem necessaria duro litigio redimenda cogeret,illisq́; vtcunque reparandis,plus insumptum est laboris,curę,temporis,sumptus,labefactiq́; ingenij,quàm possint longè adeptæ vtilitatis vires suppeditare. Quantũ autem disciplinis assequendis deuoram mentem discrucient tam seruentiũ telorum instructæ copiæ,philosophiam auentibus discernendum refero:cùm maximè peruerso prorsus in me ab vrgentibus ordine,rerum moderatio disciplinarum præcesserit tempore notitiam:atqui disciplinæ reipublicę moderandæ præbent aditum,non autem ad disciplinas respub. Turbatus ea de causa hic ordo,planè labores occurrente Minerua impensos,cruciatus effecit. Nam ab adolescentia maturissimos ætatis annos, principum reiq́; publ.temperandis rebus nulla disciplinarum suscepta notitia dissipaui,varijs quidem obnoxius insultibus. Sed qui mihi insultus aut cruciatus fuerunt,à quãpluribus vt voluptates obuijs vlnis suscipiuntur. Ab iis nimirum qui genitali horoscopo in aulicarum illecebrarum cultus propulsi sunt: illique post habita ratione obaudientes, ambitum, satellitia, primatus, dissidia, ac huiusce animi turbandi scatebras, virtutis vice venerantur. Alij nanque procliui genio iniurijs cientur impingendis, alij verò tollerandis suapte natura astringuntur,vnde fit vt disciplinarum assequendarum innata vrgente genio cupiditas,tot variarum machinarum incursibus repulsa,non parum morę seu impedimenti subtilioribus attingendis passa sit,quæ ne annos,ne dies,sed ne dicam ferè horulas,turbulentiores tanti temporis particulas,sibi potuit asciscere: Tum præsertim quod quæque tantùm interruptissima his disciplinis assequendis studia mihi licuit adhibere,ea negato prorsus mortalium subuentu,turbata verò immortalium literarum cultura,vtcumque earum principia consequi fuit operepretium, otij cùm rara fuit egestas. Inter hæc disciplinarum cupidus,cumprimum Euclidis limina vix è foribus salutatẽ,vt quo more,quo discendi apparatu,quáue mentis imagine, in hac elementa me adigerem præsagiret animus,occurrit ingredienti hęc geometricorum elementorũ series, à Campano & Theone exposita, tum ordine, tum & numero principiorum seu penuria, quandoque eorundem luxu à se mutuo discrepantia. Quæ palam faciunt duos aut plures Euclides fuisse,aut equidem vnius Euclidis tantam fluxisse (temporis iniuria) geometricorum elementorum iacturam,quæ à se legata principia ac theoremata ad nos vsque migrare non passa sit, ea præsertim puritate quæ tantùm geometriæ culmen adeptum virũ decebat. Principia nanque inexposita extant, quandoque transposita,siue eorum aliquæ prætermissæ propriæ sumptiones,rationum ac proportionum primarij ortus, arithmetices geometriæ conferendę causa,qua discreti numeri confusa continua sunt illustraturi certarum & incertarum quantitatum particularis origo,& pleraque alia passim occurrentia, licet his tanquam stabili harum disciplinarum fundamento totius scientiæ nitatur status, qui primordiorum soliditate destitutus fluctuans, certitudinis vulgari præstantia priuatur. Quòd si quisq; sua ductus libidine principia non perspecto totius operis contextu victurum se confidat, is sæpiusculè disciplinæ methodum propugnans impinget in rudes ac obstantes (inexpositis rectè principijs) scopulos, quippe diuersas geometriæ partes, diuersis principijs indigere constat, posteriores semper prioribus demonstrantes. Nihilo secius disciplinas appetens,prioribus Arithmetices elementis vtcunque tum furtim,tum violentia raptas labentis temporis impendi particulas,quarum subsidio confusas geometriæ quantitates discretione numerorum illustratas (quoad fas esset) conciperem (Continuis nanque edocendis idem confert discretio,quod agris arentibus letamen) ac demum Euclidi collatas temporis iniuria imposturas in germanũ geometriæ sensum (ab eo vt verisimile est prius editum) restituerem,mihique his artibus instituendo, tersa Euclidis elementa pararem, quibus optatarum disciplinarum primordia capesserem. Quod pridem à me institutum tot terroribus retusum,toties intermissum,negotijs aliud vrgẽtibus, deinde repetitum,aliquando tandem & vtcunque absolutum peregi,priuatis tantùm ædibus ac necessarijs conferendum mihi proponens,cùm plus nactus essem otij. Sed longè aliud à cępto coniunctorum suppeditãt suffragia,qui sedulè instant,causam agunt,syllogisant,arguta se-

dulitate impetunt, innumeris artibus moliuntur, hóſque ſudores lucem ſubire ſibi depoſtulāt, quamuis imprudente culpa efferendos, vtilitati publicæ (vt aiunt) toto pectore ſibique conſulentes. At ego contra ſi votis obtemperans, ſcriptum prius tantùm deſtinatum parietibus, in publicum mox proferam, prolixiori nec perluſtratum ſtudio, imminet præſens periculū, quo cuique liceat ruſtici & inculti voluminis pro libidine cenſuram agere, ſiquidem (huic obuius) tam iugi cura dignam impendere velim operam, qua ſingulas huius cœpti repedā particulas. Impenſi laboris memor, præſciuſq; futuri, rem prorſus inexpectatam, & ſupra vires ſubeo negotium: en ſubeſt ſenecta, qua frequentior corporis valetudo mala, ſenſus ſubigit, luminū concutit imbecillitas, quæ huius ſudoris potiſsimum tempus præripuit, ex quo fit me tanto repedandi voluminis labore terreri. Quare ne quid in me durum offendat amicorū moleſtia, Christianiſsimi Regis aſtrictus iuſſu, id vnum poſco modeſte lector, nempe huius artis ſcripta, prolixiori cultu viſenda fuiſſe, reliquis quiſque ſcibilibus perſuaſum habe, éſtque demonſtrationū pertæſa vt plurimum argutia, cuius intelligētia non ſecus attentum quàm gnauum cultorem flagitat. Quocirca ſi quid ibi acquirat lectoris ſedulitas geometricam locupletans eruditionem hactenus non viſum, huius artium vnico ſtructori referat gratias, quòd ſi ibidem rude quidpiam aut inexcultum offenderit, hæc ſibi perpendat, duros mihi huius diſciplinæ progreſſus fuiſſe, debilem conatum obſequio deſtitutum. Tandem toties intermiſſam ac interdum repetitam operam, quotuis ſeiunctis horulis vtcunque terminatam, in lapſus aliquos propenſiorem fuiſſe. Humana nimirum conditio, non modo ad ardua, verumetiam ad familiaria quandoque impingit, quamobtem hęc illi vnico ſummo concredam, cuius beneficentia longè plura quàm ritè ſuſcepta mihi collata ſunt. Quæ vtinam atque iterum vtinam illius clementis nutui morem gerant: ſuorum ſeipſos metiendorum obſequio deſeruiant: totúmque (cui propenſè humana indulget imbecillitas) ab ingenijs (diſciplinarū cultu excitatis) propulſent. Vale.

Præfatio.

Præfatio.



QVI disciplinarum veram intelligentiam cõsequi velint, sibi magnopere certum suadeant eas nulli humano sensui subiacere, sed solius mẽtis obiectum esse, cùm maximè sensus extra intelligentiam sint, ac quicquid sua operã nanciscuntur menti seu intelligentiæ discernendum offerant, vt mentis intelligentia consors, & vnica insuper artis capax, disciplinas à certis & inuiolabilibus principiis nullique sensuum defectui obnoxiis ortas esse concipiat. Nulla planè sensuum externorum obsequia scientias optare liquet. Quod si disciplinæ potẽtia ad actum reuocanda sit, & quis in sciẽtia fructus (mortalium vtilis obsequio) colligatur scrutari cupimus, tum eam in praxim resoluentes, duros illos ac admodum inflexibiles sensus ad artis præcepta consequenda (aut verius quamproximè fas sit imitanda) flectendos esse intelligamus, vt quas artis leges infractas ac integras susceperit animus, eas quamprope insequi (licet minus præcisè adimplere) valeant sensuum operæ siquidem perfectio si qua est, intellectiua erit, heteroclitum verò sensuum exequium, neque enim solis sensibus huius defectus imponẽdæ sunt causæ. Sensus nanque (sensibilium ad intelligibilia veri nuncy) sine materia omnis operis sunt expertes, quæquidem materia perfectiones intelligentiæ minimè exequi in se patitur. Scientias igitur intellectui, praxim verò earũ sensibus ac materiæ conuenire, suapte natura cõcludemus.

Vt autem quis certarum sciẽtiarum (quæ veræ disciplinæ dici merentur) ingressus requiratur, paucis exponamus. Earũ ortum à principiis inchoari dicemus, quibus nihil prius tradi potest, à quo illa gignantur, quæ ideo tanquam disciplinarum primæ essentiæ existimari debent, quod eorum certitudo cuilibet ratiocinanti animæ sit tam familiaris & nota, vt solis vocibus illud principium resonantibus, nullo causæ præcedentis argumento illas probante requisito, sat cuique certa atque verissima sese offerant. Principiorum autem tres proferemus species, diffinitiones, petitiones, & communes sententias. Diffinitiones etenim cùm sint tantùm nominum liberè rebus impositorum expositiones, illæ nihil præ se ferunt causæ eas generantis, libertas nanque suarũ actionum causas præstare non cogitur. Attamen liberam denominationis impositionem, illico sequitur necessarius eiusdem denominationis vsus, ne cadat in paralogysmum disciplinæ methodus. Quæ itaque libera fuit impositio, necessariam postmodum suipsius obseruationẽ peperit. Petitiones verò (quas postulata dicimus) ex diffinitorum vsu partim sumptæ, verùm tam familiares vt nullus in eis appareat soluendus ratiocinanti animæ nodus, eò quòd præter vllas argumẽti præstigias, postulatorum veritates annuendæ per seipsas satis supèrque patent. Cõmunes verò dicemus sententias (quasi theoremata domestica) quæ causam proponunt, subsequentem effectum nulla intelligentiæ difficultate generantem, causam autem illam hypothesim esse quam sequitur sententiæ conclusio, dicimus. Has principiorum species subsequuntur theoremata ac problemata, sibiipsis ante, aut post posita, iuxta demonstrãdorum exquisitam seriem, quæ idcirco vtraque propositiones dicuntur, quod ad methodum consequendam, nobis proponantur, sub problematis aut theorematis specie. Theorema itaque exponemus, propositam esse orationem quæ ex hypothesi liberè sumpta necessariam conclusionem oriri profert. Necessariam quippe dicemus, si sumpta hyothesis causa sufficiens fuerit, effectũ generandi qui cõclusio dicitur, non autem necessariam pro vnica & sola sumentes. Vnica etenim sumpta hypothesi diuersas generari cõclusiones sæpius fas erit. At vbi in theoremate ex assumpta hypothesi aliqua sumitur conclusio, quę pro hypothesi sumpta, concludat eam quæ prius fuit hypothesis, hoc theorema sibi

[illegible] necessariò producit aliud. Nam si quæ fuit cõclusio pro hypothesi [illegible], eam pro conclusione quæ prius fuit hypothesis necesse pariet. sicq́ posterior prioris conuersa dicetur, priorque posterioris. His equidem conuersis sæpius vtetur Euclides, si futuris demonstrandis vtrasque præmittendas censeat, sin minus alteram tantùm partem quæ suo cœpto fuerit vtilior, educet.

Problema autem, orationem propositam esse dicemus, cuius & causam & hypothesim occultauimus, solam conclusionem proponentes, relicta genitrice causa inquirenda, quæ propositum excitet effectum. Huiusmodi etenim propositiones conuersas non habent, cùm nulla in ipsis hypothesis præponatur, quæ in conclusionem conuerti possit, vt ostendimus in theoremate, sed vnica & simplex proponitur absque hypothesi conclusio, cuius intelligentia ab inquirenda causa eam generante dependet. Illas demùm propositiones, quas diximus quandoque theorematum, quandoque verò problematũ gerere effigiem, non ex se demonstratas asserimus, sed à notis principiis prius ortas quæ priores docentur, posteriores verò à principiis & prioribus similiter nasci patefient, quo ordine vera disciplinarum cõtexta methodus reperitur, eo scilicet quo priores causæ posteriores generant effectus, generale quidem in quauis disciplina certitudine innixa præceptum.

Quia verò Euclidis præcipuum cœptum fuit Geometriæ principia edotere, quæ cùm res continuas & ideo confusas discutiant, Arithmetices principiis, vt ad faciliorem intelligentiam perducantur, fulciri appetunt. Geometriam igitur nihil aliud esse sentiemus, quàm artem qua maioris, minoris, & æqualis patefit natura, eius verò Geometriæ vnicum esse obiectum quantitatem. Arithmeticam autem discernendi esse dicemus scientiam, quæ cum Geometria commune habet diuinum illud principium, quod vnitatem nominamus. Quælibet enim Geometriæ magnitudo vna dicitur, Arithmetici verò priorem tantùm vnam denunciant, eámque insecabilem ac omni diuisione siue discretione priuatam, quia tamen confusionem sæpius parit continũ Geometriæ proprium, miscebit Euclides Geometricis principiis ea arithmeticorũ principiorum elementa, quæ suæ arti geometricę clarius edocendæ, facere satis apparebũt. Geometriæ etenim est vnicus scopus quantitas, quã (absque Arithmetices auxilio) tam confusam vrgente discretorum inopia discentibus offert, vt illis quid tantum maius, minus, vel æquale fuerit exponat, quando quidem maius vel minus, Arithmetices relinquens subsidio. Volens igitur Euclides Geometriæ intelligendæ faciliores perquirere aditus, eiusdẽ principia per Arithmeticas distinctiones, vbi par erit, explanare non dedignabitur.

Quantitatem priori distinctione secuit Aristoteles in continuam & discretam, continuámque (verum Geometriæ subiectum) in lineam, superficiem, solidum, tempus, & motum propriè dictas quãtitates distinxit. Reliquas verò quæ maius, minus, aut æquale proferunt, per accidens quãtitates dici, non autem propriè voluit, insuper maius & minus, aut magnum & paruum, quantitatis nomine priuari. Sunt enim potius quãtitatum respectus, quàm quãtitates, nec in quantitatis prædicamẽto ea recipi, sed in relationis vel adaliquid prædicamento satius coaptari. Maius etenim minoris relatiuum est, & contra minus maioris. Tandem quãtitatis proprium concludit æqualitatem, vel inæqualitatem esse, quod sonat veram quantitatum differentiam, quemadmodum & qualitatum, simile & dissimile differentiam proferunt. Continuam igitur dixit eam quantitatem, cuius partes copulãtur aliquo communi termino, quo quidem in vnicam & indiscretam magnitudinem confusè coeunt. Discretam autem quantitatem dixit Aristoteles esse numerum & vocalem orationem

tionem earum quidem parte. nullo communi termino coniungi possunt, sed semper discretæ permanent, partes suum totum componentes, scilicet unitates ac numeri minores, qui sunt partes maioris. Similiter & orationis prolatæ syllabæ siue dictiones totam orationem componentes, sibi inuicem distinctæ permanent, eò quòd nullum habeant cõmunem terminum, ad quem copulatæ in unum coeant, sed unitatum more separatæ quare suarum magnitudinum certiorem ac distinctiorem pariunt intelligentiam Has itaque magnitudines quantitatem habere dicemus Arithmeticam, ob earum à numeris sumptam discretionem.

Cùm igitur continuarum quantitatum conceptus subtiliora discutiat negotia, scilicet eas habitudines quæ tam Geometricis quàm Arithmeticis quantitatibus conueniunt (diximus enim Geometriã & Geometricarũ & Arithmeticarũ magnitudinũ comprehẽdere respectus, non tamen eam facilitatem qua per discretionem illæ exprimuntur habitudines) rudimẽta geometrica à subtilioribus incohabimus principiis. eò quòd quanuis alia disciplina subtilior sit Geometria, nãque lineæ plani ac solidi naturam docere volentes, à signo ordiemur, veluti temporis & motus ab instanti, ponderis autem à momẽto methodum aggrediemur. Cùm nec signum magnitudinis, nec instans temporis, neque momentum ponderis, quidpiam in se habeant, sed tantùm principia, termini, siue limites sunt, à quibus eorum nascitur intelligentia, quia verò discreta cognitioni ac intelligentiæ leuius captanda sese offerunt, nec in se aliquid habent confusum, discretorum principia, primùm ab unitate ordiuntur, quæ ex se determinata & planè cognita, nempe discretorum numerorum generans naturam exhibetur, discretarum quantitatum minima.

Vt autẽ quæ de Euclide vero Geometriæ cultui reducenda cepimus, paucis tradamus Euclidẽ imprimis geometricarũ traditionũ facilè principem professi, eius demonstrata ea certitudine fulcienda esse existimauimus, qua principia, quæque sic exponantur, vt singula suę naturæ dignitatẽ conseruẽt. Diffinitiones nempe quibus totius disciplinæ nititur status, in germanũ sensum interpretandæ hactenus extant. Necnon curandum vt cum diffinitis conuersæ progrediente disciplina, alteri diffinito non adhæreant. Postulata verò vltra prius cõcessa nihil expetant. Communes autem sentẽtiæ, adeo familiares habeantur, vt nulla argumenti optata specie earũ veritas propalãda sit. Propositiones demùm à principiis genitæ, hoc pręscripto disponantur, vt subsequentes à prioribus, non autem à posterioribus demonstrandæ sint, ac earum demonstrationes solis disciplinæ legibus construendæ tanta religione decorentur, ne vllum in eis demonstrandis intercedat mecanici instrumenti iuuamen. Quippe Euclidis à Campano & Theone hucvsque nobis tradita quædam principia ac theoremata demonstrationibus ornata, mathematicæ religioni repugnare cernimus quandoque expositionis penuria, quandoque verò eiusdem sinistra sumptione. Insuper (quod prępõderat) non rectè suscipiũtur Arithmetices obsequia, quibus ratiocinãti lectori Geometriæ confusas quantitates discernendas tradidit Euclides, numerorum prolatis quibusdam selectis rudimentis: per quæ non numerorum præsertim tradendas leges suscipit, sed quantitatum confusarum (continui causa) naturam, numerorum famulatu discernere conatur, vt postmodum per discretionem (quæ sola quãtitatis certitudinẽ mẽti potest inserere) certas ab incertis quantitatibus, & natura & traditione lõgè diuulsas, ac inuicem incomparabiles esse proponat, nulli nempe discretioni communicantes eidem, ac demum quæ de solidis dicta fuerint, imperfecta, nec adoptatum ab Euclide finẽ perducta fuisse, sed manca vel heteroclita, quæ discentibus ab ipso Euclide suscepta prædicarũt: tãti viri decus octo theorematum, decimoquinto libro perficiendo relictorum obliuione maculantes.

Ab his itaque dissidiis turbata Geometriæ ab Euclide relicta principia, & extra veræ disciplinæ seriem distracta cernétes, quódque harum disciplinarum natura, tanta generis nobilitate, cæteras artes scibiliáque præcellat, vt inter eas certitudinis (quæ veritatis est indiuidua comes) meritò primatum sibi vendicet, certitudinis huius (& proinde veri) amantissimi, conatus viriúmque operas Euclidi restituendo impendere volumus, quibus ea quæ geometricæ méti obsistere visa sunt, in veram disciplinæ geometricæ methodum reducamus, commendata ea facilitate qua legentibus Theonis scripta iuxta Zamberti (Græcorum exemplarium interpretis) versionem (quam sibi familiarem iam consecuti sunt) nostræ linguæ voces formare nitamur, discentibus obaudire cupientes. Textus necnon demonstrationes ipsius discendi sonum sequentes quamproximè licebit, proferemus, ne locutionum diuersitas difficilem conceptu demonstrationem difficiliorem referat. Diffinitiones insuper ea expositione sociauimus, quam verum Geometriæ cultum appetere sumus arbitrati, illæ etenim præcipuum Geometriæ fulciunt culmen. Demonstrandi autem argumenta, à Campano ac Theone relicta, vt plurimum insequemur, quæ si quandoque à Geometrica sinceritate recesserint, in alia demonstrata mutantes, huius disciplinæ integritatem tuebimur. Reliqua verò (reiectis superfluis) in quam breue fas erit cópendium cogentes, ne traditionis prolixitas difficili confusionem implicet, seruato attamen hoc ordine, quo cuilibet variato theoremati occasionem (si quæ fuerit) monito ad finem collato exponamus, quo & alterationis causam, & veritatis effectus, patefacere conabimur, maximè vbi vrgens variandi negotium incubuerit, quia verò in demonstrandis theorematis occurrunt particulæ, quandoque non prius expositis primordiis demonstrandæ, corollaria sepiuscule contulimus, aut equidem propositiones, quibus modico vel potius nullo tedio, integra sequentis theorematis concluditur demonstratio. Cùm autem ad præcipua Geometriæ rudiméta ventum erit, rationes scilicet & proportiones, his exponédis prolixiores esse cogemur, præcipuè circa diffinitiones, subtiliorum huius disciplinæ partium fundamenta tolerantes. Existimauimus etenim fœdata exemplaria Euclidis fuisse, tum quidem temporis truculétia, tum & hominum incuria, vt testatur Zambertus sua in Euclidem perspectiuè liminari, se tineis & carie lacerata comperisse Euclidis exemplaria, tanta quidem egestate, vt quæ iuxta veram huius disciplinæ mentem, suorum principiorum ordine suffultam restituenda essent, ea interpretes sub cómunem aliarum professionum praxim dirigenda esse rati, diffinitiones & proinde theorematum sententias in exteros sensus distrahentes, silentio non tantùm permulta vtilia, sed & necessaria prætermisere, quidam verò eorum intelligentiam ferè pertingentes, expositiones truncas, ac veluti hæsitantes protulêre. Hæc obseruátes, nec minus veræ disciplinarum intelligentiæ auidi, quàm dignitatis tanti viri cultores, quid in horum principiorum vero conceptu abstrusum esset inquirétes, quo illorum veritas à quouis calumniæ incursu tutanda esset. Reperimus Euclide discreta Arithmetices exequia in auxilium continuorum exponendorum implorante, aliquos eius interpretes, Arithmetices cum Geometriæ rudimentis principia confudisse, ac vtraque eadé interpretatione elucidanda forè existimasse, discreti à continuo latam illam non venerantes discrepantiam, tum & natura, & methodo ipsis ab æterno insitam magnitudinis scilicet naturam pro actione quæ ipsi elucidandæ confertur sumentes, in id ferè delusi sunt, vt pro substantia accidens exponendum esse arbitrati sint, népe multiplicem magnitudinem pro ipsi collata multiplicatione recipiendam esse coniecerint, ac alia plura quæ latius posthac Altissimi nutu ostensuri sumus, ab impropria rudimentorum expositione genita.

Cæterùm

Cæterùm tres numerorum libri sextum è regione sequentes, æquè vt reliqui ab Euclide in rudimẽtorum Geometricorum gratiam elucidandorum, non in Arithmeticẽ edocendam prolati sunt: is nanque numeros ad arcanam continuarum & ideo confusarum quantitatum intelligentiam exponendam sua discretione sumpsit, tum etiam vt illam exprimat inter quantitates naturæ distantiam, qua quantitates habitudinem certam ac perceptibilem inter se habentes, desciscunt ab iis quæ incertum, indeterminatum, ac penitus ob omni tuta intelligentia detrusum inter se habent respectum. Quibus explicandis si quos offenderimus terminos, veram quantitatis naturam relinquentes, non verebimur aptiores intelligendæ methodo conferre, quæ etenim suo proprio difficilia sunt, per improprias voces expressa, facilè omni tuta intelligentia priuari posse credemus. Si quid igitur extra communem vsum huic adaptemus negotio, illud facilioris intelligentiæ captandæ gratia propositum esse existimemus, non enim quæ eloquentiam, sed quæ Geometriam aspectant, discutienda suscepimus. Cùm autem ad solida properabimus trium dimensionum solido cuique propriarum, quasdam certis quantitatibus, incertis alias exprimi reperiemus, certas enim elucidabunt numeri, incertas verò à certis remotas ostendent iidem, vt fusius decimo libro dicetur. Horum autem solidorum libros quinque post decimum descripsit Euclides, quorum binos priores de solidis in genere nuncupari voluit. Tres verò posteriores de corporibus (vt Græco exemplari habetur) horum licet eadem sit ferè substantia, binorum priorum attamen generalia in omnia solida voluit perscribi documenta. Posterioribus verò tribus solidorum regularium texturam edoceri voluit, quæ quidem regularia solida finito numero conclusa (scilicet senario) arctiores & à reliquis separatas leges, eorum corporum constructiones seu affinitates dicibiles amplectẽtes, his tribus postremis coëgit libris, qui itaque de corporibus loqui dicti sunt. Sed quia trium horum priorem tantùm transtulit Theon, Ypsicles verò reliquos, Campanus autem in omnes scripsit, veremur has diuersitates aliquid corruptionis generasse. Nam decimiquarti 18 theoremata ab Euclide profitetur suscepisse Campanus, decimiquinti verò 13. At Ypsicles decimoquarto, quatuor, decimoquinto autẽ quinque tantùm ab eodem recepisse fatetur Euclide. Horum itaque aut certè Campani in decimũquartum luxus, in decimumquintum verò inopia, aut equidẽ Ypsiclis in vtrosque penuria vnde oriatur, relinquimus. Quare decimiquarti opus cõparatione solidorum decimotertio descriptorum vnii cernentes, quæ huic Euclidem contulisse arbitramur, conferemus eidem, reliqua si quæ necessaria fuerint suis locis reponentes. Decimiquinti autem ab Euclide necessariam theorematum cæptam seriem, vno scilicet & viginti conclusam problemate aggredientes. Campanum comperimus duodecimo seu penultimo theoremate, viginti optatarum ab Euclide inscriptionum, duodecim tantùm demonstrari posse (quas scilicet is demonstrare conatus est) dicentem, nonnullisque debilibus admodum argumentis illud idem confirmare cupientem. Quasi Euclidis cæptum vires prætergredi concluderet, qui nempe viginti solidorum regularium demõstrandas suscepisset inscriptiones, duodecim tantùm adimplesse potuisset. Inauditum saltem nulla fide dignum illud arbitrati, sed potius elapsos temporis ambitus id nobis iniuriæ cõtulisse, vt quæ integra descripserat Euclides, dissecta seu variè vitiata ad nos perducta fuisse suasimus. Ne igitur tantùm huius viri depereat nomẽ, huic decimoquinto peragendo, tam serio incũbemus sudore, quo (diuina opitulante clementia) numeris omnibus absolutum illum restituamus, mentem doctißimi illius Euclidis quamproximè licebit è vestigio sequentes. Ac insuper eidem decimumsextum de solidorum inscriptorum, ad circunscripta respectu seu affinitate dicentem sociabimus. Prius inchoatam solido-

rum regularium intelligentiam prosequentes, quæ decimotertio descripta solida sequenti decimoquarto ad se collata sunt: sicq; decimoquinto descripta erunt, postremò decimosexto cõferenda venient. Demùm quánam arte componantur hæc regularia solida, compositáque qualia producant corpora, demonstratis argumentis docuimus, subiungentes leui quodam compendio, qua ratione singulis regularibus, singuláque illis regularia inscribantur admonentes, quę fusius ni fuisset temporis parcitas demonstrationibus illustrassemus, sed hæc oculatus Lector nullo negotio consequetur. Hæc autẽ hactenus discußimus, vt legenti facilitas elemẽtorum geometricorum adaugendorum pateat, ac in dies ditior siue locupletior euadat huius disciplinæ methodus. Nam quæ circa regularium figurarum latera, bases, aut solida conferri poßũt habitudines, numero ferè infinitæ nascentur, eorum igitur nostro decimosexto aliqua proposuisse sufficiat. Tandem vt inter hæc perfecta solida fraternæ quidpiam noscamus insidere neceßitudinis, Opusculum terminando solidorum labori contulimus illud quo pulcherrimè solida in mixta seu ab ipsis composita transferantur, siue quid & quale coniuncta componant, solidum ostendamus. Tum etiam de solidorum regularium natura quædam subiunximus, subleuandis ingeniorum laboribus non parum vtilia. Reliqua studiosis huius disciplinæ militibus adimplenda relinquentes.

ἘΜΠΕΙΡΊΑ ΤΈΧΝΗΝ, ἈΠΕΙΡΊΑ ΤΎΧΗΝ ἝΥΡΕ.

Euclidis Megarensis Mathematici clarissimi

ELEMENTA GEOMETRICA LIBRIS QVINDECIM AD GERMANAM GEOMETRIÆ INTELLIGENTIAM E DIVERSIS LAPSIBUS temporis iniuria contractis, restituta: adimpletis præter maiorum spem, quæ hactenus deerant solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus. Auctore Francisco Flussate Candalla.

DEMONSTRATIONVM EVCLIDIS
Liber primus.

Diffinitio prima.

SIGNVM, est cuius pars nulla.

Quia geometriam, agimus cuius vnicum obiectum est quantitas, Signum esse diffinimus, notam subintelligentes, cuius nulla est pars quantitatis, vt cum diffinito conuersa diffinitio, notam cuius nulla sit quantitatis pars, signum esse intelligat, quantitatem agẽs: Nullam autem partem, sed tantum animi conceptum: Cuiuslibet quantitatis partem optatam, vel locum limitantem, diuidentem, aut designantem. Quod equidem in temporis quantitate instans, veluti in pondere, momentum, idem esse dicemus, quæ nihil metiuntur sed tantùm limitant.

Diffinitio secunda.

Linea verò est, longitudo non lata.

Quoniam Geometria tres recipit dimensiones, longitudinem, latitudinem, scilicet & sublimitatem. Quæ vero quantitas vnam tantùm habet dimensionem, Ea longitudinem tantùm habet, Ea propter lineam primam quidem omnium dimensionem, longitudine sola, nulla verò latitudine aut altitudine dotat. Quare eius longitudo quantitas dicetur, eius verò latitudo aut sublimitas, signum tantùm recipit, hoc est determinandi, limitandi, aut designandi virtutem. Metiendi vero solas longitudines, nullas autem latitudines, vel sublimitates suscipit negotium.

Diffinitio tertia.

Lineæ autem limites sunt, signa.

Limites lineæ signa vocat, Eo quod limitare sit alicuius quantitatis progressum terminare, quia verò longitudo lineæ cum sit sola in linea dimensio, sumit sibi terminum limitem, siue designatorem signum, quod quidẽ æque vt illa vtitur reliquis dimensionibus, latitudine scilicet & altitudine, hoc est nulla. Terminatur itaque aut limitatur lineæ progressus signo.

Diffinitio quarta.

Recta linea est, quæ ex æquali sua interiacet signa.

Signa lineæ (ad eam vere rectam diffiniẽdam) ex æquali interiacere dicit. Cum quæuis in oblata linea signa conceperit animus inter extremos lineæ limites. Hac serie interiaceant siue interponantur, vt ex æquali & nusquam subsultando siue declinando, ab extremorum mutuo recedant aspectu, Sed inter extrema lineæ signa adæquatè iaceant.

MONITVM.

Hanc diffiniuit Campanus rectam esse, quæ à pũcto ad punctum breuissime extẽditur, quæ diffinitio veram rectitudinis substantiam non concipit. Rectitudo etenim lineæ in declinationis priuatione, siue in eo situ quem extremorum signorum lineæ aspectus indicat, consistit, non in breuitate. Nos ideo Theonem sequemur.

A

Diffinitio 5.

Superficies est, quę longitudinem, & latitudinem tantum habet.

Diximus secunda diffinitione, primam & vnam tantum haberi dimensionem in linea: nunc vero superficiei secundam (quæ binas præsefert dimensiones) attribuemus, longitudinem quidē & latitudinem quo etenim obsequio linea lōgitudines tantum metitur, eodem superficies, lōgitudines & latitudines mensurat: sed cum tertia careat dimensione, scilicet sublimitate, eius sublimitatem exprimet signi sublimitas, quæ nulla vtriusque est. Quòd autem ad tertiam attinet dimensionem, scilicet solidorum, prima vndecimi docebit quandoque diffinitio, prioribus his decem libris quæ tantum ad binas priores dimensiones spectant, interdum dicturi.

Diffinitio 6.

Superficiei extrema sunt lineæ.

Qua ratione diximus lineæ progressum signo terminari siue limitari, sic dicemus superficiei progressum terminari vel limitari linea, eò quod eandem habeat altitudinem cum superficie, quæ nulla est. Terminamus igitur, limitamus aut concludimus superficiem lineis. qui termini, extrema sunt ipsius superficiei.

Diffinitio 7.

Plana superficies est, quæ ex æquali suas interiacet lineas.

Huic diffinitioni maximè conducit quarta huius earum etenim idem ferè est sensus, Quã nãq; arte singula rectæ lineæ signa inter extrema iacent nusquam subsultãtia vel declinantia: eadem omnes in plana superficie ductæ lineæ interiacent ex æquali, hoc est, inter lineas superficiem terminãtes, vt proxima diximus diffinitione, nusquam à mutuo extremarum aspectu subsultantes aut declinantes, siue in altitudinem extra mutuum extremarum aspectum tendentes.

Diffinitio 8.

Planus angulus est, duarum linearum in plano sese tangenrium, & non in rectam iacentium, adinuicem facta inclinatio.

Quoniam his decem prioribus libris de lineis rectis & circularibus, quæ quidem in superficie plana describuntur, dicturi sumus. Intelligemus planum angulum, esse eum qui in superficie plana ab his lineis se tangentibus, ac in se inclinantibus describitur. Angulus etenim est linearum tangentium sese inclinatio. Anguli verò magnitudo in sola inclinatione consistit, quæ vnicum mensorem habet circuli circa se ambitum, vt latius dicemus trigesima tertia sexti. Si autem duæ rectæ in rectam coeant sese tangentes, ille contactus licet in plano sit, nullum efficiet angulum, eò quòd nulla sit inclinatio.

Diffinitio 9.

Quando autem continentes angulum rectę lineę fuerint, Rectilineus angulus nuncupatur.



Rectilineum angulum A rectis comprehensum lineis vocat, vt reliquorum differētiam ab eo noscamus. Nam B angulum mixtum dicere possumus à recta & curua comprehensum C verò curuilineum similiter & D: sed hunc quidem concauum, illum verò conuexum. Omnes tamen plani dicuntur anguli, vt differant à solido, quem vndecimo libro fauente Supero, diffiniemus: horum autem infinitæ sunt diuersæ delineationes.

Diffinitio 10.

Cùm verò recta super rectam consistens lineam, vtrobiq; angulos ęquales adinuicem fecerit, rectus est vterque ęqualium angulorum, & quę superstat recta, perpendicularis vocatur, superquam steterit.

Prosequens anguli naturam exponit æqualem inclinationem æquales efficere angulorum quantitates. Cùm enim dicit rectam super rectam stantem, hoc situ quo æquos vtrobique formet angulos, eosdem rectos vocitari. Id fitur, eò quod eadem lineæ stantis ad propositam vtrobique fiat inclina-



inclinatio, quæquidem æqualis existens, æquales denominat angulos, hosque rectos. Quæ verò superstat recta perpendicularis eò dicitur, quod Natura duce, quæ grauia deorsum dirigit, in planum ab humanis cultum æquali vndique facta inclinatione pendeat, ac ad omnes rectas lineas in eo plano eam tangentes, angulos æquales efficiat, vt latius describet vndecimus liber.

Diffinitio 11.

Obtusus angulus, maior est recto.

Diffinitio 12.

Acurus verò, minor est recto.



Iam ostendimus linearum inclinationem anguli efficere magnitudinem. Sed cum inclinationem maiorem existimemus, maiorem linearum accessum siue à recta recessum: minorem verò, recessum earundem: ad rectam autem accedentium, dicemus maiorem inclinationem, minorem producere angulum Et proinde minorem inclinationem, maiorem efficere angulum, vt his videmus exemplis rectas, angulos A *&* B *constituentes, eò quòd æquè adaperiantur siue ad se inclinent, æquos efficiunt* A *&* B *angulos. Et ideo (per decimam definitionem) rectos. Quia verò rectæ angulum* C *constituentes, plus adaperiuntur siue recedunt à seipsis, quàm recedant illæ quæ angulum* A *rectum constituunt, ab eis factus angulus* C*, maior recto dicetur: quia è conuerso angulum* D *constituentes, minus adaperiuntur, siue plus inclinant reliquis rectum componentibus, coactum* D *angulum idcirco minorem recto, acutum efficiunt, eò quòd* D *acutiori cuspide,* C *verò obtusiori forment.*

Diffinitio 13.

Terminus est, quod alicuius est extremum.

Quoniam cuiusuis quantitatis extrema eam concludunt suis terminis dicemus terminos esse ea extrema quæ magnitudinem coarctant: quem quidem terminum aliqui finem vocarunt, eò quod supposito in oblata magnitudine motu, ab intima parte ad extremas, vbi extremum aliquod eo motu attigimus, ibi huius motus finem reperimus. Sed aptior eius substantiæ denominatio per extremum nuncupatur, ne in finis & principij differentias incidamus.

Diffinitio 14.

Figura, est quę sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

Figuram iuxta præcedentem diffinitionem, dicimus esse eam, quæ sub aliquo extremo concluditur, aut equidem sub pluribus. sub vno tantùm extremo (hoc est vnica tantùm linea) concludimus circulum, coni sectionem in solidis verò, sphæram vnica superficie, spheroidem, & huiusmodi plana & solida sub pluribus verò, superficies pluribus rectis siue curuis lineis comprehensas, solida pluribus planis contenta. Quorum omnium termini sunt, scilicet planorum, lineæ, solidorum verò superficies. Quia verò signa lineam limitantia, nihil quantitatis concludere possunt, lineæ ea limites, non terminos esse dicemus, cùm infinitæ nihil componere possint, nec igitur concludere.

Diffinitio 15.

Circulus, est figura plana, vnica linea contenta, quę circũferentia appellatur, ad quam ab vno signo introrsum existente, omnes prodeuntes, rectæ lineę adinuicem sunt ęquales.

Hac diffinitione circuli nec illum rotundum nec quidem eius signum medium esse dicit. Concludit autem necessario ex ea rectarum ab vno interiori signo ad ambitum æqualitate, & circunferentiam in rotundum, & signum in medium ferri. hunc autem ambitum, circunferentiam denominat, quæquidem ab vno signo orta, eousque figuram circumit, donec vnde orta est, redeat.

Diffinitio 16.

Centrum verò circuli, illud signum appellatur.

Diffinitio 17.

Diamerer circuli est linea recta per centrum acta ex parte vtraque circunferentia terminata quæ circulum bifariam diuidit.



Sufficit rectam lineam per circuli centrum actam esse in vtrasque circunferentiæ partes, vt ea circulum bifariam secet. Nam ea regularitas qua omnes à centro rectæ sunt æquales. Ostendit à centro rectas ad vtrasque partes diametri æqualiter circunferentiam attingentes, & per quasuis areæ partes hinc & inde semper æquales, arearum æqualitatem necessariò producere. Vt à centro E ad vtrasque partes diametri A B qualibet ductæ æquantur, æquales areas metientes.

Diffinitio 18.

Semicirculus, est comprehensa figura sub dimetiente & sumpta à circuli circunferentia.



Cum dixerimus figuram sub terminis contineri, eam quæ sub dimetiente & circuli circunferentia quam tollit dimetiens à toto circuli ambitu concipitur, semicirculum dicit, comprehensum quidem his duobus terminis, scilicet A C diametro, & A B C circunferentia.

Diffinitio 19.

Sectio circuli, est comprehensa figura sub recta linea & circunferentię parte.



Hanc diffinitionem repetit Euclides tertio libro, quinta diffinitione, cuiquidem plus conuenit quàm huic. Est enim ea figura, sectio circuli quæ inter rectam lineam & circumferentiæ circuli partem concluditur. Campanus & Theon ac aliqui iuniores, præter græcum exemplar, dixerunt hanc intelligi maiorem aut minorem semicirculo, amplitudinem huius dictionis tollentes quod alienum à vero sensu arbitrati sumus, cùm æquè dimidia totius, sectio vt tertia vel quarta dici poßit, vt A, B vel C.

Diffinitio 20.

Rectilineæ planæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

In genere diffinit rectilineas quaslibet à rectis lineis comprehensas, vt particularius aliquas earum postmodum edoceat.

Diffinitio 21.

Trilaterę figuræ sunt, quæ sub tribus rectis lineis continentur.

Diffinitio 22.

Quadrilateræ figuræ sunt, quæ sub quatuor rectis lineis, cőprehédűtur.

Diffinitio 23.

Multilateræ verò figuræ sunt, quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis, comprehenduntur.

Quæ his quatuor diffinitionibus in genere exposuit de rectilineis figuris, distribuet in eas potißimum figuras, quarum vtilitas Geometriæ plus conducere videbitur: reliquas sub multilaterarum generali relinquens denominatione.

Diffinitio 24.

Trilaterarum porro figurarum ęquilaterum est triangulum sub tribus æquis lateribus contentum.

Diffinitio 25.

Isosceles autem est, quod duo tantum ęqualia habet latera.

Diffini-

Diffinitio 26.

Scalenum verò est, quod tria inæqualia habet latera.

Diffinitio 27.

Insuper trilaterarum figurarum, rectangulum triangulum est, quod habet rectum angulum.

Cùm in triangulo quouis vnus tantùm angulus rectus esse possit, sat videtur fecisse si denominet rectangulum triangulum, eò quòd vnum rectum cum plures habere non possit, possideat.

Diffinitio 28.

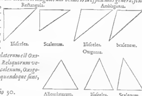
Ambligonium autem est, quod obtusum habet angulum

Fortius huic inerat argumentum. Si enim in quolibet triangulo, duo recti anguli esse non possint, difficilius duo obtusi erunt quippequi maiores rectis existunt. Ea de re ab vno tantùm obtuso, Ambligonium denominabitur à voce græca depromptum.

Diffinitio 29.

Oxigonium verò est, quod tres habet acutos angulos.

Vt præcedens angulus græcam concepit denominationem, sic Oxigonium ab acuto angulo denominabimus id quidem quod tres habet acutos angulos siue æquales siue inæquales, hoc est, quod nullum rectum aut obtusum habeat. Horum etenim triangulorum veluti tria efficiemus genera, scilicet Rectangulum, Ambligonium, Oxigonium. Quorum quodlibet rursus in species subdiuiditur: puta Rectangulum in Isoscelem & Scalenum: Ambligonium similiter in Isoscelem & Scalenum: Oxigonium verò in AEquilaterum, Isoscelem & Scalenum quodlibet etenim AEquilaterum est Oxigonium, tres habens acutos angulos. Reliquorum verò vtrunque, Isosceles scilicet & Scalenum, Oxigonia, Ambligonia vel Rectangula, quandoque sunt, vt his docetur figuris.



Diffinitio 30.

Quadrilaterarũ autem figurarum, quadratum quidem est, quod & ęquilaterum ac rectangulum est.

Diffinitio 31.

Alterolongius est, quod rectangulum quidem, sed æquilaterum non est.

Regulares prius quadrilateras exponit figuras, incipiens à quadrato: quod cùm latera æqualia & angulos æquales habeat, rectos habere cogitur. Nam omne quadrilaterum quatuor rectis angulos æquales efficit, vt colligemus 32 primi hæc etenim angulorum æqualitas, oppositorum laterum æqualitatem necessariò producet. Quare Alterolongius dicimus, quod æquiangulum, hoc est, rectangulum, sed æquilaterum non est, cùm opposita tantùm habeat latera æqualia.

Diffinitio 32.

Rhombus est, quę æquilatera, sed rectangula non est.

Diffinitio 33.

Rhomboides verò est, quæ ex opposito latera & angulos habens æquales, neque Æquilatera neque Rectangula est.

Quoniam omnes figuræ rectilineæ quæ numero laterum triangulum excedunt, possunt in variatis lateribus angulos variare. Hæ 32 & 33 diffinitiones nihil aliud à 30 & 31 immutant quam angulorum varietatem, non variatis lateribus. Quæ etenim figura Quadratum dicta est, variatis

… quibus dicetur, non variatis lateribus. Quæ ve… … tum angulorum varietate facta, Rhomboides dic… … ita, & angu… … tos æquales … orum autem angulos oppositos habent æquales, vt his docetur exemplis.

Quadratum. Alterolongius. Rhombus. Rhomboides

Diffinitio 34.

Præter has autem reliqua quadrilatera, Trapesia appellantur.

Vltra eas de quibus locuti sumus, quadrilateras figuras Trapesia vocat: Eas scilicet planas, quæ nec æquiangulæ sunt nec parallelis comprehensa lateribus, vt hæc A & B.



Diffinitio 35.

Parallelæ, rectæ lineæ sunt, quæ in eodem existentes plano, & ex vtraque parte in infinitum productæ non concurrunt.

Hæc diffinitio notanda propter eius frequentem vsum, erit. Sunt itaque Parallelæ, rectæ lineæ, (quas vocauit Campanus Æquidistantes) in eadem plana superficie descripta vel conceptæ, ea tamen arte, qua semper & vbique, inter eas æqualis distantia intercipiatur. Perspicuum igitur erit si semper æquidistent, nunquam eas contingi, vel concurrere.

Diffinitio 36.

Parallelogrammum, est figura plana, quatuor rectis lineis contenta: quarum quælibet oppositæ sibi inuicem sunt parallelæ.

Hanc diffinimus figuram tanquam genus ad trigesimam & tres eam sequentes, quas comprehendit in se Parallelogrammum, & nihil insuper quælibet etenim earum & nulla alia latera opposita parallela habent. Qua de causa autem præter Euclidem, eius diffinitionem apponimus, facile patebit eo quidem quod sæpius hac dictione non diffinita primo libro vtitur & tam confuse, vt Exagonum quandoque 34 primi pro Parallelogrammo sumi posit, cum eius latera & anguli, quæ ex opposito æquentur, & dimetiens illud bifariam secet, quod esset absurdo absurdius.

SEQVVNTVR POSTVLATA SIVE POSITIOnes simplices, à nullis præmissis deductæ, quas concedi nobis optamus ad faciliorem artis progressum, quæquidem nullo argumento potest mens rationalis denegare.

Postulatum primum.



B omni signo in omne signum rectam lineam ducere.

Non inconueniens sensu vt ab omni signo mente concepto (cum aliud non sit) in omne aliud signum, lineam rectam excogitare quodquidem atque facile repertmus vt signum ipsum concipere. Nam lineam aut signum, qualia ars deposcit, sensibus proponere non possumus percipienda, sed tantum concipienda: ea quippe nobis ars tradidit perfecta. Quæ itaque externis exequenda erunt sensibus, per artis intelligentiam mente conceptam, dirigenda erunt, vt eam quam proxime valeant, imitentur.

Postulatum secundum.

Rectam lineam terminatam in continuum recti inque producere.

Postula-

Postulatum tertium.

Omni centro & interuallo, circulum describere.

Hæc bina Postulata (veluti prius) naturam Geometricæ sequuntur disciplinæ quæ licet ipso actu aliquâ difficillimè exequi possint tamen earum in mente conceptio, ad ea quæ externis sensibus agi possunt, regenda sufficiet sat superque.

COMMVNES SENTENTIAE, QVAE EO A POstulatis differunt, quòd Postulata sint positiones simplices, à nulla præmissa deductæ, quæ rem non existentem fieri postulent. Sententiæ verò communes, conditionalem præmissam necessariò sequentes, rem iam existentem nos sentire cupiant: Quod prætermiserunt Campanus & Theon: Hic nanque duas inter Postulata miscuit Sententias: ille verò tres, relinquentes græcum exemplar, quod nostro iudicio approbandum videtur hoc loco.

Prima.

QVÆ eidem æqualia, & adinuicem sunt æqualia.

Secunda.

Et si æqualibus æqualia adiciantur, tota erunt æqualia.

Tertia.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquuntur, erunt æqualia.

Quarta.

Et si inæqualibus æqualia adiungantur, tota erunt inæqualia.

Quinta.

Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua inæqualia erunt.

Sexta.

Quæ eiusdem sunt duplicia, adinuicem sunt æqualia.

Septima.

Et quæ eiusdem sunt dimidium, æqualia sunt adinuicem.

Binas, sextam scilicet & septimam, posuit tantùm Euclides, quibus cunctæ reliquæ quantitatum multiplicationes siue in augmentum siue in decrementum extensæ, comprehensæ sint. Nam cum ait eiusdem duplicia æqualia adinuicem esse, intelligit haud secus eiusdem triplicia aut quadruplicia aut alia quæuis multiplicia inter se æqualia esse. necnon & dicens eiusdem dimidia æqua esse, illico concludit, eiusdem tertia, quarta, quinta aut alia quæuis idem decrementum eiusdem multiplicantia, inter se æqualia esse vt compendio consulat.

Octaua.

Et quæ sibimetipsis conueniunt, æqualia sunt adinuicem.

Sibimetipsis conuenire dicuntur magnitudines, cùm earum singulæ quantitates singulis comparata, æquales reperiuntur, vt cuiuslibet totius partes partibus alterius quoad quantitatem conueniant, hoc est rationali argumento (non autem experientia) conuenire cognita, illa sunt æqualia, vt longitudo longitudini, latitudo latitudini, sublimitas sublimitati, rectarum inclinatio inclinationi, & reliqua id genus.

Nona.

Totum est sua parte maius.

Respectiuum esse dicemus totum ad partem, cùm sint sibi relatiua: pars etenim Geometrica quodlibet à toto abstractum est, aliquid ei relinquens, quod latius docebimus prima diffinitione quinti.

Decima.

Omnes anguli recti, ęquales adinuicem sunt.

Vndecima.

Si in duas rectas lineas, recta incidens linea interiores & ad easdem partes angulos, duobus rectis minores in plano fecerit, Rectas lineas in infinitum productas, concurrere necesse est ad eas partes, in quibus anguli duobus rectis minores existunt.

Huius notitia à trigesima quinta diffinitione oritur ob inclinationem: nam si binæ lineæ rectæ, in quas recta incidit, efficiant binos interiores angulos, & ad easdem partes lineæ incidentis, duobus rectis minores, clarum est binas lineas ad se inuicem inclinare, & quanto plus in rectum, longúmque producentur, plus accedent ad sespsas, quousque altera alteram secet. Quare sequitur omnem linearum rectarum inclinationem infinitè in plano productam, tandem angulum producere.

Duodecima.

Duæ rectæ lineæ superficiem non comprehendunt.

A præcedente nascitur hæc: nam vt superficiem concludant duæ lineæ, in signo concurrere eas oportet. Quod si ab eo signo in rectam continuè producantur, semper maius producent interuallum, nusquam itaque superficiem claudent.

Euclid-

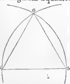


EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber primus.

Propositio prima. *Problema.* 1.



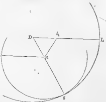
SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.



Sit proposita recta A B *terminata in* A *&* B, *centro* A: *interuallo autem* A B *circulus ducatur* B G, *per 3. postulatum, centro item* B, *interuallo* B A, *circulus ducatur* A G: *iunctis* A G, G B *rectis. Dico triangulum* A B G *æquilaterum esse: Quoniam per circuli diffinitionem recta* A G, *æqualis est rectæ* A B *& (per eandem)* B G, *eidem* A B *æqualis erit: Sequetur itaque ex prima communi sententia* A G, G B *(eidem* A B *æquales) esse & adinuicem æquales. Super data itaque recta linea terminata* A B, *triangulum* A G B *æquilaterũ cõstituimus.*

Propositio secunda. *Problema* 2.

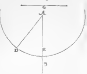
Ad datum signum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ponere.



Esto signum datum A: *data verò recta* B G, *ducatur* A B *recta, super qua (per præcedentem) triangulum æquilaterum constituatur* A B D. *extendatur* D A *in* L, *&* D B *in* I, *Centro* B *interuallo* B G, *circulus describatur* G I, *per 3 postulatum, centro rursus* D, *interuallo* D I, *circulus fiat* I L: *Dico rectã* A L *æqualem esse rectæ* G B *positæ: Quoniam æquales sunt* D L, D I. *rectæ, per* 15 *diffinitionẽ, Æquales item sunt* D A, D B, *per præcedentem. Reliquæ igitur* A L, B I *æquales erunt per 3 communem sententiam, At quoniã æqualis est* B G, *rectæ* B I *per* 15 *diffinitionem, Rectæ* A L *&* B G *(eidem* B I *æquales) erunt adinuicem æquales, per* 1 *communem sentẽtiam, Ad datum itaque signum* A, *data recta linea* B G, *æquam rectam* A L *posuimus.*

Propositio tertia. *Problema* 3.

Duabus datis inæqualibus rectis lineis, à maiori minori, æquam rectam lineam abscindere.



Sint datæ rectæ inæquales A B *maior, &* G *minor, ad datũ signũ* A *data* G, *æqualis ponatur* A D, *per præfatã, centro* A, *interuallo autem* A D, *circulus ducatur (per tertium postulat.)* D E. *Quia recta* A B, *maior est (per hypotesim) interuallo* A D, *circulus secabit rectam* A B, *seccet in* E. *Quare* A E *eidem* A D *æqualis erit, per* 15 *diffinitionem, Et proinde* A E *&* G *(eidem* A D *æquales) adinuicem æquales erũt. Duabus igitur datis* A B *&* G *inæqualibus rectis lineis, à maiori* A B *minori æquam* G, *rectam lineam abscidimus* A E.

Propositio quarta.

Si duo triãgula duo latera duobus lateribus æqualia, habuerint alterum

alteri & angulum angulo æqualē, sub æqualibus rectis cōtentum, & basim quoque basi æqualem habebunt, & triangulum triangulo æquum erit, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri æquis lateribus subtensi.



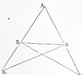
Sint triangulorum A B G *&* D E Z, *duo latera* A B, A G, *duobus* D E, D Z *æqualia, Insuper anguli* B A G, E D Z *sint æquales: Dico bases* B G *&* E Z *æquales esse, & reliquos qui ad* B *&* G *angulos, reliquis qui ad* E *&* Z, *æquales esse. Quoniam (per hypothesim) æquales sunt* A B *&* D E *rectæ. Distantia signorum* A *&* B, *distantiæ signorum* D *&* E *conuenit, necnon quia æquales sunt* A G *&* D Z *rectæ, distantia signorum* A *&* G *distantiæ signorum* D *&* Z *conuenit. Rursus, quia æquos angulos comprehendunt rectæ* A B, A G *cum rectis* D E, D Z, *conueniet inclinatio rectæ* A G *ad rectam* A B *inclinationi rectæ* D Z *ad rectam* D E, *per octauam diffinitionem. Nam æqualitas angulorum à inclinationum æqualitate dependet. Sequetur itaque signorum* B *ad* G *&* E *ad* Z *distantias seu interualla conuenire, cùm interuallorum differentia ab inclinationum diuersitate nascatur. Ipsa itaq; signa* B G, *&* E Z *coniungentes rectæ, æquales erunt. Nam si altera maior esset altera, & inclinatio inclinatione maior esset contra positum, quod fieri nequit, & ideo conuenient earum quantitates. Si igitur triangulorum* A B G *&* D E Z *singula quantitates singulis comparatæ, æquales fuerint, triangula* A B G, *&* D E Z, *sibiipsis conueniunt, & proinde æqualia sunt per octauam communem sententiam. Quare & reliqui anguli qui ad* B *&* G *reliquis qui ad* E *&* Z *æquales erunt, cùm triangula sibiipsis conueniant: Si itaque duo triangula, duo latera, duobus, &c.*

MONITVM.

Alteram demonstrationem huic quartæ exhibere cogimur, ne præbeatur aditus, quo vlla mechanicorum vsuum instrumenta in demonstrationes incidant. Nam Campanus ac Theon hanc demonstrantes, triangulum triangulo superponunt, angulumq; angulo, siue latus lateri, demonstrationem potius instrumento palpantes, quàm ratione firmantes. quod tanquam prorsus alienum à vero disciplinarum cultu reyciente, aliam demonstrationem absque figura, anguli seu lineæ transpositione, protulimus ratione elucidatam.

Propositio quinta.

Isoscelis trianguli qui ad basim sunt anguli, adinuicem sunt æquales: & productis æqualibus rectis, qui sub basi sunt anguli, adinuicem æquales erunt.



Sit triangulum Isosceles A B G, *habens bina latera* A B, A G *inuicem æqualia. Dico angulos qui ad basim* B G *æquales esse: insuper, si producantur rectæ* A B, A G, *efficientes sub basi angulos* B G I, G B Z, *dico eos esse æquales. Seccentur protensæ* A I, A Z *æquales, per tertiam huius, ducanturq;* G I, G Z, *æquales erunt rectæ* B Z, G I, *per tertiam communem sententiam. Quoniam æquales sunt* A I, A B, *ipsis* A Z, A G *per hypothesim, & angulus* A *communis, basis* B I, *basi* G Z *æqualis erit. Insuper anguli* A I B, A Z G *(per quartam huius) sunt æquales, necnon & anguli* A I B, *&* A G Z. *Quia verò triangulorum* B Z G *&* G I B *æqualia sunt latera* B Z, Z G, *ipsis* G I, I B, *& angulus* B Z G, *ipsi* B I G, *reliqui (per præcedentem) reliquis æquales erunt, scilicet* Z B G, *&* I G B, *qui sub basi* B G, *necnon* B G Z, *ipsi* G B I: *Si autem ab æqualibus angulis* A B I, *&* A G Z, *æquales auferantur* G B I, *&* G B Z: *reliqui* A B G, *&* A G B, *qui ad basim (per tertiam communem sententiam) erunt æquales. Isoscelis itatrianguli qui ad basim sunt anguli, adinuicem, &c.*

MONITVM.

Transtulimus Isoscelium triangulorum pluralem vocem in singularem, ne incumbant discentes super comparatione angulorum plurium Isoscelium adinuicem, sed tantùm comparationi angulorum cuiuslibet Isoscelis & eiusdem inter se.

Propositio 6.

Si trianguli duo anguli ęquales adiuicem fuerint, ęquales quoque angulos subtendentia latera ęqualia erunt.



Sit triangulum G B A *æquos habens angulos* G A B B G A: *Dico latera* A G & A B *(eos subtendentia) æqualia esse: Quòd si non sint, esto aliquod eorum maius (scilicet* A B*) & à maiori* B A *recta auferatur, æqua minori* A G*, sitq́;* B D*, coniungaturq́;* D G*. Quoniam* A G & D B *sunt æquales, cõmunis eis addita* B G*, binæ* A G, G B*, binis* D B, B G *erunt æquales, per secũdam communem sententiam, Quia verò duo triangula* D B G, & A B G *habent duo latera* D B, B G*, duobus* A G, G B *æqualia, & angulum* D B G*, angulo* A G B *(per hypothesim) æqualem. bases igitur* D G, & A B *æquales habebunt (per quartam huius) & triangulum* D B G *triangulo* A B G*, æquum erit (per eandem) & minus, cùm sit in maiori comprehensum, quod fieri non potest. Ipsorum igitur* A B & A G *laterum nullum est maius, æqualia igitur sunt. Si itaq; trianguli duo, &c.*

Propositio 7.

Si à limitibus alicuius rectę lineę duę rectę ad signum concurrant ab eisdem limitibus in plano & ad easdem partes, duę alię ad aliud signum, duabus primis altera alteri eundem finem possidenti, ęquales non constituentur

A limitibus rectæ lineæ A B*, ducta rectæ lineæ* A G, B G *cõcurrũt in* G *insuper ab eisdẽ limitibus, super eodem plano, ad easdem partes cõcurrant ad aliud signum* D*. aliæ duæ* A D, B D*: Dico rectas* A D, B D *duabus primis* A G, B G *non esse æquales, scilicet alteram* A D*, alteri* A G *adinuicem, nec similiter* B G *alteri* B D *eundem* B *finem possidenti. Ab impoßibili enim, Si æquales dicantur scilicet* A G*, rectæ* A D & B G*, ipsi* B D*, æquales erunt (per quintam huius) anguli* A G D & A D G*, similiter* B G D, & B D G *qui ad basim Isoscelis. Cũ autem angulus* A D G *(pars scilicet totius* B D G*) sit æquus ipsi* A G D*, totus* B D G *maior erit parte* A G D*, sed & minor: nam fuit æqualis ipsi* B G D *parti totius* A G D*, quod fieri nequit. Non igitur erunt æquales, scilicet* A G*, ipsi* A D*, &* B G*, ipsi* B D*. Quia vero potest cadere signum* D *intra triangulum* A G B*. Cadat (ad secundam huius partem ostendendam) Si igitur æquales credantur* A G *ipsi* G D*, &* B D*, ipsi* B G*, anguli ad basim scilicet* A D G, & A G D*, fuut (per quintã huius) æquales. Qui verò sub rectarum* B D, B G *basi similiter sunt æquales, scilicet* D G*, ipsi* F G D*. Totus itaque* A D G *maior erit angulo* F G D*, sed & minor, cùm sit æqualis ipsi* A G D *parti ipsius* F G D*, quod fieri non potest. Vbicunque igitur rectæ aliæ* A D, B D *conueniant, quouismodo ipsis* A G, B G*, inæquales erunt. Si itaque à limitibus alicuius recta linea, &c.*

MONITVM.

Eò quòd quodammodo confusius hoc theorema tradiderit Theon, nos aliquas eius voces faciliori compendio mutauimus, ne binas alias binis prioribus lineis æquales in genere optari putemus, sed binas tantùm ab eodem limite lineæ simul exorientes, inæquales probari sibi inuicem, ac binas reliquas similiter inæquales, haud secus ostendemus binas in D *concurrentes ac binas in* G *concurrentes simul æquales fieri non posse, per inæqualitatem angulorum ad* A & B *necessario cõcurrentẽ.*

Propositio octaua.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus alterum alteri ęqualia habuerint, & basim basi ęqualem: angulum quoque sub ęqualibus rectis cõtentum ęqualem habebunt.



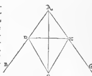
Sint duo triangula A B G *& D E C duo latera duobus lateribus æqualia habentia, scilicet* A G, *ipsi* D C *&* G B *ipsi* C E, *& basim* A B *basi* D E *æqualem. Dico angulum* A G B *(angulo* D C E *æquis lateribus contento) æquũ esse, Ab impossibili autem, si credatur angulos* G *&* C *nõ esse æquales, sit alius quidam ad* Z *super basi* D E *angulo qui ad* G *æqualis, & æquis lateribus comprehensus, scilicet* D Z *ipsi* A G, *&* E Z *ipsi* B G, *sequetur à limitibus rectæ* D E *datis duabus* D C, *&* E C, *alias duas ad aliud signum* Z *concurrere, æquales primis* D C E C, *Nam supponitur* D Z *rectæ* A G *æqualis, &* E Z *ipsi* B G *quibus sunt æquales (per hypothesim)* D C E C, *Rectis igitur* D C E C *æquales erunt* D Z, E Z *cuius oppositum ait præcedẽs huius. Non igitur possunt super æquis basibus maiores aut minores concipi anguli æquis lateribus comprehensi. Si igitur duo triangula, duo &c.*

MONITVM.

Huius alteram demonstrationis partem resecauimus eò quòd trianguli transpositione uteretur, quod quidem mechanicum spectat negotium à vera mathesi alienum, posita anguli qui ad Z *hypothesi ex quarta huius sumpta.*

Propositio nona. *Problema* 4.

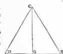
Datum angulum rectilineum bifariam seccare.



Sit angulus datus B A G, *ex rectis autẽ* A B A G, *æquales adinuicem seccentur (per secundam huius)* A D A E, *& cõiuncta* D E *super ea (per primam huius) fiat triangulum æquilaterum* D C E, *coniungatur verò* A C. *Dico rectã* A C *angulum datum* B A G *bifariam secare, quoniam triangulorũ* A D C A E C *bina latera* A D, A C *binis* A E, A C *sunt æqualia, & basis* D C *basi* E C *(per primam huius) æqualis, angulus igitur* D A C *angulo* E A C *(per præcedentem) erit æqualis, Datum igitur angulum* B A G *bifariam diuisimus per rectam scilicet* A C.

Propositio decima. *Problema* 5.

Datam rectam lineam terminatam, bifariam seccare.

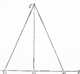


Esto data recta D B, *super ipsa verò* D B *(per primam huius) triangulum æquilaterum constituatur* A C B, *seccetur basi* D B *oppositus angulus* C *bifariam (ex præcedente) per rectam* C G: *Dico* D B *rectam secari bifariam in* G. *Quoniam triangulorum* D G C *&* B G C, *duo latera* D C C G *duobus* B C, C G, *sunt æqualia, & anguli* G C D G C B *æquis lateribus contenti æquales, per constructionem, bases igitur* G D G B *(per 4. huius) æquales erũt. Datam igitur rectam* D B *bifariam in* G *secuimus.*

Propositio vndecima. *Problema* 6.

Datæ rectæ lineæ, à signo in ea dato rectã lineam ad angulos rectos excitare.

Suppo-



Supponatur data recta A B, *in qua contingens signum* G *sumatur, ab ipso* G *versus* A *&* B, *æquales duæ rectæ seccentur* G D G E. *Super recta verò* D E *triangulum æquilaterum (per primam huius) cõstituatur* D C E, *coniuncta* C G *Dico* C G *ad angulos rectos datæ* A B *excitari, cùm triangulorum* D C G *&* E C G *duo latera* C D D G, *duobus* C E E G, *sint æqualia, & basis* C G *communis per constructionem, perspicuum erit (ex octaua huius) angulum* C G D *angulo* C G E, *æquum esse. Cùm enim* C G *recta super rectam consistens* A B, *angulos* C G D C G E, *vtrobique æquos fecerit, recti sunt bini illi anguli, &c. per* 10. *diffinitionem huius. Datæ igitur rectæ* A B, *à signo* G *in ea dato rectam lineam* C G *ad angulos rectos excitauimus.*

Propositio duodecima. *Problema* 7.

Super datam rectam lineam infioitam à dato signo quod in ea non est perpendicularem rectam lineam ducere.



Sit data recta linea infinita A B, *signum verò extra eam sit* G, *Sumatur item contingens aliud signum, vltra lineam* A B *ad partes oppositas ipsi* G *sitque* D, *Centro verò* G *interuallo* G D, *circulus fiat* E D I, *per 3 postulatum, Quem secabit recta* A B, *cùm sit inter* G *&* D *posita, seccet in signis* I *&* E, *cõiunganturque* G I, G E, *Seccetur verò et bifariam ducta* G T: *Quoniam triangulorum* G I T *&* G E T *duo latera* G T T I *duobus* G T T E *sunt æqualia, per constructionem: & basis* G I *basi* G E, *per* 15. *diffinitionem. Angulus itaque* G T I *angulo* G T E *(æquis lateribus contento) æquus erit, per octauam huius. Recta igitur* G T *super rectam* A B *vtrobique æquales angulos* G T E, G T I *efficiens, rectos efficiet, per* 10 *diffinitionem. Super datam igitur rectam infinitam* A B *à signo* G *quod in ea non est perpendicularem deduximus.*

Propositio decimatertia.

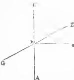
Cùm tecta linea super rectam coosistens angulosfecerit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



Esto recta A B *super rectam* D G *angulos efficiens. Dico eos rectos esse, aut duobus rectis æquos. Quod si recti sint anguli* A B G A B D *[illegible]itum consequimur, Sin minus fuerint recti, Ad rectam* D G *& signum in ea* B *ad rectos excitetur* E B *per* 11 *huius, Quoniam recti sunt* E B D E B G *anguli, Angulum autem* A B G *excedit rectus* E B G, *angulo* E B A. *Qui quidem excessus* E B A *recto* E B D *iunctus, reliquum duorum rectorum* E B G *&* E B D *complet. Bini igitur* A B G *&* A B D *simul sumpti anguli duobus rectis æquales erunt. Cùm recta igitur* A B *super rectam* D G *consistens angulos fecerit aut duos rectos, aut duobus rectis, &c.*

Propositio decimaquarta.

Si ad aliquam rectam lineam atque ad eius signum duæ rectæ lioeę vtrobique ductæ angulos duobus rectis æquales io plano & ad easdem partes feceriot, in rectum sibiipsis rectæ lioeæ erunt.



...quam rectam A B *& eius signum* B, *binæ rectæ lineæ* ... D *vtrobique ducantur. Efficiant autem ad rectam* A B *...dem eius partes angulos* A B G A B D *Vel* C B G C B D *duo... rectis æquos, Dico rectas* B G B D *in rectum sibi ipsis esse. Si ...cum* E D *non sit in rectum ipsius* B G, *sit ipsi* B G *in rectum alia ...quapiã* B E, *Quoniam anguli* A B G A B D *duobus æquipollent rectis (per hypothesim) ablato angulo* D B E *reliqui* A B G A B E *duobus rectis minores erunt. Sequetur igitur rectam* A B *super rectam* G B E *consistentem, angulos duobus rectis minores efficere, quod est absurdum, ex 13 huius. Non igitur cadit alia in rectum ipsi* B G *quam recta* B D. *Si igitur ad aliquam rectam lineam, &c.*

MONITVM.

Huius propositionis aliquas mutauimus particulas, scilicet ad easdem partes, vt percipiamus angulos qui duobus rectis æquari debent, fieri ex binis ductis ad easdem partes datæ A B, *non autem ex duabus ad totam* A B *productam. Quare duas adinuicem cum data diximus, in eodem autem plano, ob solidorum à planis futuras differentias, &c.*

Propositio decimaquinta.

Si duę rectæ lineæ sese secuerint, angulos qui circa verticem sunt oppositi, æquos adinuicem efficient.



Sint duæ rectæ A B D G *sese secantes in* E, *Dico angulos qui ad* E *sunt ex opposito, scilicet* A E D B E G *vel* A E G B E D *æquos esse adinuicem. Cùm enim* A E D A E G *duobus rectis sint æquales, per 13 huius, similiter per eandem* A E G G E B *duobus rectis, communis auferatur* A E G. *Reliquis* A E D B E G *æquales erunt, per 3 comm. sentent. Similiter patebit reliquos* A E G B E D *æquales esse, cùm sint oppositi. Si itaque duæ rectæ lineæ sese secuerint, angulos qui circa verticem sunt oppositi, æquos adinuicem efficient.*

MONITVM.

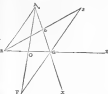
Huic addidimus particulam (oppositi) vt exprimamus qui ad verticem æquales reperirentur anguli, quod non expreßit Theon.

Corrollarium.

Hinc sequitur binas rectas sese secãtes angulos quatuor rectis æquos ad verticem efficere. *Cùm sit ad vtrasque partes recta super rectam consistens per 13 huius, & proinde quaslibet rectas in plano ad signum idem concurrentes, quatuor rectis æquos efficere. Nam binæ earum productæ ad verticem, reliquarum quodlibet inclinationem concludent.*

Propositio decimasexta.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus vtroque interiore & opposito maior est.



Trianguli A B G, *producatur latus* B G *in* D *Dico angulum exteriorem* A G D, *maiorem esse quolibet interiore opposito, scilicet ipso,* G A B, *vel* G B A. *Seccetur bifariam latus* A G *in* E, *ducatur* B E, *cui producta in* Z *æqualis fiat,* E Z, *coniuncta* Z G, *quoniam triangulorum* Z G E *&* B A E *duo latera* Z E, E G, *duobus* B E E A *æquantur (per constructionem) & æquos comprehendunt angulos* Z E G, B E A *ad verticem, (per præcedentem.) Reliqui igitur anguli* E G Z, E A B *(per quartam huius) æquales erunt, & bases, & triangulum triangulo. Maior igitur erit totus* A G D *exterior, ipso* G A B *interiore, (cum idem* A G D *sit maior ipso* A G Z, *reliquo*

Z G D

Z G D. Simili patebit extenso latere A G I *secto* B G *in* O, *ductaq́;* A O P *&* P G, *reliquum angulum* G B A *minorem esse angulo* A G D, *hoc est* B G I *opposito, Haud secus fiet producto quouis trianguli latere. Omnis itaque triãguli uno latere producto &c.*

Propositio decimaseptima.

Omnis trianguli duo anguli, duobus rectis sunt minores omnifariam sumpti.



Exponatur triangulum A B G *cuius latus unum* B G *producatur in* D, *fitq́;* B G D. *Dico binos trianguli angulos* A B G *&* A G B *duobus rectis minores esse. Cum enim recta* A G *super rectum* B D *consistat, efficit angulos duobus rectis æquos* A G B *&* A G D, *per* 13 *huius. Atqui per precedentem* A G D *maior est angulo* A B G. *Duo igitur* A G B, A B G *minores erunt duobus rectis (cùm sint minores ipsis* A G B, A G D *binis rectis æqualibus. Similiter ostendentur reliqui bini, producto eo qui circa eos latere. Omnis igitur trianguli &c.*

Propositio decimaoctaua.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



Trianguli A B G *maius latus sit* A G D. *Dico angulum quem subtendit* A G *esse maiorem trianguli angulum. Ab ipsa* A G *seccetur recta* A B *æqualis* A D. *Angulus itaq;* A D B *reliquo* A B D *(per* 5 *huius) erit æqualis, cùm sint ad basim. Sed angulus* A D B *exterior interiore* D G B *maior est, per* 16 *huius. Multò igitur maior erit angulus* A B G *eodem* D G B, *cum sit continens* A B D *angulum reliquo* A D B *æqualem. Similiter si ponatur ipsi* G B *æqualis* G E *ostendemus angulos* G B E, G E B *ad basim æquales, & exteriorem* G E B *interiore* E A B *maiorem, & proinde totum* G B A, *multò maiorem ipso* B A G. *Maior igitur erit angulus* A B G *quem maius latus* A G *subtendit. Omnis igitur trianguli, &c.*

Propositio decimanona.

Omnis trianguli sub maiori angulo maius latus subtenditur.



Trianguli A B G *maior angulus sit qui ad* B: *Dico maius latus esse* A G *subtendens angulum* B. *Nam si aliud quoddam trianguli latus scilicet* A B *esset maius, angulus* G *esset maior (per præcedentem.) Similiter si* B G *esset maius, angulus* A *esset maior, (contra hypothesim) quæ supponit angulum* B *maiorẽ. Non igitur erit aliud latus maius latere* A G *subtendente maiorem angulum, nec æquale, quoniam essent æquales anguli ad basim (per quintam huius) contra positum supponens alterum maiorem. Maius itaque erit* A G. *Omnis igitur trianguli sub maiori angulo maius latus subtenditur.*

Propositio vigesima.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocumque sumpta.



Esto triangulum A B C. *Dico duo eius qualibet latera reliquo esse maiora. Extendatur aliquod eius latus* B A *in* D, *sitq́; aqualis* A D *ipsi* A C *coniuncta* D C, *quoniam* A D C A C D *anguli (per 5 primi) sunt aquales, maior erit totus* D C B *angulo* A C D. *Trianguli igitur* B D C *maius erit latus* B D *subtendens maiorem angulum* D C B *latere* B C *subtendente angulū* C D B. *Sed latus* B D *binis* B A, A C *aquum fuit, posita est enim* A D *ipsi* A C *aqualis. Bina igitur* B A, A C *reliquo* B C *sunt maiora, similiter patebūt reliqua. Omnis igitur trianguli duo latera &c.*

MONITVM.

Potuit breuius hanc demonstrare Campanus per diffinitionem recta linea, cùm omnis linea recta à signo ad signum sit breuissima, duo latera reliquo sequitur esse maiora. sed quia hac descriptio potius quàm diffinitio fuerit, ab ea demonstrando abstinuimus, eo quòd eius non meminerimus.

Propositio vigesimaprima.

Si trianguli à limitibus vnius lateris binę rectæ introrsum constituantur ad signum, quæ coniunguntur, reliquis trianguli binis lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.



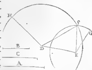
Trianguli A B G *à limitibus* B *&* G *binæ lineæ* B D G D *ad signum* D *introrsum constituantur, & extendatur* B D *in* E. *Dico coniunctas* B D, G D *minores esse rectis* B A, A G *& maiorem angulum continere. Erunt (per præcedentem)* B A, A E *maiores ipsa* B E: *cōmunis apponatur* G E. *Erūt* B A, A E, E G *maiores ipsis* B E, E G. *Sed (per eandem)* D E E G *sunt maiores ipsa* D G, *communis addatur* D B, *erunt* G E, E D B *maiores ipsis* G D, D B, *Multo igitur* B A, A E, E G *sunt maiores ipsis* B D, D G. *Præterea angulus* D E G *maior est interiore & opposito* B A E. *Similiter* B D G *ipso* D E C, *per 16 huius, Multo igitur maior erit* B D G *(quem constituunt introrsum coniunctæ) angulo* B A G *trianguli* A B G. *Si igitur trianguli à limitibus vnius lateris binæ recta, &c.*

MONITVM.

Diximus præter Theonem rectas introrsum constitutas, ad signum constitui: nam si vsque ad trianguli educerentur latera, verè maiorem angulum quo quomodo efficerent, sed quandoque maiores essent, contra propositum, nos ideo non tantum introrsum, sed & ad signum eas constitui petimus.

Propositio vigesimasecunda. *Problema 8*

Ex tribus rectis quæ sunt tribus datis rectis æquales, & quarum duæ quælibet reliqua sunt maiores, triangulum constituere.



Proponantur tres recta linea A B C, *alicui illarum scilicet* C *aqualis ponatur* D E. *Ad signum* E *vero ipsi* B *aqualis ponatur* E G, *ad signum verò* D *reliqua* A *aqualis sit* D H, *centro autem* D *interuallo* D H, *circulus fiat* H F. *Centro verò* E *interuallo quidem* E G, *circulus describatur* F G, *& coniungantur* D F, E F: *Dico triangulum esse* D F E *ex tribus rectis ipsis* A, B, C *aquis constitutum. Cum enim aqualis sit* D H, *recta* A, *eidem* A *erit aqualis* D F, *cùm sint* D H, D F *qua ex cētro, similiter quia* E G *ipsi* E F *est aqualis (per 15 diffinitionem) & eidem* E G *aqualis fuit* B, *recta* E F *aqualis erit ipsi* B. *Reliqua verò* D E, *reliquæ* C *posita fuit aqualis. Ex tribus igitur* E D, D F, F E *tribus datis* A, B, C, *aqualibus, triangulum constituimus* E D F.

Monitum.

MONITVM.

Quoniam propositum absolutè problema postremo restringit, professiones incertas imitans, non autem disciplinas. Nos perficiendo problemati conditionem prætulimus anteponendam, qua statuta, proponatur problema, vt ex tribus rectis quarum duæ quæuis reliqua sunt maiores triangulum constituere. Non autem vbi ex tribus rectis triangulum constituendum esse diximus absolutè, posthac exceptionem siue restrictionem apponamus, prorsus indignum mathesi.

Propositio vigesimatertia. *Problema 9.*

Ad datam rectam lineam, & ad eius signum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data recta linea A B, *angulus verò datus cui æqualis dandus est, sit* E G D, *Coniungatur* E D, *ipsi verò* G D *æqualis ponatur* A I, *per 3 huius. Ex tribus autem rectis tribus datis* G D G E E D *æqualibus, scilicet* A I A Z Z I *(per præceden.) fiat triangulum* A I Z. *Cùm autem triangula* G E D A Z I *habeant duo latera duobus, & basim* E D *basi* Z I *æqualia, Et (per 8 primi) reliquos angulos* I A Z *ipsi* D G E *æquos habebunt. Ad datam itaque rectam* A B *dato angulo* E G D *ad signum* A *æqualis angulus* Z A I *constitutus est.*

Propositio vigesimaquarta.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis comprehensum, & basim basi maiorem habebunt.

Sint duo triãgula A B G, D E Z *duo latera duobus lateribus æqualia habentia, scilicet* A B *ipsi* D E *&* A G *ipsi* D Z, *angulum verò* B A G *angulo* E D Z *maiorẽ. Dico basim* B G *basi* E Z *maiorẽ esse. Quoniã* B A G *angulus maior est* E D Z *angulo, Ad signum* D *per præceden. constituatur angulus* E D I, *æqualis angulo* B A G *dato. Et ipsi* A G *æqualis sit* D I, *coniuncta* E I I Z, *Cùm autem* B A G E D I *anguli sint æquales, & æquis lateribus contenti, bases* B G *&* E I *(per 4 huius) æquales erunt. Præterea quoniam æqualis est* D Z *ipsi* D I, *qui ad basim anguli* D Z I, D I Z *(per 5 primi) sunt æquales. Maior autem est angulus* E Z I *ipso* D Z I, *totum scilicet sua parte, Maior igitur erit sibi æqualis* D I Z, *Multò itaque maior erit* E Z I *angulo* E I Z *minore. Maius igitur erit (per 19 huius) latus* E I *trianguli* E Z I, *latere* E Z. *Sed* E I *ipsi* G B *est æqualis. Ipsa igitur* G B *subtendens maiorem angulum, reliqua* E Z *subtendente minorem maior erit. Si itaque duo triangula duo latera duobus lateribus alterum, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

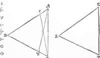
Si duo triangula duo latera duobus lateribus alterum alteri æqualia habuerint, basim verò basi maiorem, angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo maiorem habebunt.

Sint duo triãgula A B G, D E Z *duo latera duobus æqualia habentia, & basim* B G *basi* E Z *maiorem: Dico quod angulum* B A G *angulo* E D Z *maiorem habebunt. Quod si æquales esset* B A G *&* E D Z *anguli æquis lateribus comprehensi, bases (per 4 huius) æquales essent, contra hypothesim, quod fieri non potest: Si vero* B A G *angulus minor credatur angulo* E D Z *Basis* B G *basi* E Z *minor erit (per præ-*

cedentem) quod similiter posito obuiaret. Non est igitur B A G *angulus ipsi* E D Z *[illegible] minor ipso. Ergo maior necessario erit. Si itaque duo triangula, &c.*

Propositio vigesimasexta.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis alterum alteri æquales habuerint, & vnum latus vni lateri æquale, aut quæ simul æquis adiacent angulis, aut quæ simul ęquos subtendunt angulos, reliqua quoque latera reliquis lateribus alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



Sint triangula A B G D E Z *duos angulos duobus æquales habentia, scilicet* A B G A G B *ipsis* D E Z D Z E *& vnum latus vni æquale. Sint primo ea, quæ æquis adiacent angulis, scilicet* B G *ipsi* E Z *latera æqualia. Dico reliqua* B A *ipsi* E D *&* A G *ipsi* D Z *necnon* B A G *angulum ipsi* E D Z *æqualia esse. Quòd si hac hypothesi* A B *&* D E *non sint æquales, sit* A B *maior, & ipsi* E D *æqualis ponatur (per 3 primi)* B I. *Quoniam duo latera* B I B G *duobus* E D E Z *sunt æqualia, & æquos angulos* I B G D E Z *continent, Triangulorum* B I G *&* E D Z *reliqua latera & anguli æqualia (per 4 primi) erunt: angulus igitur* I G B *angulo* D Z E *æquus erit, sed ipsi* D Z E *æqualis positus est* A G B *ipsi igitur* A G B *æquus erit angulus* I G B, *pars scilicet toti. quod est absurdum. Non est itaque maior aliqua ipsarum* A B D E *æquales itaque erunt, simili deductione patebit æquales esse* A G *&* D Z. *Secundò verò supponamus latera* A B *&* D E *æquos angulos* A G B, *&* D Z B *subtendentia æqualia esse. Duo reliqua latera lateribus & angulos angulis æqualia esse, quod si non sint, sit* B G *latus maius ipso* E Z, *ipsi verò* E Z, *æqualis ponatur* B T, *quoniam* B T B A *rectis* E Z E D, *& angulus* B *angulo* E *æquantur, per eandem 4 huius, triangulorum* B A T E D Z *latera & anguli æqualia erunt. Est igitur* B T A *angulus, ipsi* E Z D *æqualis cui* B G A *æquus positus est sequetur itaque* A T B *exteriorem ipsi* A G B *interiori opposito æquum esse, contra 16 huius, quòd est impossibile. Nō est igitur aliqua ipsarum* B G E Z *maior altera, æquales igitur sunt rectæ* B G *&* E Z *adinuicē. Sed quia æquales similiter ostensæ sunt* A B *&* D E *& anguli* A B G D E Z *æquales. Igitur (per 4 primi) bases* A G D Z *& reliqui anguli reliquis æquales erūt. Si itaque duo triangula duos angulos duobus angulis, &c.*

MONITVM.

Quoniam dicit triangula æqualia esse quæ duos angulos duobus æquales habent. Si modo vnum latus lateri æquale habeant, aut quod æquis adiacet angulis, aut quod sub vno æqualium angulorum subtēdetur. Quodquidem analogum est, nam si in altero triangulorum latus adiaceat, in reliquo verò subtēdat vnum æqualium angulorum, falsum erit æqua esse triangula quare diximus æqualia latera simul adiacere, aut simul opponi æqualibus angulis. Hæc enim animaduersio 10. decimitertij demonstrandæ proderit.

Propositio vigesimaseptima.

Si in binas rectas incidēs recta linea in plano angulos alternatim æquos adinuicem fecerit, parallelæ erunt sibiipsis rectæ lineæ.



In binas rectas A B G D *incidat recta* E Z *efficiens angulos alternos, scilicet* A E Z, E Z D, *æquales: dico rectas* A B *&* G D *esse parallelas. Si autem opponatur eas non esse parallelas, concurrent cùm sint in eodem plano, cōcurrant in* I, *triangulum erit* E I Z, *cuius exterior angulus* A E Z *interiori opposito* E Z D *æquus esset cōtra 16 huius, quod fieri non posset, non igitur concurrunt, parallelæ itaque sunt, per 15 diffinitionem huius. Similiter ostendetur per exteriores, & oppositos, vt ostensum*

est

est per [illegible] & E Z D in[illegible]s oppositos. Nam ipsi E Z D æquus est exterior a[illegible] 5 huius) nec non ipsi A I Z. S[illegible] itaque in binas rectas incidens.

MONITVM.

In plano huic addid[illegible]mus, eò quòd licet seruentur reliquæ hypoteses scilicet angulos ab incidente alternos æquales ess[illegible], non tamen extra idem planum parallelæ fieri possent, vt videbamus diffinitione 35 huius.

Propositio vigesima octaua.

Si in binas rectas lineas recta incidens linea in plano, exteriorē angulum interiori & opposito ad easdem partes ęqualē fecerit, aut interiores ad easdem partes duobus rectis æquales, parallelæ erunt adinuicem ipsę rectæ lineæ.



Incidat recta E Z in binas rectas A B, G D, efficiens exteriorem angulum E I B interiori opposito I T D æqualem. Dico A B G D parallelas esse, Quoniam (per hypothesim) angulo E I B æquus est I T D angulus & eidē E I B æquus est A I T qui ad verticē, per 15 huius, Bini itaq; A I T & I T D æquales erūt, per 1 com. sent. qui quidem sunt alterni, Ipsæ igitur A B G D (per præfatam) erunt parallelæ. Ad secundum, Si interiores ad easdē partes B I T, I T D duobus rectis ponantur æquales, Recta Z I in rectam A B cadens, angulos A I T, B I T, duobus rectis æquales efficit, per 13 huius, sed B I T cū I T D duobus rectis æquos per hypothesim similiter efficit. Cōmuni itaque B I T ablato, reliqui A I T I T D (alterni) erunt æquales, per 3 comm. sentent. Parallelæ igitur (per præcedentem) erunt A B G D rectæ. Si itaque in binas rectas lineas recta incidens, &c.

Propositio vigesimanona.

In parallelas rectas recta incidens linea, angulos alternatim sibiipsis æquales, & exteriorem interiori opposito, & ad easdē partes æqualem, ac interiores ad easdem partes duobus rectis ęquales efficit.



In parallelas A B G D incidat recta E Z, quas secet in I T. Dico E Z efficere angulos alternos A I T I T D æquales. Si enim non credantur, sit aliquis eorum minor, scilicet I T D, quoniam itaque super rectam A B consistens Z I duobus rectis æquos efficit angulos A I T T I B. Additur autem ipsi T I B alius I T D minor ipso A I T. Bini igitur T I B I T D duobus rectis minores efficiūt angulos, Sequetur itaq; rectas A B, G D ad eas partes concurrere in quibus bini illi anguli T I B, I T D, interiores consistunt, per 11 comm. sententiam non igitur essent parallelæ, contra hypothesim, quod esset absurdum. Æquales itaque sunt A I T I T D anguli: Dico insuper exteriorem E I B interiori opposito ad easdem partes. Ipsi I T D æqualem esse, cùm E I B æquus sit ipsi A I T, qui ad verticem, & eidem A I T ostensus sit æqualis I T D, sequetur E I B æquari ipsi I T D, per 1. commu. sentent: Dico præterea interiores ad easdē partes duobus rectis æquales efficere, scilicet ipsos B I T I T D. Cùm enim rectæ Z I super A B consistēs, angulos A I T, B I T (per 13 huius) binis rectis æquos efficiat. Æquus autē ipsi A I T ostensus fuerit I T D, sequetur I T D & B I T æquales binis rectis angulos producere. Duobus itaque rectis æquales erūt B I T, I T D interiores ad easdem partes. In parallelas igitur rectas recta incidens linea, &c.

Propositio trigesima.

Quę in plano eidem rectę lineę sunt parallelę, & adinuicem sunt parallelę, aut in rectum positę.

Sint rectæ A B *&* G D *in plano eidem* E Z *parallelæ, non autem in rectum sitæ. Dico* A B *&* G D *esse parallelas, incidat in eas recta* I T K, *erit* A I T *angulus angulo* I T Z *alterno æqualis, per præcedentem. Sed idem* I T Z *exterior, ipsi* T K D *interiori opposito ad easdem partes, est similiter æqualis, per eãdem. Igitur* A I T *&* T K D *(eidem* I T Z *æquales) adinuicem erunt æquales, per 1. comm sententiam, qui quidem* A I T *&* T K D *sunt alterni. Parallelæ igitur erunt ipsæ* A B G D, *per 27 huius. Quæ itaque eidem rectæ lineæ parallelæ nec inrectum, positæ.*

Ad secundum autem, sint eidem A B *parallelæ binæ* C D E D *non autem adinuicem. Dico quod* C D E D *sunt in rectum positæ, quia non sunt parallelæ, cõcurrent igitur ipsæ, sit in* D. *A signo autem* D *contingens recta ducatur secans* A B, *sit ea* D G, *ipsa efficit angulos* A G D *&* G D C *duobus rectis æquales, per præcedentem, &* A G D *ipsi* G D E *alterno, per eandem. Anguli igitur* G D C *&* G D E *duobus rectis sunt æquales. Si itaque ad aliquam rectam* G D, *duæ* C D E D *angulos duobus rectis æquos efficiant, ipsæ (per 14 huius) in directum erunt. Quæ igitur eidem sunt parallelæ, & adinuicem sunt parallelæ, aut in rectum positæ.*

MONITVM.

Cùm omnis theorematum textura contineat binas partes, hypotesim scilicet & consequentiam, Et verè hypothesis ea sit natura, vt hac vnica sit causa sufficiens ad eum effectum producẽdum, qui consequentia dicitur, animaduertendum duximus huius theorematis demonstrationem nõ esse vere syllogismum, quem vocat Aristoteles epistemonicon, hoc est scientificum. Nam ex huius hypothesi, qua Theon supponit binas rectas eidem parallelas, non necessarium sequitur sibiipsis parallelas esse. Possunt etenim binæ eidem parallelæ esse, & tamen concurrere, & ideo nõ erunt parallelæ, vt exemplo. Eidem A *rectæ erunt binæ* B *&* C *parallelæ, tamen productæ concurrent, si idem possideant planum non igitur sibiipsis parallelæ erunt. Si autem rectas* B C *eandem lineam dicere velimus, fallimur, cùm sit sectum continuum. Præterea hypothesis ponit binas eidem parallelas esse, nihilque aliud optat, tum demum vt inuicem parallelas statuas sibiipsis, nec adhuc sciens si productæ cõcurrent. Executionem etenim debet præcedere propositio, sola namque executio concursum earum an sit, docet non igitur aliter quam exequendo, an rectæ* B C *concurrant an non, percipiemus, hypothesis itaque conclusionem generãs, ea integritate debet ornari, vt cuncta quæ conclusionis necessitati noxia obsistunt, ea prudẽtia detrahantur, quæ sola hypothesis positio, conclusionem theorematis necessariam exhibeat. Idem diximus optari planum, vt generalis fiat huius figuræ demonstratio. Nam ablata plani hypothesi, recta* K I *tres rectas propositas nõ necessariò seccat, quinimo rectam* E Z, *forsan extra idem planum in sublimi omitteret. Quare geometria parallelis in plano suppositis, binas ac disiunctas adhibet conclusiones, vt in genere proposita demonstret. Quod si simplicem velit nec disiunctam adhibere conclusionem, tum ab hypothesi idem planũ reiicit, vt diuino auxilio 9. vndecimi docebit, quo supposito simpliciter nec disiunctim parallelas fore concludet. Alias infinita rectæ supponi debuerant recta parallela vt constaret theorema.*

Propositio trigesimaprima. *Problema 10.*

Datę rectę lineę infinitę, per datum signum quod in ea non est, parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum signum A, *data verò linea infinita* G B, *In qua sumatur contingens signum* D, *coniuncta* A D, *Ad rectam autem* A D, *signúmque eius* A, *angulo* A D B *æqualis constituatur in eodem plano* D A Z, *per 23 primi, producta* Z A *in* E. *Quoniam in binas rectas* G B Z E *recta* A D *incidens, angulos* A D B D A Z *alternos æquales efficit. Parallelæ erunt rectæ* G B Z E, *per 27 huius. Data itaque recta linea infinita, per datum signum quod, &c.*

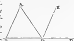
Monit.

MONITVM.

Hi ius integritatem conseruantes, à Theonis vocibus paululum digredi cogimur. Inquit enim ille, per datum signum datæ rectæ parallelam rectam lineam ducere. Quid tum si in eadem proposita detur signum, aut equidem extra propositam sibi in rectum collocetur, per ea signa parallela duci minimè potest. Quare ne in rectum apponatur extra illam signum, infinitam diximus. vt autem reliqua parallela dari valeat, datum extra eam signum proposuimus.

Propositio trigesimasecunda.

Omnis trianguli vno latere producto exterior angulus, binis interioribus & ex opposito est ęqualis. Et trianguli tres interiores anguli, binis rectis sunt ęquales.

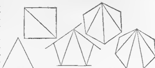


Exponatur A B G *triangulum cuius vnum latus* B G *producatur in* D: *Dico exteriorem angulum* A G D *æquum esse binis interioribus* A *&* B *oppositis, Per signum* G *rectæ* B A *parallela fiat* G E, *ex præfata, in parallelas autem* A B E G *incidens* B D, *angulum* G E D *interiori & opposito* A B G *æqualem efficit, per 29 huius. Rursus in easdem,* A B E G *incidens recta* A G, *angulum* A G E *alterno* G A B *æqualem efficit, per eandem. Totus itaque exterior* A G D, *binis* A B G G A B *est æqualis, interioribus & ex opposito. Ad secundum autem: Dico tres cuiusuis trianguli interiores angulos duobus rectis æquari. Cùm enim recta* A G *super rectam* B D *consistens angulos* A G D *&* A G B *duobus rectis æquos efficiat, per 13 huius, Sed* A G D *ostensus est binis qui ad* A *&* B *interioribus æqualis esse. Reliquus itaque* A G B *interior (sibiipsi æquus) tres interiores trianguli angulos, binis* A G B A G D *æquales esse concludet, & proinde binis rectis (ex prima comm. senten.) æquos. Omnis itaque trianguli vno latere producto exterior, &c.*

Corollarium primum.

Si triangulorum bini vnius anguli, binis alterius æquales fuerint, reliquus reliquo æqualis erit. *Nam ex secunda huius parte, tres quorumuis triangulorum anguli, tribus æquales existunt, nempè vtrique duobus rectis. Ablatis itaque binis æqualibus, reliqui (per primam senten.) æquales erunt.*

Corollarium secundum.



Ex hac fœliciter elicere possumus cuiuslibet poligoni angulos tot binis rectis æquiualere, quot triangula poligonum suscipit, angulos in poligoni angulis constituentia. *Vt autem demonstremus quot poligonis incidant triãgula, Dicemus angulorum Poligoni numerum, semper binario triangulorum numerum superare. Nam cuiuslibet propositi poligoni ab vno quouis angulorum ad singulos oppositos ductis rectis, hæc describuntur triangula. Quia verò duo proximi remanent anguli non oppositi, nulla intra figuram ad illos linea duci potest, vt his patet exemplis. Quoniam in trigono nullus est oppositus angulus, nulla potest duci recta ab angulo in angulum, quæ ipsum in bina aut plura seccet triangula, in triangulum cadens, in quadrangulo verò, vna ducitur ad oppositum angulum, quæ tantum in bina ipsum secat triangula. Pentagonum vero in tr a, Exagonum in quatuor, Exptagonum in quinque, & sic infinite, numero angulorum, numerum triangulorum comprehensorum binario semper excedente. Quod autem plura vel pauciora poligonis conuenire non possint triangula, hac lege præscriptis, patet. Cùm quodlibet horum triangulorum, angulis poligonorum duorum rectorum*

angulorũ quantitatem conferat, sequetur quinque triangula contulisse eptagono decem angulos rectos, quatuor vero exagono octo angulos rectos, tria autem pentagono sex rectos, duo insuper quadrilatero quatuor rectos, trilatero vero unicum duos rectos, per huius demonstrata. Quod si plura describerentur, in ipsis poligonis triangula, eorum anguli pluribus æquipollerent rectis, sed & paucioribus, eadem itaque quantitas seipsa maior vel minor esset, quod esset absurdum. Non igitur plura vel pauciora ipsis conuenient triangula, angulos in poligonorum angulis habentia. Hæc in irregularium figurarum ipsis docere volumus, vt certior pateat regularium methodus. Cæterùm cùm ostenderimus angulorum poligoni numerum, semper binario numerum triangulorum excessisse, manifestum erit duplum angulorum poligoni numerum, excedere duplum triangulorum numerum (hoc est, angulorum rectorum à triangulis collatorum, qui semper ipsis triangulis duplus est) duplo binarij, hoc est quaternario, vt latius quandoque demonstrabit vndecima septimi, si quidem istud demonstratione egeat. Quare sequetur angulos exteriores cuiuslibet poligoni, quatuor rectis æquales esse, vt pateat in pentagoni figura. Cum in qualibet figura angulus interior cùm exteriore, duobus rectis æquipolleant, ex 13 huius. Sequetur interiores & exteriores simul sumptos, totidem rectis æquiualere, quotus est duplus angulorum poligoni numerus, nam quilibet duos rectos proferet. Sed duplus numerus angulorum poligoni numerum angulorum rectorum intrinsecorum quaternario excedit. Reliqui igitur exteriores quatuor rectis æquales erunt in quouis poligono.

Propositio trigesimatertia.

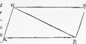
Æquas & parallelas ad easdem partes rectę lineę coniungentes, & ipsę ęquales & parallelę sunt.



Sint æquales & parallelæ rectæ lineæ A E G D, *coniungant autem eas ad easdem partes* A G, *ad alias verò easdem* E D, *coniuncta* G E. *Dico* A G E D *æquales esse, & parallelas, quoniã in parallelas* A E G D *incidit* G E, *angulos* A E G E G D *æquales efficit, per 29 huius. Triangula igitur* A E G, D G E, *vnum angulum* A E G. *Cui* D G E *æqualem, & duo latera* A E E G, *duobus* D G G E *æqualia habentia, efficient per 4 primi, bases* A G E D *æquales. Et reliquos angulos* A G E & D E G *æquales. In binas itaque rectas* A G, E D, *recta* G E *incidens, angulos* A G E & D E G *alternos æquales efficiens, parallelas esse rectas* A G E D *indicat, per 27 huius. Parallelæ itaque & æquales erunt* A G & E D *æquas parallelas* A E G D *coniungentes. Aequas igitur & parallelas ad easdem, &c.*

Propositio trigesimaquarta.

Parallelogrammorum locorum latera, quæ ex opposito & anguli, æqualia sunt adinuicem, & dimetiens ea bifariam secat.



Sit parallelogrammum A B G D, *cuius latera opposita sint* A B G D & A G B D. *Dico* A B, & G D *æqualia esse, similiter &* A G *ipsi* B D, *& insuper angulos oppositos æquos esse, ac dimetientem* G B *illud secare bifariam. Quoniam parallelæ sunt per 36 diffinit. huius* A B & G D, *necnon* A G & B D, *in eas cadens recta* G B, *angulos* A B G, & D G B *æquos efficit, insuper* A G B, & D B G *alternos, per 29 huius, Et proinde totum* A B D *toti* D G A *angulum. Triangula igitur* A B G & D G B *duos angulos* A B G A G B *duobus* D G B D B G *æquos, & latus* G B *commune habentia per 26 huius sunt æqualia, & reliquos angulos* G A B G D B, *ac reliqua latera* G D *ipsi* A B & A G *lateri* B D *habent æqualia. Parallelogrammi igitur* A B G D *loci latera quæ ex opposito,* A G *lateri* B D, & A B *ipsi* G D, *& anguli* A *angulo* D, & A B D *ipsi* D G A, *sunt æqualia, dimetiensq́;* B G *parallelogrammum seccat bifariam, in* A B G & D G B *æqualia triangula.*

Corollarium.

Recta parallelogrammum quouismodo secans bifariam, & eius dimetientem bifariam secabit.

Si enim fieri possit rectam parallelogrammum secantem bifariam, dimetientem bifariam non secare. Esto recta G C secans bifariam parallelogrammum A B E D, dimetientem verò eius D E inæqualiter in I. Sit autem I E maior portione I D, & rectæ I D æqualis ponatur I O, perque O signũ, ipsis A D B E parallela ducatur O F, per 31 huius. Triangulorũ itaque F O I C D I bini anguli, binis sunt æquales, scilicet I O F & I D C, per 29 primi, & F I O ipsi C I D, per 15 eiusdem, vnũq; latus I D vni I O æquale. æqualia igitur erunt triangula per 26 huius, maius itaque erit totum E I G ipso D I C triangulo. Cùm autem dimidium parallelogrammi supponatur esse trapesium G B D C, Dimidium verò eiusdem est triangulum E B D, per hanc, vt patuit. Ab æqualibus itaque G B D C & E B D, commune auferatur trapesium G B D I, sequetur reliquum D I C reliquo E I G æquum esse, sed minus ostensum, quod fieri non potest. Recta igitur secans bifariam parallelogrammum, dimetientem eius inæqualiter non secabit. Quare æqualiter secabit.

MONITVM.

Hoc ideo contulimus corollarium, vt quandoque nutu diuinæ clementiæ demonstrandis solidis feras compendium.

Propositio trigesimaquinta.

Parallelogramma in eadem basi & in eisdem parallelis existentia, adinuicem sunt æqualia.

Sint super eadem basi B G & in eisdem parallelis A Z B G, parallelogramma A B D G & E B Z G: Dico ea A B D G & E B Z G parallelogramma esse æqualia. Cùm parallelogramma sint æquales erunt singulæ A D & E Z rectæ ipsi B G quæ ex opposito, per præcedentem, & igitur adinuicem. Communis eis addatur D E, æquales erunt A E & D Z. Sed A B ipsi D G, & E B rectæ G Z (opposita) æquantur, per eandem. Angulus verò E A B angulo Z D G æquus est, cùm in parallelas A B D G cadat Z A, per 29 huius. Triãgula igitur, A B E & D G Z (per 4 huius) sunt æqualia: Cõmuni verò ablato D I E, reliquum A D I B trapesium, reliquo Z E I G trapesio æquum erit, per 3 comm. senten. Eisdem trapesiis autem commune addatur B I G triangulum, totum A B D G parallelogrammum toti E B Z G æquum erit, Parallelogramma itaque in eadem basi & in eisdem parallelis, &c.

MONITVM.

Cum hac & deinceps optabit Euclides triangula & parallelogramma in eisdem esse parallelis, non in eisdem ipso actu intelligemus: sed in parallelis æquali à se spatio diuulsis, quas easdem iure dicere possumus, eò quod Geometria quantitatem, non tãtùm situm aspectet. Nos etenim situm liberè disponimus (quod licet) ad demonstrandorum facilitatem.

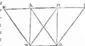
Propositio trigesimasexta.

Parallelogramma in æqualibus basibus & in eisdem parallelis existentia adinuicem sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus B G, Z I, & eisdem parallelis A T, B I, parallelogramma A B D G, & E Z I T: Dico ea esse æqualia, coniugantur B E & G T rectæ. Cùm autem æquales & parallelæ sint B G, & E T, rectæ eas coniungentes B E & G T, æquales & parallelæ erunt, per 33. huius. Parallelogrammum igitur (per 36 diffinitionem huius) erit B E T G. Quia verò B E T G est super eadem basi & in eisdem parallelis cum parallelogrammo A B D G, ea (per præcedentem) sunt æqualia. Similiter æquum ostendetur B E T G ipsi E Z I T: & proinde eidem B E T G æqualia, adinuicem æqualia erunt, scilicet A B D G ipsi E Z I T. Parallelogramma itaque in æqualibus basibus & in eisdem parallelis existentia, &c.

Propositio trigesima septima.

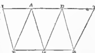
Triangula in eadem basi & in eisdem parallelis constituta, adinuicem sunt æqualia.



...nt triangula A L G *&* D E G*, in eadem basi* E G *& eisdem parallelis* A D, B G*. Dico* A E G *&* D E G *triangula esse æqualia. Per signũ* G *rectæ* E D*, parallela ducatur* G Z*, per* E *vero ipsi* A G *parallela fiat* E B*, concurrentes cum recta* A D *producta in signis* Z *&* E*. Parallelogramma erunt* E G *&* B Z*, per 36 diffinitionem huius, quæ (per 35 huius) sunt æqualia. Sed parallelogrammi* E G *dimidium est* A E G *triangulum. Ipsius vero* E Z *dimidium est* D E G*, per 34 huius sunt enim* A E, D G *dimetientes. Triangula itaque* A E G *&* D E G *æqualia sunt adinuicem, per 7. comm. sententiam. Triangula igitur in eadem basi & in eisdem.*

Propositio trigesimaoctaua.

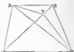
Triangula in æqualibus basibus & in eisdem parallelis constituta, adinuicem sunt æqualia.



Sint triangula A B G, D G Z*, in æqualibus basibus* B G, G Z*, & in eisdem parallelis* B Z, A D*. Dico ea esse æqualia. Per signum* Z *recta* G D *parallela fiat* Z T*. ipsi vero* A G *parallela sit* I B*, producta* A D *in* T *& in* I*. Parallelogramma erunt* G T, G I *& æqualia per 36 huius. Et cùm eorum demetientes sint* D Z *&* A B*, parallelogrammorum æqualium, dimidia erunt triangula* A B G, D G Z*, per 34 huius, quæ (per 7 commu sententiam) sunt æqualia. Triangula itaque in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta.*

Propositio trigesimanona.

Triangula æqualia, in eadem basi ad easdem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.



Proponantur triangula A G D, B G D *æqualia, super eadem basi* G D *in plano constituta, ad easdem partes* A B*: Dico parallelas esse* A B *&* G D*, quod si* A B *non sit ipsi* G D *parallela, sit alia quædã* A E *per signum* A *recta* G D *parallela, coniunctis* E D, E G*. Cùm autem triangula* A G D *&* E G D *sint in eadem basi & parallelis, ea erunt per 37 huius æqualia. Æquale igitur est* E G D*, ipsi* A G D*. Sed eidem* A G D *æquum fuit* B G D*, igitur* E G D *totum ipsi* E G D *parti erit æquale, quod fieri nequit. Similiter si* E G D *sit ipso* B G D*, maius ostendetur, per signum igitur* A *ipsi* G D *alia quàm* A B *parallela non ducitur. Quare parallelæ sunt* A B, G D*. Triangula igitur in eodem plano, &c.*

Corrollarium.



Idem sequitur in parallelogrammis; *Nã si super* A B *recta basi fuerint parallelogrãma æqualia* A B C D *&* A B G E*, necesse est ea esse in eisdem parallelis. Si autem non sed extra, vel intus, vnum eorum consitur, ipsi* A B C D *æquum sit* B I *intus constitutum. Idem igitur* B I *æquum eidem* A D*, æquale erit reliquo* A B G E*. Cui quidem æquum est* A B C D*, per 35 huius, & primam communem sentẽtiam. Pars scilicet toti, quod est absurdum Non igitur cadit extra vel intus. In parallelas igitur cadunt æqualia parallelogramma super eadem basi.*

Corollarium secundum.

Infert ab hac Campanus, Linea secans bifariam duo trianguli latera, reliquo est parallela. *Cùm autem trianguli* A B C*, latera* A B, B C *secta sint bifariam, æqualia erunt* A E D *&* D E B*, similiter*

&

& C D E eādē D E B, per 38 huius, igitur adinuicē erunt æqualia A E D & C D E (per 1 com. sententiam) sed ea super eadē basi D E constituuntur. In eisdem igitur sunt parallelis, D E & A C. Recta igitur D E secans bifariam, A B B C duo latera, reliquo A C est parallela.

Propositio quadragesima.

Triangula æqualia in æqualibus basibus ad easdem partes constitura, in eisdem sunt parallelis.

Proponantur super æqualibus basibus B G G E, triangula A B G & D G E æqualia, ad easdem partes in plano constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis A D, B E. Si verò non credatur A D esse parallela rectæ B E, sit per signum A alia quædam A Z, ipsi B D parallela, coniuncta Z E Triangula itaque A B G & Z G E erunt æqualia (per 38 huius) sed eidem A G B ponitur æquum D G B triangulum Igitur Z G E & D G E erūt adinuicem æqualia, pars scilicet toti, quod fieri non potest. Non igitur per signum A ipsi B E alia parallela erit quam A D. Triangula itaque æqualia in æqualibus basibus ad easdem partes constituta, &c.

Propositio quadragesimaprima.

Si parallelogrammum & triangulum eandem basim habuerint, & in eisdem fuerint parallelis, trianguli parallelogrammum duplum erit.

Parallelogrammum A B D G & triangulum A E B eandem habeant basim A B, & in eisdem sint parallelis A B, E D: Dico parallelogrammum A B D G duplum esse trianguli A E B, ducatur A D dimetiens parallelogrammi Quæ quidem bifariam secat ipsum, per 34 huius. Duplum itaque erit A B G D trianguli A B D. Sed A D B ipsi A E B (super eadem basi) æquum est, per 37 huius, parallelogrammum igitur A B G D, trianguli A E D duplum est. Si itaque parallelogrammum & triangulum eandem, &c Idem ostendetur super æquis basibus, nam super alia basi æquali rectæ A B constitutum parallelogrammum, ipsi A B G D æquum erit (per 36 huius) & ideo trianguli A E B duplum.

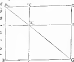
Propositio quadragesimasecunda. *Problema* II.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

Esto datum triangulum A B G datus verò angulus C D H, oportet iam in dato angulo C D H, æquale parallelogrāmum ipsi A B G cōstituere. Seccetur B G bifariam in E ducta A E, ad rectam D H signumq́; eius D, angulo E B A æqualis angulus ponatur H D I. Rectæ verò B E æqualis sit D H, ipsi autē B A æquetur D I, iuncta I H, æqualia erunt A B E & I D H triangula, per 4 primi. Per signum H rectæ D C parallela sit H K, per signum verò I ipsi H D parallela fiat I C, secans H K in K, parallelogrammum erit C D K H, per 36 diffinit. huius. Et duplum trianguli H D I, per præcedentem cui æquum fuit A E B. Duplus igitur erit C D K H ipsius A E B, cuius duplum est A B G, per 38 huius ipsa itaque A B G & C D K H sunt æqualia, per 6 com sententiam. Dato igitur triangulo æquale parallelogrammum &c.

Propositio quadragesimatertia.

Omnis parallelogrammi loci eorum quæ circa dimetientem sunt parallelogrammorum supplementa, sibi inuicem sunt æqualia.



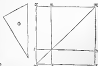
Sit parallelogrammum A B G D, *cuius dimetiens sit* A G. *Circa dimetientem verò existant* E T I Z *parallelogramma, eorum verò supplementa (reliquum totius* B D *restituentia) sint* B K, K D: *Dico ea esse æqualia, quoniam dimetient* A G *secat bifariam parallelogramma* B D *&* I Z, *æqualia erunt* A E K, A T K, *adinuicem, &* K I G *ipsi* K Z G, *necnon* A B G *ipsi* A D G, *per 34 primi. Si igitur ab æqualibus* A B G *&* A D G, *æqualia tollantur*, A E K, K I G, *ipsis* A T K, K Z G, *reliqua* B K, K D *(per 3 communem sententiam) æqualia erunt. Omnis igitur parallelogrammi loci, &c.*

MONITVM.

Idem sequetur licet quæ circa dimetientem communem angulum non habeāt toti: nam ab æqualibus æqualia ablata semper æqualia relinquunt, quapropter communem angulum optari non diximus.

Propositio quadragesimaquarta. *Problema 12.*

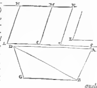
Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum constituere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit data recta linea A B, *datum verò triangulum* G, *datus autem angulus* D, *oportet ad rectam* A B *parallelogrammum cōstituere, æquiangulum ipsi* D, *æquale verò ipsi* G. *Producatur* A B *recta in* E. *Ad datam rectam* A B *& signū eius* B, *æqualis angulus ipsi* D *dato ponatur (per vigesimam tertiam huius)* E B L. *Dato autem triangulo* G, *æquale parallelogrammum ponatur in dato angulo* E B I: *sitque* E Z I B, *per 42 huius, perficiaturque parallelogrammum* A I, *sitque* A I T B, *coniuncta diametro* T B, *quæ producatur in* K, *in quem concurrat extensa* Z E K *ipsi verò* Z K *parallela sit* T L, *rectæ autem* Z T, *parallela sit* K L, *producta* I B *in* M. *Quoniam parallelæ sunt* Z E K I B M *&* T A L *rectæ, & parallelæ item sunt* T I Z A B E *&* L M K *dimetiens verò* T B K, *parallelogramma erunt (per 36. diffinitionem)* A I, L Z *&* M E, *& circa eundem dimetientem* T K *(per constructionem) erunt* A I *&* E M. *Eorū itaque supplementa* Z B, B L *erunt adinuicem æqualia, per præcedentem: Sed ipsi* Z B *æquum est ostensum* G *triangulū. Parallelogrammum igitur* A B M L *(eidem* Z B *æquum) triangulo* G *æquum erit per* 1. *communem sententiam. Quia verò angulus* A B M, *angulo* E B I *ad verticem æquus est, per* 15. *huius eidem porro* E B I *æquus est datus* D *angulus. Ipsi igitur* D *dato, æquus erit* A B M *angulus. Ad datam itaque rectam* A B, *dato triangulo* G, *æquale parallelogrammum* A B M L *constituimus, dato angulo* D *æquiangulum, in angulo scilicet* A B M.

Propositio 45. *Problema.13*

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum construere, dato angulo rectilineo æquiangulum.



Sit rectilineum quoduis A B G D, *cuius subtendat angulum* B A D *recta* B D, *& sic reliquos (quotcunque fuerint) angulos, rectilineū in triangula resoluentes, scilicet* A B D, B D G. *Data verò recta, sit* L H, *& datus angulus esto* E, *oportet ad rectam* L H, *parallelogrammum construere, æquale rectilineo* A B G D: *æquiangulum verò ipsi* E. *Ad datam rectam* H L, *signumq́ eius* L, *æqualis ipsi* E *angulus ponatur* H L F, *per 23. huius. Dato quidem triangulo* A B D *ad rectam* H L, *angulumq́* H L F, *ipsi* E *dato æquiangulum, æquale parallelogrammum constituatur* H L C M, *per præcedentem. ad rectam verò* M C, *angulum autem* M C F, *æ-*

quale

quale ipsi B D G *triangulo parallelogrammũ constituatur similiter in* C D K, *per eandẽ, quoniã enim binæ* H M M K *eidem* L F *sunt parallelæ, & concurrunt in* M, *tota igitur* H K *in rectũ ponitur, per 30 huius, & per eandem parallelæ erunt* H L *&* K I, *eidem* M C *parallelæ. Parallelogrammum igitur* L K *æquum erit binis* A B D *&* B D G, *& proinde rectilineo* A B G D, *constitutum autẽ est in angulo* H L F, *dato* E *æquiangulum. Ad datam igitur rectam* H L, *dato rectilineo* A B G D, *æquale parallelogrammum* L H K I *constrinximus dato angulo* E *æquiangulum, nempe in angulo* H L F.

MONITVM.

Antecedenti theoremati & huic apposuimus figuras describi in angulo, non dato, sed ipsi dato æquiangulo. Cùm enim cogimur ad datam rectam illas applicare, perspicuum est non semper lineam datam, ad datum esse angulum, quare sufficit in 44 dixisse, ad datam lineam, & dato angulo æquiangulum parallelogrammum, triangulo æquum describendum, vt postmodum eius auxilio, per hãc cuius rectilineo æquum parallelogrammum describere possimus, præstat etenim illud describi ad datam rectam quam ad datum angulum, cùm eidem ad datam rectam posito, angulus dato æquiangulus facile coaptetur, vt geometriæ plus amplietur quàm restringatur facultas. Id præcauẽtes esse necessarium ad aliquas sexti demonstrationes, quibus non in dato angulo, sed ipsi æquiangulum sit parallelogrammum.

Propositio quadragesimasexta. *Problema* 14.

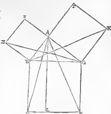
Ex data recta linea, quadratum describere.



Data recta sit A B, *cui ad rectos excitetur ad signum* A *recta* A D, *per 11 huius, ipsi* A B *æqualis ponatur* A G, *cui per signũ* B *parallela ducatur* B C, *ipsi verò* A B, *per signũ* G *fiat parallela* G C. *Cùm enim parallelæ sint quatuor rectæ, parallelogrmmum erit (per 36 diffinitionem) & æquilaterum, per 34 huius, cùm* B C, C G *sint ipsis* A B, A G *æqualibus, æquales. Quia verò angulus* A *rectus est, &* C *(per eandem) rectus erit. In parallelas autem* A G, B C *cadens* A B, *angulos* A *&* B *duobus rectis æquos (per 29 huius) efficit, rectus est quidem* A, *rectus igitur erit* B, *& rectus proinde* A G C, *ex opposito, per 34 huius. Atqui quadrilaterum, æquilaterum, & rectangulum est* A B C G, *quod igitur quadratum erit, per 30 diffinitionẽ. Ex data itaque recta* A B, *quadratum descripsimus* A B G C.

Propositio quadragesimaseptima.

In triangulis rectangulis, quadratum quod à latere rectum angulũ subtendente fit, æquum est quadratis quæ fiunt ex lateribus rectum angulum continentibus.



Esto triangulum A B G, *habens angulum* B A G *rectum. Dico quadratum quod fit ex latere* B G, *æquum esse eis quæ fiunt ex lateribus* A B A G *rectum angulum continentibus. Describantur quadrata (per præcedẽtem) ex* A B A G *&* B G, *scilicet* A B Z I A G K T *&* B G E D. *Rectis autem* B D, G E *per signum* A *parallela excitetur* A L, *per 31 huius, parallelogramma erunt* B L G L, *nectantur* A E, A D, B K, G Z. *Quoniam triãgulorum* A B D *&* Z B G *anguli* A B D *&* Z B G *sunt æquales, cùm constent recto & angulo* A B G *singuli, & æquis continentur lateribus, nempe eorundem quadratorum lateribus* A B, B D, *ipsis* Z B B G *æqualibus, æqualia erunt triangula* A B D *&* Z B G. *Cum autem in rectam* B A *binæ* G A, A I *duos rectos efficiunt, tota* I G *in rectum est, per 14 huius, similiter reliqua* B T. *Cùm insuper triangulũ* A B D *& parallelogrammũ* B L, *sint super eadem basi & eisdem parallelis* B D A L, *duplũ est* B L *ipsius* A B D

(per 41 huius) quia similiter triangulum Z B G *& quadratum* A Z *super eadem sunt basi* Z F, *& in eisdem parallelis* Z B I G, *duplum est (per eandem)* A Z *ipsius* Z B G. *Igitur* B L *parallelogrammum & ZD quadratum, æqualium triangulorum* A B D Z B G *duplicia, adinuicem erunt æqualia. Simili argumento ostendemus reliquum quadratum* A G K T, *rectangulo* G L *æquum esse. Bina igitur* A B Z I *&* A G K T *quadrata, totis* B G E D *erunt æqualia & proinde quadratum quod fit ex* B G *æquum est eis quæ fiunt ex* A B A G *lateribus. In triangulis itaque rectangulis quadratum quod à latere, &c.*

Propositio quadragesimaoctaua.

Si trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit binis quæ ex reliquis trianguli lateribus quadratis, angulus comprehensus sub reliquis trianguli duobus lateribus, rectus erit.



Sit A B G *triangulum, cuius latus* G B *efficiat quadratum æquale binis ex reliquis lateribus* A G A B *quadratis. Dico angulum sub ipsis* A G A B *comprehensum scilicet* B A G, *rectum esse. Ad rectam* G A *signúmque eius* A *perpendicularis excitetur* A D, *quæ sit æqualis ipsi* A B, *& coniungatur* D G. *Et quoniam* A D *&* A G *rectæ ipsis* B A *&* A G *sunt æquales, ex ipsis* A D *&* A G *quadrata, æqualia erunt eis quæ ex* B A A G *quadratis, Sed eis quæ ex* A D A G, *æquum est, per præcedentem, quod fit ex* G D, *cum sit rectus* D A G *angulus. Ergo eis quæ ex* B A A G, *æquum erit idem quod ex* D G, *Eis autem quæ ex* B A A G, *equum est per hypothesim quod ex* B G. *Quæ igitur ex* G D *&* B G *quadrata sunt æqualia, & proinde rectæ* B G G D *sunt æquales. Triangulorum itaque* A B G *&* A G D *duo latera* A D A G, *duobus* A B A G, *& basis* D G *basi* G B *sunt æqualia angulus igitur* B A G, *angulo* D A G *recto æquus erit, per 8 huius, & itaque rectus. Si igitur trianguli quod ab vno laterum quadratum, æquale fuerit, &c,*

MONITVM.

His duabus proximis propositionibus, innumerosa admodum conferrentur aquisita, si iam exposuisset Euclides quid sit ratio, siue proportio, qua namque arte super datam constituatur rectus angulus lineam, quidve sit lineæ potentia, quorum cum ad finem sexta ventum sit, aliqua ab his orta enarrabimus, interim his quæ ad futura demonstranda necessariò exhibentur contenti.

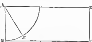
EVCLIDIS DEMONSTRATIOnum restitutarum Liber secundus.

Diffinitio prima.



OMNE parallelogrammum rectangulum, sub duabus rectum angulum comprehendentibus rectis lineis, dicitur contineri.

Exposuimus 36 diffinit. primi, quid sit parallelogrammum, Genus inquam quatuor quadrilatera complectens, scilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem. Cùm enim quadratum aut alterolongius complectimur, parallelogrammum dicimus rectangulum, eo quòd vnica sit tantum recti anguli quantitas. Cùm verò rhombos aut rhomboides intelligimus, ea tantùm parallelogramma in genere nuncupamus, Nam nec ea ambligonia, nec quidem exigonia dici possunt, cùm ex vtroque angulorum genere singula construantur, obtusis scilicet & acutis, quorũ infinita est quantitatis diuersitas, recti vero anguli vnica. Quare deffiniens hâc Euclides, sub quibus mensuris determinetur siue exprimatur parallelogrammum, illud exprimi dicit sub duabus rectis angulum rectum continentibus, eò quòd earum rectarum semper similis inclinatio (qua anguli quantitatem efficit) æquales metiatur areæ magnitudines. Quòd si binæ rectæ ad obliquum angulum (acutum scilicet aut obtusum) constituerentur, ille metiendis superficiei longitudini & latitudini non conuenirent. Superficies etenim cum per 5 diffinitionem primi exponitur, est, quæ longitudinem latitudinémque habet. Cùm autem ad longitudinem comparanda erit latitudo, earum binæ mensores rectæ lineæ, sese ad rectos seccant angulos, vt dicemus 4 diffinitione tertij de distantia à centro, & tertiam geometriæ dimensionem, illas vtrasque ad rectos angulos rursum secare, scilicet sublimitatem. Nam is rectus angulus vnica inclinatione linearum compositus, eandem pro sua lineæ longitudine exprimit latitudinis quantitatem, nihil sibi de alia dimentione sumens. Quòd quidem non efficit acutus aut obtusus, eò quòd vtriusque eorum infinitæ sint diuersitates inclinationis linearum. Parallelogrammum igitur dixit Euclides rectangulum sub duabus rectum angulum continentibus exprimi, vt altera earum longitudinem reliqua verò eius latitudinem nulla fallacia exprimat, vt doceamus hac figura.



Cùm A B A D *rectæ ad angulum rectum coeant, rectam* A D *longitudinem* A B *verò rectanguli* A B C D *latitudinem exprimet. Quòd si eidem* A B *æqualem rectam ad obliquum constituamus angulum* D A E, *ipsius parallelogrammi latitudinem non exprimemus. Ipsa namque* A E *per angulum acutum ipsi* A D *copulata, eidem infinitas latitudinis quantitates (ob acutorum angulorum infinitas differentias) attribuet, & proinde incertas. Vt igitur certam datæ longitudini attribuat latitudinem, eam per rectas angulum rectum constituentes proferre voluit Euclides. Si vero per motum intelligere velimus, Dicemus quantum efficiet motum signum* A *per lineam* A B *vsque ad* B, *tantùm efficere simul singulas rectæ* A D *partes, vsque ad rectam* B C, *& is motus describet parallelogrammum* A B C D, *& rectangulum, cùm motus fiat ad rectum angulum longitudinis. Si verò per obliquum moueatur angulum vt per* A E *signum* A, *is motus lineæ,* A D *rhombum aut rhomboidem similiter describet. Præterea recta* A E *angulum obliquum ad longitudinem* A D *efficiens, de vtraque confusa sibi sumit: nam plani longitudinem ab* A B A D D E *in* E *signo limitat, latitudinémque* A B A D *in* B C *per idem* E *signum breuiat, idque confusè, ac citra omnem discernendi speciem, ob angulorum obliquorum infinitas quantitates. Quare recta ad longitudinem* A B *angulos obliquos efficiens, iudicandi latitudinis penitus aliena reperitur, sed ideo soli rectæ angulum rectum constituenti ad longitudinem* A B *id congruit.*

Diffinitio 2.

Omnis parallelogrammi loci, eorum quæ circa dimentientem angulum communem efficiunt parallelográmorum, vnumquodque cum binis supplementis gnomon vocetur.



Gnomonem diffinit Euclides reliquum cuiusuis parallelogrammi ablato parallelogrammo, circa dimetientem, & ad angulum constituto, vt si tollatur parallelográmum E A *a toto* B D, *reliquum* E C *cum binis* E B, E D *supplementis dicetur gnomon similiter si tollatur* B C, *ab eodem* B D, *reliquum gnomon erit. Hæc enim diffinitio omnia comprehendit parallelogramma, scilicet quadratum, alterolongius, rhombum, & rhomboidem.*

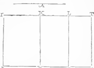
MONITVM.

Deerat huic diffinitioni, prout eam Campanus & Theon meminerunt, parallelogrammum quod circa demetiẽtem est, angulum communem cum toto efficere, vt necessario hac lege gnomonẽ fecisse dicatur, quod videbimus Dei beneficio, 26 propos libri sexti. Similiter vt circa demetientẽ circa esse dicatur, optari illum angulum cum toto habere communem, vt hoc exẽplo parallelogrammũ, scilicet G E, *circa dimetientem* C B *totius* A D, *parallelogrammi simile similitérque positum esse videmus, & tamen quia communem angulum toti nõ habet, reliquũ non efficit gnomonem. Vt itaque sanior sit huius sentẽtia, diximus præter Theonem & Campanum, auferendum parallelogrammum vt gnomonem relinquat, communem angulum cum toto efficere. Quia vero hæc parallelogrammi circa dimetientem ad angulum communẽ constitutio pluribus sexti & sequentiũ demonstrationibus inseruiet, vtile fuit hoc prælibare, vt cùm postmodum de constitutione parallelográmi circa dimetientẽ loquemur, angulũ cum toto communem efficere necessariò, tum similiter esse positum intelligemus.*



Propositio prima.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, quarũ altera in quodcunque segmenta seccetur, rectangulum comprehẽsum sub duabus, æquum est eis quæ ab insecta & quolibet alterius segmento rectangulis continentur.



Exponãtur duæ rectæ A *&* B G, *quarum* B G, *seccetur in* D *&* E. *Dico rectangulũ cõprehensum sub* A *latitudine, &* B G *longitudine, vel contrà, æquum esse rectãgulis simul sumptis, sub* A *&* B D, *sub* A *&* D E, *sub* A *&* E G. *Ad rectã perpendicularis excitetur* B I, *quæ æqualis ponatur ipsi* A, *rectæq́;* B G, *parallela sit* I T, *per 31 primi, Ipsi vero* I B *parallelæ sint* G T, D K, E L, *rectangulum erit* B T, *per 34 primi, rectus est enim angulus* I B D, *itaque & reliqui. Cùm enim parallelæ sint* I B, D K E L G T, *per constructionem, similiter &* B G, I T, *parallelogrammum erit (per 36 diffinitionem primi)* B K, *sub* B I, B D *contentum, & rectangulum Nam in parallelas* B I, D K, *cadens* B D, *angulos* I B D, B D K *binis rectis æquos efficit, per 29. primi. Rectus autem est* I B D, *& reliqui igitur oppositi recti (per 24 primi) fient. Quare rectangulum erit* D L *sub* D K, D E, *& rectangulum* E T *sub* E L, E T *comprehensa Atqui ipsi* A *æqualis est* B I, *cui æquales ponũtur* D K *&* E L, *per 34 primi. Tria igitur rectangula* B K, D L, *&* E T, *sub* A *recta & quolibet segmento* B D, D E, *&* E G *continẽtur. Quia verò efficiunt totum rectangulum* B T, *sequetur, quod sub duabus* A *&* B G *rectangulum, æquum esse eis simul sumptis, quæ fiunt* A B, A *insecta & quodlibet segmento, scilicet* B D, D E, E G. *Si itaque fuerint duæ rectæ, &c.*

Propositio secunda.

Si recta linea ſecetur vtcunque quę ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur rectangula, ęqualia ſunt ei quod ex tota fit quadrato.

Secetur recta A B, *vtcunque in* G *&* D. *Dico rectangula ſub tota* A B *& quolibet* A G, G D, *&* D B *ſegmentorum ſimul ſumpta, æqualia eſſe ei quod fit ex tota* A B *quadrato, ipſi* A B *perpẽdicularis & æqualis fiat* A Z, *perfecto* A B K Z *rectãgulo. Ipſis porrò* A Z, B K *parallelæ fiant per* G *&* D *ſigna (ex 31 primi) rectæ* G E, D C. *quadratum erit* A K *cum ſint æquales* A B *&* A Z. *Rectangula verò erunt* A E, G C, *&* D Z, *quæ ſub tota* A B *(hoc eſt* A Z*) & quotlibet ſegmentorũ* A G, G D, D B, *contenta ſcilicet* A G, E Z, G D, C E, *&* D Z E *quadratũ* A Z. *quod ſcilicet ex tota conſtituunt. Si itaque recta linea* A B *ſecetur vtcũque in* G *&* D, *quæ ſub tota* A B *(vel* A Z*) & quolibet ſegmentorũ* A G, G D, D B *comprehenduntur rectangula, æqualia ſunt ei, quod ex tota* A B *fit quadrato, ſcilicet ipſi* A B Z Z. *Huius breuior ex prima fiet demonſtratio: quia* A B, A Z *ſunt duæ rectæ, quarum altera* A B *vtcunque ſecatur. Et ideo rectangulum ſub binis* A B, A Z *(hoc eſt quadratum ex* A B*) æquum eſt eis, quæ à tota* A Z *inſecta, & quolibet ſegmentorum fiunt rectangulis* A E, G C, *&* D Z.

Propoſitio tertia.

Si recta linea ſecetur in ſigno, rectangulum ſub tota & altera ſegmentorum comprehenſum, ęquum eſt ei quod ſub ſegmentis comprehenditur rectangulo & ei quod ex prædicto ſegmento fit quadrato.

Proponatur recta linea A B *ſecta in ſigno* G: *Dico rectangulum ſub* A B A G *comprehenſum, æquũ eſſe rectangulo ſub* A G, G B *comprehenſo, vnà cum quadrato rectæ* A G, *Ex* A G *quadratũ deſcribatur (per 46 primi)* A G, D E, *& perficiatur rectangulum* G Z, *quoniam æqualis eſt* A E *ipſi* A G, *rectangulũ ſub* A B, A G *erit* A Z. *Nã recta eſt tota* E D Z, *per 30 primi: quia verò æqualis eſt* G D *ipſi* A G, *rectangulum* C Z *erit ſub ſegmẽtis* A G, G B. *quod vnà cum quadrato ex* A G, *hoc eſt,* A D, *efficit rectangulũ* A Z *quod ſub tota &* A G *priori ſegmento. Si itaque recta linea ſecetur in ſigno rectangulum ſub tota, &c.*

MONITVM.

Dixerat Theon rectam lineam ſecandam (vtcunque) quod tranſtulimus in has voces (in ſigno) ne rectam pluribus ſignis ſecare volentes aliqui huic demonſtrandæ impingerẽt. Quod idem in ſequente obſeruabimus.

Propoſitio quarta.

Si recta linea ſecetur in ſigno, quadratũ quod fit ex tota, ęquũ eſt quadratis quę fiũt ex ſegmẽtis, & ei quod bis ſub ſegmẽtis cõtinetur rectãgulo.

Recta A B *ſecetur in ſigno* G, *ex* A B *verò fiat quadratum (per 46 primi)* A B, E D. *Dico* A B, E D *æquum eſſe quadratis ex* A G *& ex* G B, *ſimulac rectangulo bis ſumpto ſub* A G, G B *ſegmentis. Ipſi* G B *æqualis ponatur* B K. *Per ſignum* G *ipſis* A D B E *parallela ducatur* G Z, *ipſis verò* A B D E *parallela ſit* T K, *per 31 primi, Quoniam parallellæ ſunt omnes oppoſitæ rectæ, parallelogrãma ſunt* G K, T Z, A I, I E, *per 36 diffinit. primi. Cùm autem angulum communem habeant ſingula cum quadrato* A B E D, *ipſa rectangula erunt, per primam diffinitionem huius. Cæterùm cùm æqualis ſit* B K *ipſi* G B, *&* A B *rectæ* B E, *reliqua* K E *ipſi* A G, *æqualis erit, per 2 communem ſententiam, eiſdémque æquales erunt* T I, I Z, T D, D Z, *oppoſita latera, per 34 primi.*

Quadratum igitur erit G K *ex recta* B Z, *quadratum item* T Z *ex recta* A G. *Quia vero rectis* G B *& B K æquales sunt* A I *&* Z E, *rectangula* A I I E *sub rectis* A G, G B *(hoc est* A G, G I *&* E K, K I*) contineri bis dicentur. Sed quadratum ex* A B *tota, hoc est* A B E D *æquũ est, quadratis* A G, G B, *hoc est* T Z *&* G K, *& rectangulo bis sub* A G, G B *hoc est* A I *&* I E *supplementis. Si itaque recta linea secetur in signo, quadratum, &c.*

Propositio quinta.

Si recta linea secetur in signo bifariam, & alio signo per inæqualia, rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis totius, vna cum quadrato eius, quæ inter sectiones est, æquum est ei quòd à dimidia fit quadrato.

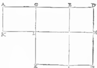
Proponatur recta linea A B, *secta bifariam in* G, *inæqualiter autem in* D. *Ex dimidia verò (per 46 primi) quadratum describatur,* B G E Z, *ipsi* B D *æqualis ponatur* B M, *perficiaturq́ rectangulũ* B M K A *parallelogrãmum, per signum* D *rectis* B Z G E *(per 31 primi) parallela fiat* D T I. *Dico rectangulum comprehensum sub* A D D B *cum quadrato* D G, *æquum esse quadrato* B E *quod à dimidia* B G, *cùm binæ* D B B G *binis* B M B Z *sint æquales, reliquæ* D G M Z *erunt æquales, quare & eis oppositæ* T L T I *æquales erunt, per 34 primi. Nam parallelogrãma sunt* B Y T E G T T Z, *per 36 diff. primi. Quadratũ igitur erit* L I *ex recta* D G, *quia insuper binæ* B Z B D *binis* B G B M *fuerunt æquales. Quadratũ erit* D M, *ac æqualia erũt rectangula* B L B I, *per 36 primi, ipsi verò* B L *æquum est* G K, *per eandem, æqualia itaq́ erunt* G K *&* B I, *commune addatur* D L. *Rectangulum* D K *æquum erit gnomoni* L B I, *ipsis rursus commune addatur* I L, *rectangulum* D K *cum quadrato* I L, *æquum erit eidem gnomoni & quadrato* I L, *hoc est toti quadrato ex* B G. *Sed* D K *est quod sub* A D D B, *inæqualibus sequentis, cùm* B T *sit quadratum. Sed* I L *est quadratum rectæ* D G *quæ inter sectiones est. Rectangulum itaque comprehensum sub* B D D A *inæqualibus segmentis, hoc est* D K, *vna cum quadrato rectæ* D G *quæ inter sectiones est, nempe* I L, *æquũ est quadrato* G Z *quod à media* B G. *Si igitur recta linea secetur in signo bifariam & alio signo per inæqualia &c.*

MONITVM.

Mutare cogimur aliquas demonstrãdi rationes, eò quòd Theon videatur supponere quæ ad 24 sexti expectant, scilicet rectam D T *æqualem esse rectæ* D B *ducta diametro, & per* T *parallela rectæ* A B, *vt probet* A T *æquum esse* B I *quod sub* A D D B. *Quot quidem sua constructio vix patitur, antequam libr. sexto circa dimetientem existentia similia toti concludantur, nisi per verbosas illas angulorum cõparationes tandem exprimeret. Insuper hanc rectã* A B *in signo, ac alio signo diximus secandã, in quoduis æquales aut inæquales partes indefinita, ne decidat demonstratio.*

Propositio sexta.

Si recta linea bifariam secetur, adiciatúrque ei alia recta in rectum, quod sub tota cum apposita & apposita comprehensum rectangulum, vna cum quadrato quod fit à dimidia, æquum est ei quod fit ex dimidia & apposita tanquam ex vna, descripto quadrato.



Sit recta A B *bifariam secta per* G, *adiciatur autem ei quæpiam alia* B D *in rectum: Dico quòd sub tota cum apposita* A B D *& apposita* B D *rectangulum, vnà cum quadrato ex dimidia* G B, *æquum esse quadrato quod fit ex dimidia* G B *& apposita* B D, *tanquam ex vnica* G D *descripto. Describatur (per 46 primi) ex* G D *quadratum* G E Z D, *ipsi vero* D B *appositæ æqualis ponatur* D M *Per signum verò* M *vtrisque* A D E Z *parallela ducatur* K M, *Per signum item* B *binis* G E D Z *parallelæ sint* B T I *&* A K *per 31 primi. Cum enim rectæ* B D *æqualis posita sit* D M,

quadratúmque sit G Z, *reliquæ* E G *reliquæ* M Z *æqualis erit, & proinde oppositæ* F L *eisdem ac* T L T I *æquales (per 34 primi) erunt. Quadrata igitur erunt* E M L I *per eandem, cum angulos* D & E *rectos habeant ex hyppothesi, Atque rectangula* T Z T G *sub eorumdem quadratorum lateribus comprehensa, æqualia erunt adinuicem. Sed ipsi* G T *æquale est (per 36 primi)* A L, *igitur reliquo* T Z *æquabitur idem* A L. *Commune addatur* G M, *tum erit æquale rectangulum* A M *gnomoni* G M M I. *Vtrisque, porro addatur commune quadratum ex* G E, *hoc est* L I *ex* L T, *ipsi* G E *æquali, factum, Rectangulum* A M *sub tota* A B *cum apposita* E D, *& apposita* E D, *hoc est* D M *comprehensum, vna cum quadrato* L I, *ex* G E, *æquum erit quadrato* G Z, *quod fit à dimidia* G E & E D *apposita, tanquam ex vna descripto. Si itaque recta linea bifariam seccetur, adiciatúrque ex alia recta, &c.*

Propositio septima.

Si recta linea seccetur in signo, quæ ex tota & quouis segmentorũ coniuncta fiunt quadrata, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub tota & dicto segmento, & ei quod à reliquo segmento fit quadrato.

Seccetur recta A B *in signo* G: *Dico quòd ex tota* A B & *quouis segmẽtorum* B G *simul sumptæ bina quadrata, æquari rectangulo bis sumpto sub* A B B G, & *ei quadrato quod fit ex reliquo* A G *segmento. Describatur ex* A B *quadratum* A B E D, *per 46 primi, ipsiq́ue* B G *æqualis ponatur* B Z, *per signum* G *binis* A D B E *parallela fiat* G C, *per signum vero* Z *vtrisque* A B D E *parallela sit* Z I F *patebit per præcedentia quadrata esse* G Z *quidem ex* B G, & F C *ex* A G. *Et insuper rectangulum* B F *contineri sub* A B B G, *hoc est* B Z *sibi æquali posita. similiter & rectangulum* B C, *quæ quidem cum quadrato* F C *quod scilicet fit à reliquo segmento* A G (*hoc est* F I) *sibi æquali, idem componunt quod quadratum* B D, *quod ex tota* A B, & *aliud* G Z *quòd ex vno segmentorum* G B. *Quæ igitur ex tota* A B *scilicet quadratum* B D, & *ex* B G *scilicet* G Z, *simul sumpta, æqualia sunt rectangulo sub* A B B G *bis sumpto, hoc est ipsis* B F B C & *ei* F C *quadrato, quod fit à reliquo segmento* A G. *Nam bina* B F B C *excedunt gnomonem* F G E, *quadrato* G Z. *Si igitur recta linea seccetur in signo, quæ ex tota & quouis segmentorum coniuncta quadrata, &c.*

Corollarium.

Duarum inæqualium linearum quadrata, excedunt rectangula bis sub ipsis contenta, quadrato excessus quo maior excedit minorem.

Nam si A B *sit maior,* B G *verò minor, patet quadrata ex* A B B G *æqualia esse rectangulo bis sub* A B B G *contento, & insuper quadrato ipsius* A G *excessus quo* A B *excedit minorem* B G.

Propositio octaua.

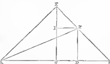
Si recta linea seccetur in signo, rectangulum comprehensum quater sub tota, & quouis segmentorum, cum eo quod ex reliquo segmento fit quadrato, æquum est ei quod fit ex tota, & priori segmento (tanquam ab vna descripta) quadrato.

Recta linea A B *seccetur in signo* G, *adiciatur autem ei in rectum æqualis cuiuis segmentorum, sitq́;* B E *æqualis ipsi* A G. *Dico rectangulum sub* A B A G *quater sumptum, cum quadrato reliqui segmenti* G B, *æquum esse quadrato quod fit ex* A E *composita, scilicet ex tota* A B & *priori segmento* A G *cui æquatur* B E. *Describatur ex tota* A E *quadratum (per 46 primi)* A C D E, *ipsi* A G *æquales ponantur* A F & C M, *reliqua igitur* F M *ipsi* G B *æqualis erit, per 3 commu. senten. Per signa* G & B *parallelæ ipsis* A C E D *ponantur (per 31 primi)* G R B S. *reliquis autem* A E C D *per signa* F & M *parallelæ sint* F I K L & M N O P. *Quoniam quadratum est* A D, *rectãgula erunt per 34 primi,* F B & F R. *Et cum* A G G B *ipsis* A F F M

... æquales, ea æqualia erunt æquis lateribus comprehensa, per 36 primi, sed F B *sub* A B A C *hoc est* F A *continetur, &* F R *sub eadem laterum quantitate. Similiter* R P *&* P E *eisdem* F E F R *ostendentur æqualia. Cum autẽ æquales sint* A B F K, *&* G B I K *æquales erũt, similiter & reliquæ* I N N O O K *eidem* B G *æquales erunt. Angulus autẽ* F I R *rectus est, Reliquus itaque* R I K *rectus erit, per* 13 *primi, similiter & reliqui quadranguli* I N O K, *quod igitur quadratum erit, & ex reliquo segmento* G B *productum. Quod itaque quater sub* A B A G *comprehensum, hoc est* A K B P P R R F, *cum quadrato reliqui segmenti* G B, *hoc est* I N O Z, *æquum est ei quod fit ex tota* A B, *& priori segmento* A G *vel* B E, *scilicet ex tota* A E *quadrato* A D. *Si igitur recta linea secetur in signo, &c.*

Propositio nona.

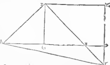
Si recta linea secetur bifariam, & per inæqualia, quæ ab inæqualibus segmentis totius fiunt quadrata, Dupla sunt eius quod à dimidia, & eius quod ab ea quæ inter sectiones est quadratorum.



Secetur bifariam recta A B *in* G, *& inæqualiter in* D: *Dico quadrata inæqualium* A D D B *dupla esse quadratorum dimidiæ* A G, *& eius quæ inter sectiones est, scilicet* G D, *ipsi* A B, *ad signum* G *perpẽdicularis excitetur* G E, *quæ quidem æqualis ponatur alteri rectarum* A G G B. *Coniunctis autem* A E, B E, *per signum* D *ipsi* G B *parallela fiat* D Z, *per* Z *verò rectæ* B G *parallela sit*, I Z, *per* 31 *primi, ducta* A Z, *Quoniam æquales sunt* G A G E *G B rectæ, qui ad bases anguli sunt æquales, per* 5 *primi, scilicet* G A E G E A G E B, *Cùm autem* A G E *rectus sit, reliqui* G E A, G A E *dimidij recti huius erunt, per secundam partem* 32. *primi. rectus igitur erit* A E B *angulus. Cum enim in parallelas* E G Z D *cadat* B E, *anguli* D Z B *&* I E Z *(per* 29. *primi) æquales erunt. Similiter &* E Z I *ipsi* Z B D, *cùm in parallelas* G B, I Z *cadat* B E. *Sed eidem* Z B D *æquus fuit* I E Z: *itaque bini* I Z E *&* I E Z *æquales erunt, similiter & reliqui* D Z B, D B Z. *Duo igitur latera trianguli* E I Z, *scilicet* I E, I Z *æqualia erunt: similiter* D Z, D B *trianguli* Z B D, *per* 6 *primi, æquales verò sunt* I Z *&* G D, *per* 34. *primi, cum parallelogrammum sit* I D, *per* 36 *diffinit. primi. Quoniam igitur æquales sunt* A G, G E, *quadratum rectæ* A E *duplum erit quadrati rectæ* A G, *per* 47 *primi. similiter quadratum* E Z, *duplum quadrati* I Z *siue rectæ* G D, *per eandem: sed quadratis* A E *&* E Z *æquum est (per eandem) quadratum rectæ* A Z, *cum sit rectus* A E Z *ostensus. Quadratum itaque* A Z *duplum est quadratorum* A G *&* G D: *quadrato autem* A Z *æqualia sunt quæ ex* A D *&* D Z, *vel* D B *sibi æquali, quadrata, per* 47 *primi, cùm æquus sit* Z D B *exterior interiori recto* E G B. *Ipsa igitur ex* A D, D B *inæqualibus segmentis, dupla sunt quadratorum ex* A G *dimidia &* G D *quæ inter sectiones est. Si itaque recta linea secetur bifariam & per inæqualia, &c.*

Propositio decima.

Si recta linea secetur bifariam, apponatur autem ei quæpiam recta in rectum: quod ex tota cum apposita & quod ex apposita simul sumpta quadrata, dupla sunt eius quod ex dimidia & eius quod ex composita ex dimidia & apposita tanquam vna, descriptorum quadratorum.



Secetur bifariam A B *recta in signo* G, *cui apponatur in rectum quæpiam* B D: *Dico quæ ex* A D *&* B D *quadrata dupla fore eis quæ ex* A G *&* G D *quadratis, excitetur ipsi* A B *perpendicularis* E G, *ad signum* G, *quæ æqualis ponatur rectæ* A G *vel* G B, *parallelæ ducantur scilicet* D Z *ipsi* G E, *&* E Z, *rectæ*, G D, *per* 31. *primi. Extendatur autem* Z D *in* I, *& æqualis sit* D I *ipsi* D B, *connnectis* A E, B I *&* A I *rectis: Quoniam parallelogrammi* G Z, *latus* Z D *ipsi* G E, *per* 34. *primi, est æquale:* G E *vero ipsi* G B. *Sed &* D I, *ipsi* D B, *tota igitur* Z I *toti* G D *æqualis erit: & proinde ipsi* E Z *ex opposito. Quod igitur ex* E I *quadratũ duplum erit quadrati* E Z *vel* G D, *per* 47

primi

primi. Nam angulus Z oppositus ... E B rectus est, per 32 primi. Similiter quod ex A E quadratũ duplum est (per 47 primi) quadrati ex A G. Cum autem angulus A E G sit recti dimidius, similiter & B I G, per secundam partem 32 primi, totus A E I rectus erit. Quia vero in parallelas G D E Z cadit I Z, angulus A D I interiori & opposito E Z D recto æquus erit, per 29 primi, & itaque rectus erit A D I. Quadratis igitur ex A E & E I æquum erit quadratum ex A I, per 47 primi. Sed cum dupla sint ex A E & E I quadratorum ex A G & G D ostensa duplum erit quod ex A I eorum quæ ex A G & G D quadratorum. Quadrato autem ex A I æqualia sunt quæ ex A D & D I (hoc est D B sibi æquali) quadrata, per eandem 47 primi. Quæ itaque ex A D tota cum apposita & D B apposita, simul sumpta quadrata dupla sunt eius quod ex A G dimidia, & ex G D dimidia & apposita tanquam vna descriptorum quadratorum. Si igitur recta linea seccetur bifariam, apponatur autem ei quæpiam recta in rectum, &c.

Propositio vndecima — *Problema I.*

Datam rectam lineam terminatam ita secare, vt quod sub tota & altero segmento comprehensum rectangulum, æquum sit ei quod fit ex reliquo segmento quadrato.

Sit data A B recta, ex qua (per 46 primi) fiat quadratum A B D G, cuius vnum latus A G bifariam seccetur in E, coniuncta E B, extendatur E A in Z, & ponatur æqualis ipsi E B recta E Z: ex A Z verò describatur quadratum A Z I T & producatur I T in K: Dico A B rectam ita sectam esse vt propositum fuit. Cum enim A G bifariam seccetur in E, ipsi autem A G quæpiã A Z in rectum apponitur, rectangulum sub G Z, Z A comprehensum vna cũ quadrato ex A E, æquum erit quadrato ex E Z, per 6 huius, hoc est quadrato ex E B sibi æquali. Sed quadratum ex E B eis quæ ex A B A E (per 47 primi) æquum est. Quod itaque sub G Z, Z A vnà cum quadrato ex A E, æquũ est quadrato ex A B & quadrato ex A E. Commune autem tollatur ex A E quadratum sequetur rectangulum Z K quadrato A D æquum esse. A quibus rursus commune auferatur rectangulum A K. Reliqua scilicet rectangulum B K sub B D tota & T B altero segmento, & quadratum A Z I T, quod fit ex A T reliquo segmento, æqualia erunt. Nam B D æqualis est ipsi A B toti. Datam itaque rectam ita secamus vt fuit postulatum.

Propositio duodecima.

In ambligoniis triangulis, quadratum quod fit à latere obtusum angulum subtendente, maius est eis quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus quadratis, rectangulo bis comprehenso sub vno eorum quæ sunt circa obtusum angulum, & sibi in rectum apposita linea, inter obtusum angulum & perpendicularem à reliquo opposito angulo sibi demissam.

Esto ambligonium triangulum A B G, habens angulum A obtusum, latus vero subtendens illum sit B G. Vnum autem eorum quæ sunt circa obtusum angulum, sit latus G A, in quod productum à signo B cadat perpendicularis B D, per 12 primi: Dico quadratum ex B G maius esse quadratis quæ fiunt ex G A A B, rectangulo bis cõprehenso sub G A A D, quoniam secta est G D in signo A, quadrata binarum G A A D cum rectangulo bis comprehenso sub ipsis G A A D, æquantur quadrato totius G D, per 4 huius. Sed quod ex B G æquum est ipsi ex G D quadrato, & ei quod ex D B, per 47 primi. Quod igitur ex B G æquũ erit tribus quadratis ex G A A D & D B, ac insuper rectangulo bis sumpto sub G A A D, atque A B quadratũ ex his omnibus tantũ sumit quadrata A D D B, quibus æquale est, per 47 primi, G A vero sui ipsius tantùm aufert quadratum. Sequetur itaque ex B G subtendente obtusum angulum quadratum excedere quadrata rectarum G A A B, angulum obtusum comprehendentium, eo quod bis sub vna earum G A quæ sunt circa obtusum angulum, & A D sibi in rectum apposita inter obtusum angulum G A B, &

perpendicularem D B *à reliquo oppoſito angulo* C B A *ſibi demiſſam. In ambligoniis igitur triangulis quadratum quod fit à latere obtuſum angulum &c.*

MONITVM.

Theorematis ordinem quodammodo variauimus, eò quòd Campanus & Theon obſcurius diſcentibus tradiderint.

Propoſitio decimatertia.

In exigoniis triangulis quod ex acutum angulū ſubtendente fit quadratum, minus eſt eis quę ex acutum angulum comprehendentibus lateribus fiunt quadratis, rectangulo bis ſumpto ſub vno eorum quæ ſunt circa acutum angulum, & eius parte inter acutum angulum & perpendicularem ab oppoſito angulo ſibi demiſſam ſumpta.

Sit oxigonium triangulum A B G, *cuius vnum acutorum angulorum ſubtendat* A B, *ſcilicet ipſum* G. *A ſigno autē* A *in oppoſitum latus* B G *(vnum quidem eorum quæ ſunt circa acutum angulum) demittatur perpendicularis* A D: *Dico quadratum lateris* A B *(angulum acutum* G *ſubtendentis) minus eſſe binis quadratis ex* A G G B, *rectangulo bis ſumpto ſub* B G G D, *quoniam comparandæ ſunt magnitudines quadratorum, ex* A B *ad quæ ex* A G & G B. *Diſcamus prius quadratum rectæ* A G *(per 47 primi) æquū eſſe quadratis quæ fiunt ex* A G, D G *his addamus quadratum ipſius* G B, *quod æquipollet (ſi quidem ei addamus quadratum* D G*) quadrato* B D, *& rectangulo bis ſumpto ſub* B G, G D, *per 7 huius. Binæ igitur* A G, G B *æquipollent (cum quadrato* D G*) quadratis* B D, A D, *&* D G, *& inſuper rectangulo bis ſub* B G, G D *ſumpto. Ab his etenim auferamus quadratum* D G, *ipſis commune additum). Sequetur quadrata ex* A G, G B, *æquari quadratis ex* A D, B D, *ac inſuper rectangulo bis ſumpto ſub* B G, G D. *Atqui quod ex* A B *æquū eſt (per 47 primi) quadratis ex* A D, B D, *ſequetur itaque quod ex* A B, *ſubtendente angulum acutū* G, *minus eſſe binis quadratis, quæ ex* A G, G B *acutum angulum* A G B *cōprehendentibus rectangulo bis ſumpto ſub vno eorum quæ circa acutum angulum, ſcilicet* B G. *& eius parte* G D *inter acutum angulum & perpendicularem ab oppoſito angulo* A *(ſcilicet* A D*) ſibi demiſſam ſumpta. In oxigoniis igitur triāgulis, quod ex acutum angulum ſubtendente latere quadratum minus eſt, &c.*

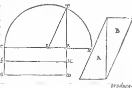
MONITVM.

Quoniam Theonis compendium potiuſquam demonſtret confundit hanc, cogimur aliam tradere non multo prolixiorem demonſtrationem eodem argumento ſuffultam.

Propoſitio decimaquarta. *Problema 2.*

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

Sit datum rectilineum A B, *cui æquum quadratum oporteat conſtituere. Conſtituantur binæ quæuis rectæ ad rectum angulum* C G D, *ad datam autem rectam* G D, *dato rectilineo* A B *æquale parallelogrammū conſtituamus, angulo recto æqui angulum, per 45 primi, ſitque* C G D E. *Extendatur autem* C E *in rectum, & ponatur* E Z *æqualis ipſi* E D. *Recta porro* C Z *biſariam ſeccetur in* I, *centro vero* I *interuallo* I C *vel* I Z *ſemicirculus ſit* C T Z *&*



produca-

producatur D E Z *usque* I *coniuncta* T I. *Quoniam enim recta* C Z *secta est bifariam in* I, *& per inæqualia in* E, *rectangulum comprehensum sub inæqualibus* C E *&* E Z, *cum quadrato* I E, *quæ inter sectiones est, æquum est ei quod a media* C I (*vel* I T *quæ ex centro*) *fit quadrato, per 5 huius. Sed ipsi ex* I T *quadrato æqualia sunt ex* T E *&* I E *quadrata, per 47 primi, cum sit rectus* T E I *angulus. Quod igitur sub* C E E Z *cum quadrato rectæ* I E, *æqualia erunt quadratis ex* T E *&* I E. *Commune auferatur quadratum ex* I E, *subest rectangulum sub* C E E Z *æquum esse quadrato ex* T E. *Cùm enim* E Z *æqualis sit ipsi* E D, *rectangulum sub binis* C E E Z *idem erit cum rectangulo* C D. *Rectangulo igitur* C D *æquale quadratum ex* T E *recta descriptum erit, & proinde dato rectilineo* A B *ipsi* C D *æquali posito. Dato itaque rectilineo* A B *æquale quadratum constituemus ex* T E *recta.*

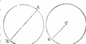
EVCLIDIS DEMONSTRATIOnum restitutarum Liber tertius.

Diffinitio 1.



AEQVALES circuli sunt quorum dimetientes, vel quæ ex eorum centris, sunt æquales.

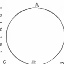
AEqualitatem circulorum A B & C D ideo ab æqualitate diametrorum vel semidiametrorum sumit, quòd circulus unica semidiametri reuolutione manente vno eius extremo, describatur. Quare si maior fuerit semidiameter, maior circulus describetur, si minor minor, si æqualis æqualis. Si itaque æquales sint, quæ ex centro, necessarium erit circulos esse æquales. Nam si maior esset quæ ex centro, & circulus maior esset reliquo. Eadem enim comparatio ex integris diametris potest sumi, non equidem potest dimidium augeri, sine duplicis augmento.



Diffinitio 2.

Recta linea circulum tangere dicitur, quę circulum in plano tangens & vtrinque producta, circulum non seccat.

Licet lineæ rectæ ad circuli circunferentiam plures possint incumbere inclinationum varietates, tamen eam solam lineæ inclinationem ad circunferentiam circulum tangere dicemus, quæ tangens & versus contactum producta, circulum non secat, vt circulum A B tanget recta C B, eò quòd ea producta in D, circulum tangit in B, non tamen secat. Hæc est cuilibet circunferentiæ vnica inclinatio lineæ rectæ: nam reliquæ omnes inclinationes lineæ C B, immoto signo B circulum secabunt.



Diffinitio 3.

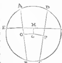
Circuli sese adinuicem in plano tangere dicuntur, qui tangentes sese inuicem non secant.

Idem in contactu circulorum mutuo quod de lineæ ad circulum contactu dicit, vt circulus A B circulum B D tangere dicetur, eò quòd in signo B tantum concurrant, in eodem existentes plano. Similiter B C ipsum B D tangere dicetur, eò quòd tangens non secat. Si enim sese secarent, fieret superficierum contactus, vel potius communitas, non tantum vnius signi. Quare circuli tactus solum vnicum commune admittit cum tangente signum, vt B.



Diffinitio 4.

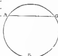
In circulo æquę, vel magis à centro rectæ lineæ distare dicuntur, cum à centro in eas perpendiculares æquales vel maiores fuerint.



Distantiam siue latitudinem metitur Euclides per longitudinem rectæ lineæ rectos efficientis angulos ad propositam, ut in circulo A B C D infinitæ possunt describi lineæ, quarum una æquè plus vel minus à centro distabit reliqua. Id tantùm intelligamus rectam distare magis, quæ maiorem, æque autem quæ æqualem, à centro suscipiet demissam perpendicularem, ut A B æquè a centro G distat ipsi D C, eò quòd à centro G in eas perpendiculares G O G P sint æquales, magis verò distat eadem A B reliqua E I, quiam A B, maior cadit à centro perpendicularis G O, quam in E I cadat G H. Similiter mensus est Euclides prima diffinitione secundi rectanguli latitudinem, per lineam quæ ad longitudinem efficit rectos angulos, ut ibi diximus. Quæ autem obliquum efficiunt angulum recta, huius mensura ob angulorum instabilitatem sunt incapaces.

Diffinitio 5.

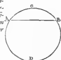
Sectio circuli est, figura sub recta linea & circuli circunferentiæ parte comprehensa.



Resumit hoc tertio Euclides sectionis circuli diffinitionem, 19 primi diffinitione expositam, ut facilius subsequantur proxima diffinitiones. Quid scilicet sit sectionis & in sectione angulus. Quia verò 19 primi eam exposuimus, nulla (præter hac) prolixitate vtemur.

Diffinitio 6.

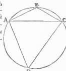
Sectionis autem angulus est, qui comprehenditur sub eadem recta linea, & circuli circunferentiæ parte.



Sectionis angulus dicitur, is quem efficit sectio sola, scilicet est ea inclinatio lineæ curuæ quam efficit cum recta circulum secante, vt C A curua ad A B rectam vel D B curuam in B A rectam, efficiunt angulum sectionis, hæc quidem maioris, illa verò minoris sectionis. Variatur autem hic angulus per sectionum variationem, vt maior sectio maiorem, minor verò minorem efficiat angulum.

Diffinitio 7.

In sectione angulus est, qui continetur sub duabus rectis à finibus rectæ secantis ad aliquod circunferentiæ signum concurrentibus.



Differentiam ponit inter angulum sectionis præfatum & hunc, quem in sectione esse dicimus, eò quòd hunc sectio suscipiat, à limitibus rectæ A C secantis, in quodus circunferentiæ A B C signum, à concurrentibus rectis A B & C B comprehensum. Similiter in maiori sectione reliquus A D C dicetur angulus, hi equidem anguli iuxta sectionum varietatem reciprocè variantur, vt maior sectio minorem, minor verò maiorem concipiat angulum.

Diffinitio octaua.

Cùm verò continentes angulum à centro rectæ, aliquam suscipiunt circunferentiam, in illa anguli magnitudo esse dicitur.

Tres angulorum species diffinit scilicet sectionis, & in sectione angulũ, in circunferentia constitutos, hunc vero in cẽtro circuli existẽtem, diffinit quo pacto anguli dicatur magnitudo, qua circũferentiã circuli vnicam recipit suæ quantitatis comitem, eam scilicet quã suscipiunt rectæ angulum in centro constituentes, vt angulus B A D tanto maior angulo B A C dicetur, quanto circunferentia B C D ab eo suscepta, maior erit reliqua B C A minori angulo B A C suscepta. In his etenim angulis angulorum differẽtia, differentiam susceptarum circunferentiarum sequuntur, quod secus est in proximè diffinitis, sectionis scilicet & in sectione, quæ quidem, licet sequantur sectionum excessum, non tamen excessus differentiam. Anguli itaque magnitudo ea erit quæ per circunferentiæ suscepta exprimetur magnitudinem, vt perfectè docebimus 33 sexti theoremate.

Diffinitio 9.

Sector autem circuli est, figura contenta sub duabus in centro rectis angulum constituentibus, & circunferentia ab eis sumpta.

Huius & præcedentis veram demonstrabit intelligentiam 33 sexti. Nam sector circuli nihil aliud est quàm figura siue pars ea circuli, quam suscipiunt rectæ in centro angulum constituentes, & ab eis circunferentia suscepta, vt trigonis A B C vel A B D. Qui quidem sector semper semicirculo minor exhibetur, alias si scilicet æqualis aut ipso maior esset, nulla fieret ad eas partes linearum A B D E inclinatio, nec proinde angulus vt A B E D C, comprehensus sub dimetiente A E & semicircunferentia A C D E, hic quoque sector sequetur circunferentiarum susceptarum differentias, quemadmodum & angulus, vt exponet eadem 33 sexti.

Diffinitio 10.

Similes sectiones circuli, sunt quæ angulos æquos suscipiunt, vel in quibus anguli inuicem sunt æquales.

Similes sectiones bifariam diffinit, prius quidem eas quæ angulos æquos suscipiunt, vt cùm anguli B A C & F I G æquales erunt, tunc sectiones B C E & F G K similes dicentur esse, siue B D C & F O G similes erunt. Secundo autem diffinit similes sectiones in quibus anguli erunt æquales. Diximus etenim 7 diffinitione, quis sit in sectione angulus, eius namque ad alterum æqualitas, sectionum similitudinem pronunciat, siue inter æquales vel inæquales circulos reperiatur, vt cùm in sectionibus F G K, B C E anguli F K G, B E C fuerint æquales, sectiones illæ similes erunt, similiter & reliquæ F G O & B C D cùm anguli F O G & B D C fuerint æquales, in quouis circunferentiæ signo existant.

Monitum ad diffinitiones.

Secunda diffinitione diximus lineæ ad circulum contactum in eodem fieri plano. Reliquis diffinitionibus aliqua transtulimus, maximè sexta, qua diximus angulum sectionis eadem recta quæ circulum secat, & eadem circunferentia parte quæ sectionem efficit, contineri, ne intelligatur sub recta & circuli circunferentiæ angulus contingentiæ vel alius quiuis ab hoc angulo. Et insuper octaua per quam Theon supponit angulum in circunferentia fieri, Campanus vero eundem in centro, quod maximam arguit incertitudinem huius intelligentiæ. Quare existimantes eam non fuisse Euclidis mentem, cum iam quæ ad angulos in circunferentiæ expectant 7 diffi. docuerit, in centro verò satis docebit 9 diffinit. Sed quia angulorum magnitudines quadam earum communi habitudine patefaceret, per circunferentiæ quantitatem deprompta, quæ vnica angulorum respectus siue quantitates lucidius & præcisè admodum explicat, hanc anguli magnitudinem à circunferentia contineri diximus, non angulum. Circunferentia etenim angulum in centro constitutum contine-

re

re non posset, sed anguli magnitudinem ea necessariò & sola. Eius namque augmentum vel decrementum, semper cum augmento anguli vel eiusdem decremento, idem esse reperitur, vt docebimus 33 sexti, fauente supremo artium moderatore. Quæ autem præter hæc mutauimus pauca sunt ob faciliorem circulorum intelligentiam.

Propositio prima. *Problema 1.*

Dati circuli centrum inuenire.

In dato circulo A G B E, *producatur cõtingens aliqua recta* A B, *quæ seccetur bifariam in* D, *per signum verò* D *perpendicularis excitetur* G E, *quæ bifariam secta in* Z: *Dico efficere* Z *centrum circuli* A G B E. *Quod si non sit, supponatur aliud signum* I *centrum esse coniunctis* I A, I D, I B, *rectæ* I A, I B *erunt æquales adinuicem, per* 15 *diffinitionem primi. Sed bases* A D, B D *sunt æquales, &* I D *communis. Triangula igitur* I A D, I D B *sunt æqualia, & æquiangula, per* 8 *primi. Æqualis igitur erit* I D B *angulus, angulo* I D A, *per eandem, rectus igitur erit vterque, per* 10 *diffinitionẽ primi. Atqui* I D B, *rectus minor* G D B *recto esset,* I D A *verò rectus maior* G D A *recto, contra decimam communem sententiam, quod est absurdum. Non itaque aliud potest supponi centrum ab ipso* Z. *Dati itaque circuli* A G, B E, *centrum* Z *inuenimus.*



Corollarium.

Si in circulo, recta aliquam rectam bifariam & ad angulos rectos secuerit, in secãte erit centrum circuli. *Cùm ostẽsum sit non posse esse alibi quàm in recta* G E, *bifariam & ad rectos secante ipsam* A B.

Propositio secunda.

Si in circuli circunferentia duo signa vtcunque sumãtur, ea coniungens recta intra circulum cadit.

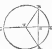
In circunferentia circuli A B G, *duo vtcũque signa* A B *suscipiantur quæ coniungat rectæ* A B: *Dico eam rectam intra circulum cadere. Circuli* A B G *(per præfatam) centrum sit* D, *coniunctis* D A, D B, *angulus verò* A D B *bifariam seccetur ducta* D E, *per* 9 *primi: quoniam enim bina* D A, D E, *binis* D B, D E, *& angulus* A D E *angulo* B D E, *sunt æquales, triangulorum* D A E *&* D E B *anguli* D E B, D E A *(æquis lateribus subtensi) æquales erunt, per* 4 *primi. Recti igitur erunt, per* 10 *diffinitionem primi, maior ideo erit* D E B *angulus angulo* D E C, *per* 17 *primi. Maius itaque erit latus* D B *latere* D E, *per* 19 *primi. Sed* D B *est ex centro, recta igitur* D E *minor ea quæ ex cẽtro, intra circulum cadit. Nam si extra caderet, esset maior. Si verò in circunferentia æqualis, per* 15 *diffinit. primi, & proinde recta* A E B *intus cadit. Si igitur in circuli circunferentia duo signa, &c.*



Propositio tertia.

Si in circulo recta per centrum extensa, rectam per centrum non extensam bifariam secuerit, ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam seccet, & bifariam secabit.

In circulo A B G D, *recta* G D *per centrum* E *extensa, rectam* B A *non per centrum extensam bifariam in* Z *seccet: Dico* G D *ad angulos rectos secare rectam* A B, *coniungãtur* E A, E B *rectæ. Cùm enim æquales sint rectæ* Z B, E Z *rectis* Z A E Z, *& quæ à cẽtro basis* B E *basi* A E, *angulus* E Z B *angulo* A Z E *æquus erit, per* 8 *primi. Rectus erit igitur vterque* G Z B *&* G Z A, *per* 10 *diffinitionem primi. Recta itaque* G D *reliquam* A B *ad rectos secat. Ad secundum autem, seccet eam ad rectos. Dico* G D *bifariam secare rectã* A B. *Nam trianguli* A B E *qui ad basim anguli,* E B A E A B *sunt (per 5 primi) æquales.*



Sed E Z A & E Z B sunt (per hypothesim) æquales. Reliquum igitur reliquo (per 26 primi) & latus A Z ipsi B Z triangulorum E B Z & E A Z æqualia erunt. Recta itaque G D rectam A B in Z secat bifariam, Si igitur in circulo recta per centrum extensa, rectam, &c.

Propositio quarta.

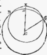
Si in circulo binæ rectæ non per centrum extẽsæ sese inuicem secuerint sese bifariam non secabunt.



In circulo A B G D binæ rectæ appositæ A G B D non per centrum extensæ sese inuicem seccent in E: Dico quod non secabunt sese bifariam. Suscipiatur (per primum huius) circuli A B G D centrum Z, coniuncta Z E. Ab impossibili enim, si aliquæ duci possint, quæ bifariam sese seccent, sint A G B D. Ad earum sectionem E coniuncta recta Z E, efficiet (per præcedentem) angulos Z E B & Z E A rectos, & igitur æquales, per 10 communem sententiam. Maiorem quidem Z E B minori Z E A, quod est impossibile. Cadit enim Z E, quæ per centrum in vtrasque rectas A G B D, non igitur aliquæ bifariam sese secabunt. Idem ostendimus si altera tãtũm bifariam seccetur, nam hæc sola rectam efficiet et quæ per centrum angulum, reliqua verò maiorem vel minorẽ recto. Si igitur in circulo binæ rectæ non per centrum extensæ, &c.

Propositio quinta.

Si binæ circunferentiæ in plano se inuicem secuerint, non erit earum idem centrum.



Proponantur binæ circunferentiæ A B G & I B G circulorum sese in eodem plano secantium in B & G Dico non esse earum idem centrum. Quod si possibile fuerit idem esse, sit E centrum vtriusque, & coniungatur E G, & inter G & B ducatur alia quæuis, secans binas circunferentias in Z & I, sitque E Z I. Quoniam enim E G est ex centro circuli A B G, ea æqualis erit ipsi E Z. Quia verò eadem E G est ex centro circuli I B G, ea erit æqualis rectæ E I, per 15 diffinitionem primi. Rectæ igitur E Z E I eidem E G æquales, adinuicem æquales erunt, maior scilicet minori, quod fieri non potest. Non erit igitur earum idem centrum. Si itaque binæ circunferentiæ in eodem plano se, &c.

MONITVM.

Quoniam agimus tantùm de circulorum circunferentiis hoc & sequenti theoremate, diximus loco circulorum, circunferentias sese secare, & insuper in eodem plano præter Theonem & Campanum dicendum esse curauimus. Quod omissum efficit binos circulos vel circunferentias sese posse secare, licet idem centrum habeant, veluti circuli maiores in sphæra mundi, scilicet horison, meridianus, coluri, & reliqui quotcunque idem mundi centrum habentes, hoc errore sæpiuscule posthac abutetur Theon, circulum scilicet pro circunferentia sumens, hoc est superficiem pro linea, quæ quàm dissideant, iudicandum relinquimus.

Propositio sexta.

Si duæ circunferentiæ se inuicem tetigerint, non erit earum idem centrum.



Binæ circunferentiæ A B G & D E G sese tangant in G: Dico non esse earum idem centrum. Quod si idem credatur esse centrum, sit Z, & coniungatur Z G & alia quædam à centro Z, secans binas circunferentias in E & B. Quoniam Z est centrum circuli A B G, recta Z B ipsi Z G æqualis erit. Quia similiter idem Z est centrum circuli D E G, recta Z E eidem Z G æqualis erit per 15 diffinitionem primi, ipsæ itaque Z E Z B eidem Z G æquales, adinuicem erunt æquales, pars scilicet toti, quod fieri non potest. Non erit igitur eorum idem centrum, Si ergo duæ circunferentiæ, &c.

Propositio septima.

Si in diametro circuli aliquod sumatur signum, quod centrum circuli non sit, ab eóque in circunferentiam aliquæ rectæ procidant, maxima erit in qua centrum, minima verò reliqua. Aliarum autem proxima centro, remotiore maior est. Binæ autem solùm rectę lineę ęquales, ab eodem signo in circunferentiam cadunt, ad vtrasque diametri partes.

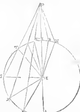


In circulo A B G D *sumatur aliquod signum* Z, *quod centrum non sit, ab ipso verò* Z *in circunferentiam plures cadunt rectæ, scilicet* Z B Z G Z I Z D, *in qua quidem* Z D *producta in* A *sit centrũ* E: *Dico omnium rectarum, à signo* Z *productarum, maximam esse* A Z *in qua est* E *centrum, minimam verò reliquam* Z D, *& insuper* Z B *proximiorem centro* E, *quauis remotiore maiorem esse. Quoniam enim productis* E B E G E I, *trianguli* B E Z *duo latera* B E E Z *reliquo* B Z *sunt maiora, per* 20 *primi, quibus æqualis est recta* A E Z. *Recta igitur* A E Z *maior est ipsa* B Z, *& similiter maior erit reliquis* G Z I Z, *& quibuscunque à signo* Z *ductis, semper enim binis trianguli lateribus est æqualis. Quia verò bina* B E E Z *binis* G E E Z *sunt æquales, angulus verò* B E Z, *angulo* G E Z *maior est, basis itaque* B Z *basi* G Z *maior erit, per* 24 *primi, similiter &* G Z *maior erit ipsa* I Z. *Quia autem latus* I E *binis* I Z Z E *minus est, ipsi verò* I E *æqualis est* D E, *ipsa igitur* D E *minor est binis* I Z Z E. *Communi verò ablata* Z E, *sequetur* Z D *minorem esse qualibet alia à signo* Z *producta. Quæ igitur per centrum scilicet* Z A *maxima, reliqua verò* Z D *minima erit, aliarum verò qualibet centro proximior, remotiore maior ostensa est, vt* B Z *maior recta* G Z, *eadem verò* G Z *maior alia* Z I, *&c. Ad vltimum autem, ad rectam* Z E *signúmque eius* E *angulo* I E Z *æqualis constituatur, per* 23 *primi* Z E T, *coniuncta* Z T, *Cùm igitur æquales sint* I E Z *&* T E Z *anguli, binaq́;* I E E Z *binis* T E, E Z *& bases* Z I Z T *ad vtrasque partes diametri æquales per* 4 *primi erunt. Sed ipsi* I Z *nulla alia ab ipsa* Z T *potest dari æqualis. Nam si detur alia quæuis* Z K *ipsi* Z I *æqualis, ea æquabitur eidem* Z T, *quod fieri nõ potest: erit enim remotior vel proximior centro. non igitur erunt æquales, vt ostensum est. Si itaque in diametro circuli aliquod sumatur signum, &c.*

Propositio octaua.

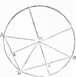
Si extra circulum suscipiatur in plano aliquod signum, ab eóque in circunferentiam ducantur aliquę rectę, quarum quidem vna per centrum extendatur, reliquę verò vtrunque in cauam circunferentiam cadentium rectarum, maxima est quę per centrum ducitur. Aliarum autem semper ei quę per centrum transit propinquior remotiore maior est. In curuam verò circunferentiam cadentium rectarum, minima est eius quę per centrum pars exterior. Minimę verò propinquior semper remotiore minor est, binę autem tantũ rectę lineę ab eo signo in circunferentiam cadunt ęquales ad vtrasque partes diametri.

[illegible] extra circulum A B G *signum* D, *[illegible] circu-[illegible]tur aliquę rectæ, quarum vna per c[illegible] transeat* D A, *secans circunferentiam in* I, *& centrum sit* M *reliquæ vero vtrinque sint* D K E D L Z D T G, *coniunctis* M K M L M T M G M Z M E. *Quoniam enim* D A *est æqualis binis* D M M E, *quæ quidem sunt maiores ipsa* D E *per 20 primi, ipsa igitur* D A *reliqua* D E *maior est. Rursus cum æquales sint binæ* D M M E *binis* D M M Z *& angulus* D M E *maior angulo* D M Z, *& basis* D E *basi* D Z (*per 24 primi*) *maior erit. Et eadem de causa* D Z *ipsa* D G *maior erit, proximior quidem remotiore earum quæ in cauam cadunt circunferentiam. Cæterùm cùm* D K, K M *sint vnica* D M *maiores, ab ipsis autē æquales tollantur* K M *&* I M, *reliqua igitur* D I *pars exterior eius quæ per centrum, ipsa* D K *minor est, similiter & minor ipsis* D L D T *ostenditur. Et quia in triangulo* D L M *à limitibus vnius lateris* D M, *binæ rectæ introrsum ad signum* K *constituuntur* M K D K. *Ipsæ reliquis minores sunt, per 21 primi, æqualis autem est* M K *ipsi* M L. *Igitur* D K *minor erit reliqua* D L, *& hac lege* D L *minor ipsâ* D T, *propinquior semper ipsi* D I *remotiore quauis alia. Ad vltimum autem, ad rectam* D M *signúmque eius* M, *angulo* D M K *æqualis constituatur* D M B, *coniuncta* D B, *binæ* D M M B *binis* D M M K *æquales, efficiunt* (*per 4 primi*) *bases* D B D K *æquales, ad vtrasque diametri* D I A *partes, nec alia vlla ipsis æqualis datur, qualis esset* D N: *nam* D N *remotior aut propinquior esset rectæ* D I *quàm sit* D B *vel* D K, *non igitur esset æqualis, vt ostendimus. Binæ itaque tantum dantur æquales rectæ ad vtrasque diametri partes, vt* D B *ipsi* D K *&* D N *ipsi* D L *&c. Si igitur extra circulum suscipiatur, &c.*



Propositio nona.

Si in circulo suscipiatur aliquod signum, & ab eo in circunferentiam cadant plures quàm duę rectę lineę ęquales, susceptum signum centrum est circuli.



Esto circulus A B G, *in quo suscipiatur signum aliquod* D, *à quo in circunferentiā plures quàm duæ rectæ ductæ* D A D B D G *sint æquales adinuicē. Dico signum* D *esse circuli centrum. Coniungātur* A B B G *rectæ, quæ secentur bifariam in* E *&* Z: *Producantur autem* E D *&* Z D *quantumuis, quoniam autem bina latera* A E, D E *binis* B E D E *& basis* A D *basi* D B *æquātur. Anguli* A E D *&* B E D (*per 8 primi*) *sunt æquales, igitur & recti erunt, per 10 diffinitionem primi, similiter & anguli* D Z B D Z G. *Recta igitur* D E *secans rectam* A B *in circulo bifariam & ad rectos, in se habet centrum circuli. Haud secus dicemus de recta* Z D, *per corol. primæ huius, in vtraque igitur* E D *&* Z D *erit centrum. Si igitur vtrique fuerit signum commune centrum, & solam sectionem* D *communem habeant, sequetur* D *circule esse centrum. Si itaque in circulo suscipiatur aliquod signum & ab eo, &c.*

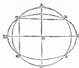
Monitum 7.8. & 9 propositionis.

Quoniam dixit Theon à signo in circulo existēte in circulum rectam duci, quod iuxta eius diffinitiones videtur ridiculum, cùm tam illud signum sumptum sit in circulo, loco etenim circunferentiæ circulum sumpserat. Diximus in circunferentiam rectas cadere. Communis verò fuit huius & duarum præcedentium defectus iste, quo posthac pluries abutetur, vt autē qui textus solos quandoque perlegent ambiguitatem facilius euitent, diximus postrema parte duarum præcedentium, binas lineas æquales, non autem duas, eo quòd plures duabus æquales binæ & binæ dari possint, ideo diximus binas, vt coniunctim duæ non diuisim plures duabus existimentur dari æquales.

Propositio

Propositio decima.

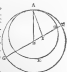
Circunferentia circunferentiam circuli in pluribus duobus signis non secat.



Esto circunferentia A B G *Dico nullam hanc aliam secare in pluribus signis duobus. Si enim fieri possit oppositum, seccet circunferentiam* A B G, *circunferentia* E B M I *in* B T Z I, *coniunctis* B T B I, *quas bifariam & ad rectos seccet rectæ* A G E M, *per* 10 *&* 11 *primi, sese autem seccent in* O. *In ipsis igitur* A G E M *erit centrum vtriusque circuli, per corollarium primæ huius. Cum* T B *&* I B *bifariam & ad rectos sectæ, in vtroque sint circulo. Igitur* O *centrum erit circuli, communis nanque earum* A G *&* E M *est concursus. Binarũ itaque circunferentiarum sese secantium idem erit centrum, contra* 5 *huius, quod fieri non potest. Non potest igitur circunferentia circunferentiam secare in pluribus duobus signis. Circunferentia igitur circunferentiam, &c.*

Propositio vndecima.

Si binæ circunferentiæ in plano sese inrrorsum tetigerinr, recta linea coniungens earum centra eiecta, in contactum circunferentiarum cadit.



Binæ circũferentiæ A B G *&* A D E *in signo* A *sese introrsum tãgant, super idem planum. A signo autem* A *ad vnius earum* A B G *centrum, scilicet* Z, *producatur recta* A Z *quantumuis: Dico in recta* A Z *esse vtrumque earum centrum. Quod si non credatur, sit reliquum centrũ ipsius* A D E *extra* A Z *in* I, *pducta* Z I *in* G Z I D T *ac recta* A I. *Quoniam binæ* A I, I Z, *maiores sunt reliqua* A Z, *per* 20 *primi*, I A *verò &* I D, *quæ à centro sunt æquales. Tota igitur* D I Z *æqualis binis* A I I Z *erit, & proinde tota* D I Z *maior erit ipsa* A Z. *Sed & minor, cùm sit pars rectæ* Z T, *quæ æqualis est ipsi* A Z, *quæ ex centro, quod fieri non potest. Reliquæ igitur circunferentiæ* A D E *centrum, non est extra rectam* A Z. *In ipsa itaque* A Z *erit vtrunque earum centrum. Si igitur binæ circunferentiæ in plano sese introrsum tetigerint, &c.*

Propositio duodecima.

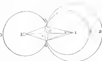
Si binæ circunferentiæ sese exterius in plano tetigerint, centra earũ coniungens recta per contactum transit.



Binæ circunferentiæ A D *&* A G, *sese exterius tangant in* A *super plano: Dico rectam eorum centra cõiungentem per* A *sectionem trãsire: si autem non, transeat per* G D, *sitque* Z G D I *recta*, Z *&* I *verò sint centra, coniunctis* Z A, I A, *triangulum erit* A Z I, *habẽs duo latera* A Z A I. *reliquo* Z I *maiora, per* 20 *primi. Sed* Z A *ipsi* Z G *(quæ ex centro) est æqualis*, I A *verò ipsi* I D. *Binæ igitur* A Z A I *(binis* Z G I D*) æquales, recta* Z I *minores sunt, residuo* G D, *& maiores ostensa sunt. quod est absurdum. Non potest igitur recta coniungens centra circunferentiarum* Z I, *alibi quam per contactum* A *transire. Si itaque binæ circunferentiæ, &c.*

Propositio decimatertia.

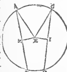
Circunferentia circunferentiam non tangit in pluribus signis vno, etsi extra, etsi intus tangat.



Sint duæ circunferentiæ ABG *&* ADG, *quæ sese tangant si fieri possit, in pluribus signis* A *&* G, *& coniungatur recta* AG, *ipsa in circulos vtrosque cadet, per 2. huius. Circunferentiæ itaque* DGA *&* EGA *sese secant in* GA, *non igitur tangunt. Aliàs, ducemus à centro* K *ad centrum* I *rectam, quæ per cõtactum transit, per 12 huius, qui sit* E *vel* C. *Esto, si fieri possit, alius contactus in* A, *coniunctis* IA, IG, KA, KG. *Quoniam igitur circunferentiæ* ABG *&* ADG *sese tangunt in* A *&* C, *rectæ* IC CK, *binis* IA AK *sunt æquales, cùm sint ex cẽtris. Trianguli igitur* AKI *duo latera* AK AI *reliquo* KI *non erunt maiora, contra 20 primi, quod fieri non potest. Non igitur sese tangunt extra in pluribus signis, sed in vno tantum. Si vero credantur sese tangere intus in pluribus signis, tangant se in* A *&* G *signis circuli* ABG *&* AFG, *quorum centra sint* I *&* O, *per primam huius. Per* O *verò ducatur recta* IO, *ipsa in contactum cadet, per 11 huius, qui sit* E. *Binæ igitur* OE OG *ex centro sunt æquales. Communis addatur* IO, *tota* IE, *binis* IO GO *erit æqualis. Atqui ipsi* IE *æqualis est* IG, *quæ ex centro circuli* ABG. *Trianguli itaque* GOI *latus* IG, *binis reliquis* IO GO *non est minus, contra vigesimam primi, quod fieri non potest. Nec igitur intus sese tangent circunferentiæ in pluribus signis vno. Circunferentia itaque circunferentiam non tangit in pluribus signis vno, &c.*

Propositio decimaquarta.

In circulo, æquales rectę æqualiter distant à centro, & quę æqualiter distant à centro, æquales adinuicem sunt.



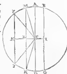
Sint in circulo ABDG *rectæ* AB DG *æquales. Dico eas* AB *&* GD *æqualiter distare à cẽtro. Suscipiatur (per primam huius) centrum* E, *à quo perpendiculares in ipsas* AB *&* GD *demittantur* EZ EI, *per 12 primi, ipsæ (per tertiam huius) bifariam secabunt rectas* AB *&* GD. *Rectæ itaque* AZ *&* GI *erunt æquales. Sed ex* AE *&* EG *quadrata quæ ex rectis fiunt æqualibus, æquantur (per 47 primi) quadratis ex* AZ ZE, *& ex* GI IE, *cũ anguli* AZE *&* GIE *sint recti. Ab æqualibus autem ex* AZ, ZE *ipsis ex* GI IE *quadratis, æqualia auferantur quæ ex* AZ *&* GI *quadrata. Reliqua ex* ZE *&* IE *quadrata, erunt æqualia, per 3 communem sententiam. Et proinde rectæ* ZE *&* IE *æquales erunt, quare & ipsæ* AB *&* GD *æqualiter distabunt à centro, per 4 diffinitionem huius. Ad secundam partem conuerso argumento, conuersum sequetur. Scilicet distent æquè à centro rectæ* AB GD *rectæ* ZE *&* EI *erunt æquales, per 4 diffinitionem huius, sed* AE *&* GE *quæ ex centro sunt æquales. Et ipsarum quadrata, æquantur eis quæ ex* AZ ZE, *&* GI IE. *Aequalia igitur sunt ex* AZ ZE *quedrata, eis quæ ex* GI IE, *à quibus æqualia quæ ex* ZE EI *ablata, relinquũt æqualia ex* AZ *&* GI. *Quare* AZ *&* GI *sunt æquales & dimidiæ ipsarum* AB GD *(per 3 huius) bifariam enim secantur à perpendicularibus à centro. Totæ igitur* AB *&* GD *sunt æquales. In circulo itaque, æquales rectæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter, &c.*

Propositio decimaquinta.

In circulo maxima quidem est dimetiens, reliquarum autem, semper propinquior centro remotiore maior est.

In cir-

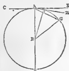
circulo A B G D sit dimetiens A D, centrum verò E, cui propinquior sit recta B G quàm Z I: Dico rectarum in circulo subtensarum maximam esse A D, reliquarum vero proximiorem centro (hoc est rectam B G) maiorem esse Z I remotiore, à centro E perpendiculares mittantur, in B G & Z I, quæ sint E T E K. Quia vero E K maior est (per 4 diffinitionem huius) reliqua E T, ab ea æqualis ipsi E T abscindatur E L, cui per signum L perpendicularis agatur M L N. Coniunctis E M E Z E I E N. Quoniam æquales sunt E T & E L, æquales erunt (per 14 huius) B G & M N. Quia vero trianguli M N E bina latera M E E N reliquo N M (per 20 primi) sunt maiora. Rectis autem M E E N æqualis est D E A dimetiens, dupla namque eius quæ ex centro, Igitur D A dimetiens maxima erit, cuius recta comparata in circulo. Cùm autem triangula M E N & Z E I duo latera M E E N duobus Z E E I æqualia, angulum vero M E N angulo Z E I maiorem habeant, & basim M N basi Z I remotiore maiorem (per 24 primi) habebunt. Ostensa est autem ipsi M N æqualis B G, Ipsa igitur B G proximior centro, reliqua Z I remotiore maior erit. In circulo igitur maxima quidem est dimetiens, &c.



Propositio decimasexta.

Quæ à diametri circuli extremitate ad angulos rectos in plano ducitur extra ipsum circulum cadit, & in locum inter rectam lineam & circunferentiam, altera recta linea non cadet, Et semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

Ducatur super extremitate diametri A B circuli A G B ad angulos rectos, linea recta C A E Dico rectam C A E extra circulum cadere, & inter A E rectam & A G circunferentiam, nullam rectam cadere lineam. Et insuper angulum B A G esse maiorem omni angulo rectilineo acuto, reliquum verò G A E esse minorem omni quoque angulo rectilineo, Sit centrum D, Ad primum autem quæ ad rectos angulos ad extremitatem diametri ducitur extra circulum cadit. Nam si intra caderet vt recta A G, coniuncta D G trianguli A D G Isoscelis qui ad basim anguli essent æquales, scilicet D A G & D G A, per 5 primi, Atqui rectus est D A G, rectus igitur esset D G A, & proinde duo anguli alicuius trianguli duobus rectis æquales essent, quod est absurdum, ex 17 primi, Non igitur cadit recta ad angulos rectos super extremitate diametri constituta intra circulum. Quare cadet extra vt recta C A E.



Secundo inter rectam A E & circunferentiam A G, nulla recta linea ad signum A constitui potest, Si enim fieri aliter possit, esto recta A Z, A centro autem D in ipsam A Z perpendicularis mittatur D I. Quoniam enim angulus D I A rectus est, erit (per 18 primi) maior D A ipsa D I, Quod producit absurdum. Nam D I quæ minor esset, extra circulum protenditur, ideo maior esset & minor quod fieri non potest, Nulla igitur recta inter A E & A G cadet. Tertio quod angulus B A G sub dimetiente & circunferentia contentus, maior sit omni acuto rectilineo patet. Nam quilibet acutus rectilineus angulus minor erit recto D A E, per 12 diffinitionem primi. Si itaque sit maior idem acutus, angulo semicirculi G A D. Is secabit rectum D A E per rectam inter A E & circunferentiam G A constitutam, Quod impossibile ostensum est. Si verò sibi æqualis credatur, recta circunferentiæ in pluribus signis congrueret, contra 4 diffini. primi, Non erit igitur aliquis acutus rectilineus angulus maior angulo semicirculi, nec proinde reliquo G A E contingentiæ minor, nec quidem æqualis, Erit igitur angulus semicirculi maior omni acuto rectilineo & itaque angulus contingentiæ minor omni eodem acuto. Quæ igitur à diametri circuli, &c.

Corollarium.

Hinc assequimur rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos erectam, circulum tangere in vno tantùm signo, nam si in duobus tangeret ipsa circulum secaret (per 2 huius) eo quod intus caderet.

MONITVM.

Quoniam cognitio sine huius contingentiæ anguli intelligentia aliquos latuit, qu[illegible] uersione digna huc adducenda esse arbitrati sumus. Campanus iunioribus reliquit a[illegible] qui de anguli contingentiæ natura sentirent, cum dixit non valere argumentum, hoc transit [illegible] minori ad maius per omnia media, ergo transit per æquale, non animaduertens qua de re tacue[illegible] Euclides huius anguli naturam, cum dicit, rursus nec valere hoc argumentum, contingit re[illegible] maius & minus eodem, ergo contingit reperire æquale. Euclides etenim his prioribus libris linearum, angulorum, superficierum ac figurarum originem tantum edocens, quid ad natura eorum scrutãd[illegible] præter hæc requiratur, posterioribus conseruabat documentis. Pluraque prædocet quorum naturam inquirentes eousque curiosè, vt ne quidem contenti suis dictis fuerimus. Reperiemus quamplura inter se nulla quantitatis discretione nobis propalari posse, ob naturæ distantiam, quæ quidem naturæ diuersitas, vnico sui operis decimo libro traditur, vt iuxta methodi naturam, fortiora quæque præfata debiliora subsequantur, idque expectandum maximè discentibus conuenit. Nam cum edocet Euclides parallelogrammorum constructionem (libro primo ac secundo) lateribus ac dimetientibus ornatam, si quis vellet eorum laterum ac dimetientium quãtitates comparare adinuicem, cum sint omnes lineæ, sæpius decideret. Rectæ lineæ item (vndecimo secundi theoremate sectæ) sectionem aliquam toti comparantes, quine hunc contingentiæ angulum rectilineo cuidam, quis insuper plures in circulo subtensas dimetienti, siue eiusdem figuræ diuersa latera, adinuicem ita comparare velit, vt eius comparationis perfectam intellectui præstet cognitionem, is profecto mathematicarum methodum verè ignorare fatebitur. Quid enim antequam quale aut quantum sit aliquid, prius discendum est. Quare qui quãtitatum diuersitatem naturæ audire cupient, decimum consulant. illac enim patebit, diuersarum specierum quantitates cognita comparatione nõ coniungi. Vt igitur Campani dissoluamus nodũ, Sit CBD recta perpendicularis ad extremum AB dimetientis circuli BEF, ducta intra circulum recta BI. Patet angulum semicirculi ABE conferri binis rectilineis, vni quidem maiori scilicet ABD recto, reliquo verò minori scilicet ABI acuto. Nulli verò rectilineo æqualis, eo scilicet quòd maioris & minoris confusa comparatio sit generalis, ac penitus indeterminata, æqualitas verò absque determinatione fieri non potest. Nam licet ABI angulus minor ostendatur ipso ABE, non tamen quanto minor ostenditur, nec similiter ABD quanto eodem ABE maior. Excessus etenim quantitatum vel deffectus quisque numeris non expressus, confusus erit & incognitus siue indeterminatus, qui incertus libro decimo dicetur. Sed cum curuarum inclinationes linearum, omnino à rectarum linearum inclinationibus, & natura & actu differãt, perspicuum est angulos ab his inclinationibus productos, diuersas induere naturas. Et proinde ea comparatione quæ intellectu patula existat penitus incomparabiles. Angulo itaque semicirculi ABE, quamuis rectilinei comparentur ABD quidem maior, & ABI minor, confusè tamen & sine excessus aut defectus expressione. Non sequetur ipsi ABE rectilineum æqualem dari posse, nam æqualitas omnium certarum & cognitarum affinitatum siue comparationum certissima & cognitissima existit, & solas eiusdem & generis & naturæ coniũgit quãtitates. Excessus verò & defectus cùm generaliores existant, non semper inter eiusdem naturæ quantitates contingunt. Sed eas tantum quæ vnius sunt generis coniungunt: vt latiùs videbimus tertia quinti diffinitione. Ad Campani igitur argumentum dicemus. Non ideo hanc philosophiæ legem destruendam esse, quæ dato maiori & minori dari docet & æquale, si quantitates eiusdem generis & naturæ, iuxta verò geometriæ intelligentiam sumpserimus. Ipsi nanque angulo ABE æqualis facilè dabitur angulus ABF, qui quidem eiusdem generis ac naturæ ipsi ABE reperietur esse. Ab hac angulorum diuersarum naturarum comparatione, opinati sunt aliqui recentiores, angulorum quantitates inter rectilineos, tantùm versari, eò quòd minimo rectilineo angulo minorem inuenerit Euclides angulum contingentiæ. Atqui inter quantitates minimam dari non est receptum. Eum itaque contingentiæ angulum qui minima existat quantitas, non tantùm angulum non esse, sed nec igitur vllam habere in se anguli quantitatem asseruerunt. non animaduertentes in hac quãtitatum angulorum cõparatione, variari angulorũ speciem siue naturam. Maximus etenim omnium contingentiæ angulorũ minimo rectilineo minor existit, non tamen ideo existimandũ erit quantitatis rectilineorũ angulorũ minimam datam fuisse, cum datur angulus contingentiæ. Nam ipse idem contingentiæ angulus, per alios

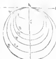
plures

[illegible] *finit [illegible] secar. potest, vt hoc typo elucidatur. Angulus etenim* F B C *infinitè* [illegible] *angulo* I B F, L B F, D B F, *&c. quodcunque describ- ptis* [illegible] *oribus circulis, eo quod omnes sint eiusdem denominationi, hoc est contingentiæ anguli. Non igitur rectilineorum angulorum quantitatis, angulum contingentiæ minimam esse existimemus, cum sint diuersæ angulorum species. Sed speciem specie minorē censere possumus. Minimus etenim camelorum, culicum maximo citra omnem admirādi stuporem maior credetur, non itaque qualitatem quantitate, sed speciem specie maiorem dicemus. Præterea concludemus angulum contingentiæ, angulū dici, ex anguli plani diffinitione, qui est duarum linearum sese in plano tangentium inclinatio. Anguli verò quantitatem præ se ferre velut & rectilineū, cum iuxta eam maior minor aut æqualis alteri conferri possit, ac in totidem infinitas diuisiones secari possit vt rectilineus. Concludemus itaque, vbi excessuum vel defectuū faciendæ sint comparationes, quæ generales & confusæ ac incertæ proponuntur, liberum nobis erit ad diuersarum specierum (sub eodem genere) quantitates discurrere. Vbi verò de æqualitate aut certo excessu vel defectu agendum erit, tunc sub eisdem quantitatum & genere & specie sistendum erit, eo quod certa optetur affinitas siue cōparatio: vt si angulum rectilineum infinitè diminuere velimus, huius diminutionem ad angulos contingentiæ mutata specie tandem ducere poterimus. Infinitum ad diuersas diuisionum species duci, non autem ad vnicam arctari censentes, non alias indefinita esset diuidendi facultas, sed ea restricta infinitè nomine priuaretur. Si verò angulum contingentiæ è contra augere velimus, conuersa methodo per augmentum in angulos rectilineos tandem deuenire possimus, semper augētes. Angulo igitur cōtingentiæ datus est maior rectilineꝰ, minor verò alius cōtingētiæ angulus æqualis demum sibi oppositus. Secus vero fit vbi exoptatur æqualitas, vel excessus aut defectus determinati & certi. Illæ etenim comparationes (vt diximus) sub eadem fouentur quantitatum specie, quam aliquando commensurationem dicemus. An verò omnes anguli contingentiæ sint eiusdem speciei, alibi differendum est. Sufficiat tantùm huic negotio, æquales reperisse* E B F *ipsi* H B M, *&* D B F *ipsi* I B M, *&c. ac insuper eisdem maiores & minores. Præterea repugnantiam primæ propositionis decimi, in hoc theorema commisisse Euclidem existimarunt, si angulus contingentiæ anguli quantitatem haberet. Ait enim Euclides duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiori auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum est maius quàm dimidium, idque semper fiat, relinquetur tandem magnitudo minor, minore magnitudine exposita. Inferentes angulum* A B F *per rectilineos angulos, semper plusquam eius ac relicti dimidium tollentes diuisum nusquam magnitudinem minorem angulo* C B F *(qui fuit minor magnitudo exposita) relinquere.*

Qui in id genus Caribdis à Silla inciderunt, loquentem Euclidem attendere debuerunt.

Præcipit enim à maiore expositarum plusquam dimidium tolli, excessum quidem confusum, liberum, ac indeterminatum, vt tandem pariat relictum, minus minore magnitudine exposita, quod hoc doceamus exemplo, propositis angulis A B F *maiori, &* F B C *minori. Ab angulo etenim recto* A B F *plus dimidio tollemus (angulum quidem* A B D) *a reliquo item* D B F, *plus dimidio tollemus, angulum* G B F *relinquentes. Nam is est omni rectilineo minor ostensus. Reliqui videmus angulum,* F B G *minorem angulo* F B C *contingentiæ: siquidem totum sua parte maius existat. Permisit enim Euclides liberos ac incertos vltra dimidium excessus. Licuit itaque quantitatum species variare, vt quauis arte minor minore quantitas exhibeatur.*

Dixerunt insuper semicirculorum angulos quosque, æquales esse adinuicem, scilicet eos qui fiunt à dimetiente & circunferentia, principium illud destruentes, scilicet partem toto minorem esse. Patet enim angulum semicirculi A B C *reliqui anguli semicirculi* A B G *partem esse, & igitur minorem. Sed cùm quilibet rectus angulus angulum semicirculi solo angulo contingentiæ excedat. Atqui si omnes excessus æquales fuerint hoc supposito, quod scilicet nulla sit angulorum contingentiæ quantitas, sequetur igitur, angulos reliquos semicirculorum æquales esse, per 3 communem sententiam. Ex falsis igitur suppositis, falsum colligere facillimū est. Hoc igitur falso supposito plura æquè falsa sequentur, scilicet angulum exteriorem semicirculi æqualem esse interiori. Angulos item circulorum sese tangentium, intus vel extra, æquos esse, nempe nihil quantitatis habere, absurdè concludunt.*



Tãdem extollũt Cardani paralogismum geometrico viro indignum. scilicet rectam a signo C versus D productam in circulum A B scilicet C S, D post modum vero in circulum A N, tandẽ in quotuis circulos (qui quidem infinitè describi possunt) vt C T, rectam dici infinitæ versus D productam, cum in infinitas circulorum descriptiones producitur, & tamẽ nusquam in D cum recta A D concurrere, licet ipsæ parallelæ non sint, hinc inuẽtum elicientes, vt ipsi putant, mirum, scilicet rectam C T infinitè productam, minorem esse recta C D, quæ finita esset. Vt hoc puerile dissoluamus obiectum. Concipiemus rectam C T per infinitas circulorum descriptiones, productam tantùm esse, & ideo eius productionem a circulorum descriptionibus arctari, & non igitur infinitam esse lineæ C T productionem sed circulorum descriptionem, numero infinitam concipi posse. Quare lineæ huius C T productioni infinitudo (si quæ dici possit) ascribi nõ poterit, sed tantùm circulorum multitudini ea ascribetur. Nõ itaque dicemus rectam C T infinitè productã, quinimo circulis terminatam.

Cur autem semper reperietur minor angulus contingentiæ (quamuis omnium cõtingẽtium maximus) quolibet minimo angulo rectilineo dicemus. Cùm anguli rectilinei ab eisdem lineis (aut equidem eiusdem natura nempe rectis) maiores vel minores quantumuis ad idem signum effici possint, non mutata rectilinei denominatione, Cuius dato rectilineo minor adhiberi potest. Diuersa namque inclinatione, easdem rectas copulare ad idem signum licet, cùm inclinatio rectarum (anguli quantitatem efficiens) in situ, non in linearum natura consistat. Angulus verò contingentiæ, ab eisdem lineis, ad idẽmque signum, maior vel minor effici non potest, eò quòd eius quantitas (quæ inclinatio dicta fuit) non à linearum situ, sed ab eius natura, siue denominatione contingentiæ dependeat. Quare ab eisdem lineis eousque necessaria fit huius anguli quantitas, quod nulla arte in maius vel minus traduci possit, quin contingentiæ depereat nomen, illico in sectionis denominationem cadens. Vnde necessarium ducemus, diuersas curuas, diuersas angulorum contingentiæ producere quantitates, ab inclinationum diuersitate ortas. Huius insuper anguli denominatio, sectionem linearum impedit, nempe cõtingentia. Si enim adesset sectio, non diceretur contingentiæ angulus. Si verò ad signum tangentes immoto contactu mouerentur, in sectionem deuenirent vtrinque producta, vt ostensum fuit, Contingentiæq́ nomine priuaretur angulus, linearũ motu sua denominatione expulsus. Si itaque ad aliquam rectam propositam, curua angulum cõtingentiæ concludens, quolibet dato rectilineo minorẽ efficiat, Eũdem verò angulum recta & curua cõponentes alium & minorem efficere nõ valeant, cùm motus illarũ cõtingentiam expellat, Perspicuum fit inter eas rectam cadere non posse, cadens nimirum (sua varietate motus) sectionem produceret ad signum contingentiæ, nec proinde rectilineum angulũ illo mixto minorem fieri posse. Sed ablata contingentiæ hypothesi, liberè linearũ inclinationi indulgentes, hoc est quãtitati (quæ fuit inclinatio) liberas habenas laxantes, Tum ex eisdem mixtis lineis, angulus cõstituetur super eodẽ signo, maior rectilineo aut minor vt libuerit, Eò quòd anguli quantitas non fuerit per contingentiam libertate priuata, sed tantùm eius denominatio seu qualitas, quare non fuit heroicum, quantitatis libera tollentes exequia contingentiæ denominatione, illud proferre, non posse dari rectilineum minorem mixto, qui sua denominatione vnicam & sibi particularem necessariò induit quantitatem, quaquidem quantitas licet in aliis angulis rectilineis per liberas inclinationes liberè variari possit, in huiusmodi mixto, denominatio contingentiæ quamlibet aliam quantitatem (inclinationum varietate genitam) penitus fugat, quocirca quantitati liberè angulorum (hoc est linearum inclinationi) incumbentes, facilè ex eisdem lineis rectis aut curuis liberæ quantitates inclinatione genitæ proferentur, Prolata verò hypothesi cõtingentiæ, angulus dabitur eiusdem speciei, maior minor aut æqualis scilicet maior & minor, diuersis ad contactum circulorum adiectionibus, æqualis verò contingentiæ angulò, perhibetur illi oppositus, vt proximo diximus. Quare qui parallogismos siue emergentes disciplinarum nodos dissoluere cupiunt, attendant potissimum actionum operantium libertatem nulla fraude tolli, siue earum exequia nullo vinciri hypothesis subtili claustro.

Propositio decimaseptima. *Problema 2.*

A dato signo dato in plano circulo, tangentem rectam lineam ducere.

A

A dato signo A, circulo D B G in eodem plano, tangentem rectam ducamus. A centro circuli quod sit E, recta coniungatur E A secans circulum in D, centro vero E, interuallo autem E A circulus ducatur A Z I. Ad rectam autem A E signúmque D perpendicularis excitetur Z D, & coniuncta Z E secet circulum D B G in B ducta A B: quoniam æquales sunt A E E B binis Z E E D (quæ ex centro) & angulum E communem habent. Reliqui itaque anguli A B E Z D E (per 4 primi) æquales erunt. Rectus est autem Z D E, rectus erit igitur A B E. Recta itaque A B super extremitate diametri E B ad rectos constituta, circulum D B G (per corollarium præcedentis) tangit in B. A dato itaque signo, &c.

Propositio decimaoctaua.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à centro autem in contactum ducta fuerit recta linea, ipsa ducta perpendicularis erit tangenti.

Tangat recta D E circulum A B G, cuius centrum sit Z, per 1 huius, & à centro Z, in contactum G aliqua Z G ducatur: Dico Z G perpēdicularem esse ipsi D G E tangenti, sin minus, sit alia quædam Z I ipsi D E perpendicularis, ab ipsa Z G cadente in contactum. quoniam rectus (si id esset) fieret angulus Z I G trianguli G Z I, & ideo maior. Latus G Z illum subtendens, maius esset reliquo Z I, per 18 primi, & minus, cùm sit æquale ipsi Z B, quæ ex centro, quod esset absurdum. Non erit igitur recta D E tangenti, alia à centro perpendicularis, quàm G Z in contactum cadens. Si igitur circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.

Propositio decimanona.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ipsi tangenti ad angulos rectos alia recta linea circulum secans excitetur, in excitata erit centrum circuli.

Tangat circulum A B G, aliqua recta D E in G. A contactu autē G aliqua ad rectos angulos excitetur G A circulum secans: Dico in ipsa G A excitata esse centrum circuli A B G. Quòd si alibi esse putetur, sit in Z, ducta Z G erit igitur (per præcedentem) angulus Z G E rectus: Sed & minor angulo A G E (per hypothesim) recto, quod fieri nequit. Non erit igitur alibi centrum quàm in excitata A G. Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c.

MONITVM.

Addidimus huic theoremati has voces (circulum secans) vt citra contentionem fiat theorema. Nam à contactu posset ad rectos tangenti perpendicularis excitari, non capiens circuli centrum, si extra circulum excitaretur.

Propositio vigesima.

In circulo angulus qui ad centrum, duplus est eius qui ad circunferentiam, quando anguli eandem circunferentiam habuerint basim.

Esto circulus A B G in quo ab eadem basi B G subtendantur duo anguli, scilicet B E G ad centrum, & B A G ad circunferentiam: Dico B E G ad centrum duplum esse, ipsius B A G ad circunferentiam. Quoniam trianguli A E B duo anguli E A B, E B A sunt (per 5 primi) æquales, eísque binis æquus est B E Z exterior, per 32 primi. Igitur B E Z ipsius B A Z duplus erit: similiter G E Z ipsius G A Z duplus ostendetur. Totus igitur B E G totius B A G duplus erit. Si verò centrum E sit extra rectas angulum continentes, vt sumpto angulo B D G. Dico similiter B E G duplum esse anguli B D G. Patet enim (ex 32 primi) ducta D E I recta, angulum I E G (exteriorem) æquum esse binis E D G, E G D, & proinde duplum ipsius E D G. Sed & I E B similiter duplus erit ipsius

I D B, per eandem. Tollatur autem I I B duplus, ab I E G duplo, necnon I D B simplex, ab I D G simplu. Reliquus B E G reliqui B D G duplus erit. In circulo itaque angulus qui ad centrum, &c.

Corollarium.



Hinc sequitur, si basis angulos subtendens dimidiam excedat circunferentiam, angulos qui ad centrum, duplum efficere eorum qui ad circunferentiam. *Si enim A G C circũferentia subtendat binos angulos A I G & G I C ad centrum, & eadem A G C subtendat angulum A B C ad circunferentiam, cũ ostensus sit A I G duplus anguli A B G, necnon G I C duplus ipsius G B C, bini A I G & G I C ad centrum, duplum efficient totius A B C ad circunferentiam.*

Propositio vigesimaprima.

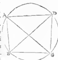


In circulo qui in eadem sectione sunt anguli, sibi inuicem sunt ęquales.

Esto circulus A B G D, eius verò sectio sit B E A D, in qua sint anguli B E D B A D. Dico eos esse æquales. Suscipiatur (per 1 huius) centrum quod sit Z, coniunctis Z B, Z D, quoniam anguli B E D & B A D eandem circunferentiam basim habent (scilicet B G D) cum angulo B Z D, qui ad centrum, ipsi (per præcedentem) sunt eiusdem B Z D dimidij, & igitur (per 7 comm. sententiam) æquales. In circulo igitur qui in eadem sectione sunt angul.

Propositio vigesimasecunda.

In circulis quadrilaterorum existentium, anguli qui ex opposito duobus rectis sunt æquales.



Sit in circulo A B G quoduis quadrilaterum A B G D: Dico angulos oppositos quadrilateri huius, scilicet B A D & B G D, siue A B G & A D G, binis rectis æquos esse, quoniam in eadem sectione sunt anguli A D B & A G B, ipsi sunt (per præcedentem) æquales. similiter B A G ipsi B D G. Bini itaque A D B & B D G binis A G B & B A G sunt æquales, super eisdem basibus constituti, & proinde totus A D G binis B A G, A G B trianguli A B G æquus erit, quare bini A D G & A B G oppositi (tribus trianguli A B G, angulis æqui) duobus rectis æquales erunt, per 32 primi. Similiter æquales ostendentur binis rectis reliqui B A D & B G D. In circulis igitur quadrilaterorum existentium anguli qui ex opposito, &c.

Propositio vigesimatertia.

Super eadem recta linea, duę sectiones circulorum similes & inæquales, non constituentur ad easdem partes.



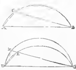
Esto recta A B. Dico super ea duas sectiones circulorum similes & inæquales constitui non posse ad easdem partes, quòd si posse credatur, sint A G B & A D B super A B recta sectiones inæquales & similes, & ad easdem partes. Producatúrque recta A G in D, coniunctis B G, B D, cùm sint similes sectiones, anguli, A G B & A D B erunt (per 10 diffinitionem huius) æquales, exterior quidem A G B interiore opposito G D B, quod opponeretur 16 primi, & igitur absurdum esset. Non itaque erunt super recta A B similes & inæquales sectiones. Super eadem itaque recta linea, duæ sectiones, &c.

Propositio vigesimaquarta.

Super æqualibus rectis similes circulorum sectiones, æquales adinuicem erunt.

Super

[illegible] libus rectis A B *&* G D *similes consistant sectiones* A [illegible] *Dico super ipsis similes & inequales non posse constitui, si enim super altera earum aliqua maior esse possit & similis. Esto* D Z G *(excedens* D E G*) similis & aequalis* A C B *sectioni, coniungantur autem* A C, C B, D E, F G, *productáque* G E *in* Z *iungatur* Z D, *quoniam similes supponuntur* A B C *&* D G E *sectiones, anguli* A C B *&* D E G *erunt (per 10 diffinitionem huius) aequales. Quia item similis ponitur* D Z G *sectio ipsi* A C B, *aequalis erit (per eandem)* D Z G *angulus* A C B *angulo. Atqui eidem* A C B *aequus fuit* D E G *angulus, sequetur igitur angulum* D E G *exteriorem angulo* D Z G *del* D Z E *interiori & opposito trianguli* E D Z *aequum esse, contra 16 primi, quod fieri non potest. Super rectis itaque* A B *&* G D *similes sectiones inaequales non erunt. Aequales igitur erunt, super aequalibus ergo rectis, &c.*



MONITVM.

Quoniam Theon & Campanus hanc demonstrare conati sunt, aut hi à quibus demonstrationes sumpserunt, instrumento ferè mechanico, nempe coaptata figura supra figuram, quod indignum traditione mathematica supramodum existimatur. Demonstrandi nouam rationem aperire cogimur, Theon item hanc per 20 tertij, loco decimae voluit ostendere (frustra tamen.) Poterant enim super eadem recta duae describi sectiones circulorum, in pluribus duobus signis se non secantium, quare non necessariò concludit hoc supposito, quod videlicet congruentibus rectis, licet sectiones circulorum non congruant, sectionum circulos sese in pluribus duobus signis secari, maximè si concurrant sectiones tantum ad extrema lineae subtendentis signa, tunc in duobus illis sese tantùm secabunt signis. Campanus verò vnam sectionem per puram alterius superpositionem, tanquam instrumento mechanico metitur vt aequalem probet, quod esse argumentum verè mechanicum, patet. Aliquas insuper demonstrationes quasdam hac via demonstrare conati sunt (veluti 4 & 8 primi, &c.) Sub octaua communis sententiae quidem praetextu, per quam quae sibimetipsis congruunt vel conueniũt, aequalia adinuicem esse dixit Euclides, cupiens artem non artis praxim describere. Quare non intelligit figuras superponendas figuris vt aequales aut inaequales percipiantur, sed figurarum aut aliorum quorumuis subiectorum quantitates, ratiocinante argumento conuenire cognitae, adinuicem sibimetipsis illae quantitates aequales dicentur, non autem quae experimento congruere palpantur, illae aequales dici debeant. Mathesis enim ex praeassumptis certis necessariò concludit, non autem ex sensibus externis praxim operantibus saepius fallacem,

Propositio vigesimaquinta. *Problema 3.*

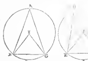
Circuli sectione data, describere circulum cuius est sectio.

Data circuli sectio esto A B D, *in qua duae rectae non parallelae vtcumque ducantur* A G *&* B D, *quibus bifariam in* I *&* O *sectis, excitentur perpendiculares* I E *&* O E. *Sequetur (per coroll. 1. huius) in vtraque esse centrũ circuli* A B G D, *commune scilicet ipsis signũ* E, *centro igitur* E *interuallo verò* E A *vel* D E *circulus perficiatur, per 3 post. Circuli igitur sectione data descripsimus circulum cuius est sectio.*



Propositio vigesimasexta.

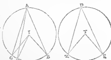
In aequalibus circulis, aequales anguli in aequalibus circunferentiis consistunt, siue ad centra, siue ad circunferentias consistant.



Sint æquales circuli A B G *&* D E Z, *& in eorum circunferentiis* B G *&* E Z *sint æqualium angulorum* B I G *&* E T Z *qui ad centra magnitudines, per 8 diffinit. huius, ad circunferentias autem sint* B A G *&* D E Z *æquales. Dico circunferentias* B G *&* E Z *æquales angulos subtendentes esse æquales. Cùm per hypothesim æquales sint circuli, binæ* I B I G *binis* T E T Z, *per 1 diffinit. huius, sunt æquales. Sed & anguli qui ad* I *&* T *sunt æquales, per hypothesim, bases igitur* B G *&* E Z *erunt (per 4 primi) æquales. Quia verò æquales sunt anguli* B A G *&* E D Z, *nempe æqualium* I *&* T *dimidij, per 20 huius, Similes erunt circulorum sectiones* B A G *&* E D Z, *per 10 diffinitionem huius. Super æqualibus autem rectis existentes, scilicet* B G *&* E Z, *erunt igitur æquales sectiones* B A G *&* E D Z, *per 24 huius. Reliquæ itaque* B K G *&* E L Z *circunferentiæ, erunt (per 3 commun. sententiam) æquales. In æqualibus igitur circulis, æquales anguli, in æqualibus circunferentiis, &c.*

Propositio vigesimaseptima.

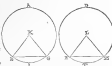
In æqualibus circulis super æqualibus circunferentiis consistentes anguli, sunt æquales adinuicem, etsi ad centra, etsi ad circunferentias consistant.



In æqualibus circulis A B G D E Z, *super æqualibus circunferentiis* G B *&* Z E, *consistant anguli* G A B Z D E *ad circunferentias, ad centra verò* G I B Z T E: *Dico* G A B *&* Z D E *angulos æquales esse, ac* G I B *&* Z T E *similiter æquos. Si enim non credantur, Sit alter* Z T E *minor ipso* G I B. *Ad rectam autem* B I *signúmque* I, *dato* E T Z *angulo æqualis constituatur* B I K, *per 23 primi. Erit igitur æqualis* B K *circunferentia ipsi* E Z, *per præcedentem. Sed ipsi* E Z *æqualis est similiter (per hypothesim)* B G *circunferentia, ipsa igitur* B K *minor, ipsi* B G *maiori æqualis erit, quo nihil absurdius. Non igitur est aliquis angulorum* Z T E *&* G I B *altero minor, æquales igitur sunt. Et proinde* G A B *&* Z D E *ad circunferentias æqualium dimidij, per 20 huius, æquales erunt adinuicem, per 7 commun. sententiam. In æqualibus igitur circulis super æqualibus circunferentiis consistentes anguli, &c.*

Propositio vigesimaoctaua.

In æqualibus circulis æquales rectæ circunferentias auferunt æquales, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.



In æqualibus circulis A B G *&* D E Z *sint æquales rectæ* B G *&* E Z *circulos secantes: Dico eas auferre æquales circunferentias, scilicet maiorem* B A G *maiori* E D Z, *& minorē* B I G *minori* E T Z, *Suscipiātur, per 1 huius, centra circulorum* K *&* L, *cōiunctis* K B K G L E L Z. *Quoniam æquales sunt* B G *&* E Z *per hypothesim, binæ autem* B K K G *binis* E L L Z *æquantur, per 1 diffinitionem huius. Anguli igitur* B K G E L Z *(per 8 primi) æquales erunt. Ipsi igitur in æqualibus circunferentiis (per 26 huius) insistunt, scilicet in* B A G *ipsi* E D Z, *maioribus. Reliquæ itaque* B I G *&* E T Z *minores, æquales erunt, per 3 commu. senten. cùm æquales sint (per hypothesim) circuli. In æqualibus igitur circulis æquales rectæ, &c.*

MONITVM.

Quoniam Campani traditio, quæ de linearum diuersitate loquitur, vt maior maiorem circunferentiam, minor verò minorem auferat, Theonis traditionem, de linearum diuersitate, apud aliquos discentes fuisse eodem modo forsan doceret, transposuimus tantum hanc dictionem (æquales) addita particula quidem, vt lineæ æquales intelligantur, cùm vero maiorem & minorem dicit, circunferentias inter se comparari intelligemus. Plus enim nobis arrideret Theonis sententia huius theorematis, quam Campani, dicentis maiorem lineam maiorem circunferentiam indistinctæ auferre in æqualibus circulis, quod potest esse falsum, cùm qualibet recta in circulo tensa, binas subtendat circunferentias, maiorem scilicet & minorem, dempta diametro subtendente æquales. Si igitur maiori lineæ deputetur minor semicirculo arcus, minori vero rectæ maior, patebit maiorem rectā minorem arcum subtēdere, & minorem rectam maiorem arcum, quod producet absurdum. Nos igitur Theonem veriorem sequutum esse viam existimantes, in hoc imitabimur.

Propositio vigesimanona.

In æqualibus circulis, sub æqualibus circunferentiis æquales rectæ subtenduntur.

In æqualibus circulis A B G *&* D E Z, *sub æqualibus circunferentiis* G A B *&* Z D E, *subtendantur rectæ* B G *&* E Z: *Dico eas æquales esse. Suscipiantur centra (per 1 huius)* K *&* L, *coniunctis* B K, K G, E L, L Z. *Quoniam æquales sunt circuli, binæ* B K K G *binis* E L L Z *(per 1 diffinitionem huius) erunt æquales. Quia verò circunferentiæ* B A G *&* E D Z *æqualium circulorum sunt æquales, reliquæ* B I G E T Z, *erunt æquales, quare anguli* B K G *&* E L Z *(per 27 huius) erunt æquales. Basis igitur* B G *(per 4 primi) basi* E Z *æqualis erit. In æqualibus igitur circulis sub, &c.*

Propositio trigesima. *Problema 4.*

Datam circunferentiam bifariam secare.

Esto data A D B *circunferentia, quam oportet bifariam secare. Subtendat eam* A B, *cui bifariam in* G *secta, perpendicularis excitetur* G D, *coniunctis* A D D B. *Quoniam æquales sunt binæ* A G G D *binis* B G G D, *& circum æquales angulos* D G A D G B, *per constructionem. Basis* A D *basi* B D, *per 4 primi, æqualis erit. Et proinde arcus* A D *arcus* B D, *per 28 huius, æquus erit (minor scilicet minori) Datam itaque circunferentiam* A D B *bifariam in* D *secuimus.*

Propositio trigesimaprima.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem in maiori sectione recto minor, qui verò in minore maior est recto, & insuper angulus maioris sectionis recto quidem maior est, minoris autem sectionis minor est recto.



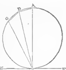
In circulo A D B G *cuius centrum sit* E, *angulus in semicirculo sit* A B, *ducta diametro* B E G. *In maiori vero sectione sit angulus* A B G *in minore autem sit* A D G *angulus. Maioris vero segmenti angulus, contineatur à circunferentia* B A *& recta* A G, *minoris vero segmenti, à circunferentia* D A *& eadem recta* A G. *Dico* G A B *rectum esse,* A B G *vero recto minorem,* A D G *autem recto maiorem. Angulum vero maioris sectionis* G A B *recto maiorem. Minoris vero* G A D *recto minorem esse. Extendatur* B A *in* Z, *ducta* A E. *Quoniam quæ ex centro* E A E B E G *sunt æquales, anguli* E A B E B A *æquales erunt, similiter & anguli* E A G E G A, *per 5 primi. Totus itaque* B A G *binis,* A B E A G E *æquus erit. Sed binis* A B E A G E *est æqualis* Z A G *exterior, per 32 primi. Idem igitur* Z A G *toti* B A G *æquus erit, per 1 commu. senten. Recta igitur* G A *super rectam* B Z *angulos æquos efficiens, rectos efficiet, per 13 primi, rectus igitur erit* B A G *in semicirculo. Qui itaque in maiori sectione* A B G, *recto minor ostensus est, & insuper angulus sectionis* G A B *rectum* B A G *continens, maior est recto per 9 commun. sententiam: minoris verò sectionis angulus* G A D, *minor est recto* G A Z *per eandem. Quia vero in circulo* A G B *existit quadrilaterum* B A D G *Angulos oppositos,* A B G *&* A D G *duobus rectis habet æquales, per 22 huius. Atqui* A B G *minor est recto, reliquus igitur* A D G *(in minori segmento) maior erit recto. In circulo itaque angulus qui in semicirculo rectus est, qui autem, &c.*

Corollarium.

Hinc patet. Si trianguli angulus vnus, duobus reliquis fuerit æqualis, ipse rectus erit. Si vero contra rectus sit, & binis æquus erit. *Trium enim trianguli angulorum dimidium vni recto æquipollere fatetur 32 primi.*

Propositio trigesimasecunda.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem ducta fuerit quędam recta linea circulum secans, Anguli quos efficit ad tangentem, æquales sunt eis qui in alternis circuli sectionibus consistunt angulis.



Circulum A D G B *tangat recta* E Z *in* B. *A contactu autem* B *ducatur* B D *circulum secans: Dico angulos quos* D B *efficit ad* E Z *tangentem, scilicet* D B Z, *æquari ei qui in alterna sectione* D A B *reperietur,* D B E *verò ei qui in alterna sectione* D G B *consistit. Esto ipsi* Z B *ad signum* B *perpendicularis* A B, *coniunctis* A D, D G, G B. *In recta* A B *erit centrum circuli, per 19 huius. Angulus igitur* A D B *(in semicirculo) rectus erit, per præcedentem, & proinde reliquis* D A B, D B A *æqualis, per coral. præced. Bini igitur* D A B, D B A *vni* A B Z *recto sunt æquales, communis auferatur* D B A, *reliquus* D B Z *(ad tangentem) reliquo* D A B *(in sectione alterna) æquus erit. Cæterum quia quadrilaterum est in circulo* A D G B, *anguli* D A B, D G B *oppositi, duobus rectis sunt æquales, per 22 huius, sed duobus item rectis æquales sunt* D B Z, D B E, *per 13 primi. Bini itaque* D A B, D G B *binis* D B Z D B E *sunt æquales, atqui* D A B *alterno* D B Z *æqualis ostensus est. Reliqui igitur scilicet* D B E *(ad tangentem) &* D G B *(in sectione alterna) erunt æquales, per 3 commu. senten. Si itaque circulum tetigerit aliqua recta linea, &c.*

Propositio trigesimatertia. *Problema 5.*

Super data recta linea, describere sectionem circuli capientem angulum ęqualem, dato angulo rectilineo.

Esto

Esto data recta AB, datus [illegible] angulus G, ad datam AB & signum eius A, dato angulo G, aequalis constituatur angulus BAD (per 23 primi) producta DA in F. Ad signum A rectae DF perpendicularis excitetur AE. Ipsi vero AB bifariam diuisae in Z, perpendicularis fiat IZ, quae secabit rectam AE, cùm AD & AB non sint parallelae, secet igitur in I, coniuncta IB, centro vero I, interuallo autem IA circulus describatur ABE, circa dimetientem AE. Quoniam enim aequales sunt AZ, ZI ipsis BZ, ZI, & angulus angulo, bases AI & IB aequales erunt, per 4 primi. Cadit igitur circulus in B, per decimamquintam diffinitionem primi, producta autem IZ in H, iungatur HA, HB, BE, quia DF ad rectos diametro AE constituitur, ipsa (per corol. 16 huius) circulum tangit, & proinde (per praecedentem) BAD ad tangentem angulus, ipsi AEB in sectione alterna aequus erit. Et igitur angulus G (ipsi BAD per hypothesim aequalis) eidem AEB aequus erit, si autem obtusus fuerit datus G angulus, Similiter AD, BAF applicatus, ostẽdetur aequalis alterno AHB: Si autem rectus proponatur datus G. Ad datam AB semicirculus describatur, ea etenim sectio circuli rectũ capit angulum. Super data itaque recta linea &c.

Propositio trigesimaquarta. *Problema 6.*

A dato circulo sectionem abscindere, capientem angulum dato angulo rectilineo ęqualem.

Esto datus circulus ABG, datus verò angulus sit E, circulum verò ABG tangat recta CD (per 17 huius) in A. Ad rectam autem CD & signum eius A, dato angulo E aequalis constituatur CAG ad tangentem, per 23 primi ipse CAG aequus erit ei qui in segmento AG angulo, per 32 huius. Haud secus ostendetur, si datus angulus aequalis ponatur angulo DAG, eum aequalem esse ei qui in alterno segmento ABG. A dato igitur circulo ABG sectionem abscidimus AG, vel GBA, capientem angulum dato angulo E rectilineo aequalem.

Propositio trigesimaquinta.

Si in circulo duæ rectę sese secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius. AEquum est ei quod sub segmentis alterius comprehenditur rectangulo.

In circulo ABGD, cuius centrum sit Z, duae rectae AG & DB, sese secent in E, & primò non per centrum extensae: Dico rectãgulum sub DE, EB, aequum esse rectangulo sub AE, EG comprehenso, à centro Z perpendiculares in vtramque AG & DB demittantur ZI ZT, coniunctis ZB, ZE, & ZG. Quoniam ZI, & ZT rectae, secãt bifariam (per 3 huius) rectas AG & DB, E vero secat eas inaequaliter, Erit (per 5 secundi) rectangulum sub AE, EG cum quadrato ex IE, aequum EI quod ex IG dimidia quadrato, Quia vero (per 47 primi) quadrata ex IG & IZ, aequantur ei quod ex ZG, sequetur rectangulum sub AE EG vna cum quadratis IE & IZ, aequari ei quod ex ZG. Cum autem quae ex IE & IZ sint aequalia ei quod ex ZE, per eandem 47 primi, rectangulum sub AEEG, cum quadrato ZE, aequũ erit quadrato ex ZG, Haud dissimili argumento patebit, rectangulũ sub DE EB, cum quadratis TE TZ, hoc est, cum solo ex ZE, aequum esse quadrato ex ZB, Sed cum ZG & ZB sint (quae ex cẽtro) aequales, & proinde ex ipsis quadrata aequalia, sequetur rectãgulũ sub AE EG cum quadrato ex ZE aequum esse rectangulo sub DE EB cum eodem quadrato ex ZE. Quare cõmuni ex ZE ablato, Reliquum scilicet rectangulum sub AE EG sectionibus vnius, aequũ erit rectangulo sub DE EB sectionibus alterius. Haec autem cum bina inaequaliter sese secant non per centrum extensa, dicta sint.



[Se]cundo cum una bifariam, altera vero per centrum extensa, in[æqualiter secatur], ut in circulo A C B D, cuius centrũ sit E, recta A B dimetiens inæqu[aliter secta], bifariam secat rectam C D in I, cõiuncta E D, quoniam bifariam secat A B rectam C D, & ad rectos eam secat, per 3 huius. Per præassumptam itaque quintam secundi rectangulum sub A I I B cum quadrato ex E I, æquum est ei, quod a dimidia E B, vel E D sibi ex centro æquali, sed eidem ex E D quadrato æquum est rectangulum sub C I I D (hoc est, quadratum ex I D, est enim secta bifariam C D) cum quadrato E I, per 47 primi. Cõmuni igitur ex E I quadrato ablato, rectangulum sub A I I B, æquum erit rectangulo sub C I I D, hoc est quadrato ex E I vel I D æqualibus facto.



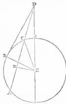
Tertio autem cùm ea quæ per centrum extensa, inæqualiter reliquam per centrum non extensam, secat, ut A B dimetiens secat C D, & A B ea secatur inæqualiter in I, demittatur perpendicularis a centro E in C D, quæ sit E G, & iungatur E D, ipsa E G secat (per 3 huius) bifariam rectam C D. Quod igitur sub C I I D rectangulum, cum quadrato ex G I, æquum est quadrato ex G D, per 5 secundi. Addatur commune quadratũ ex G E, Erit quod sub C I I D cum quadratis ex G I & G E æquum eis quæ ex G D G E, quadratis, sed ex G I & G E quadrata, E I quod ex E I sunt (per 47 primi) æqualia. Quod itaque sub C I I D cum quadrato ex E I, æquum erit eis quæ ex G D G E quadratis. Atqui (per eandem quintam secundi) quod sub A I I B cum quadrato ex E I, æquum est quadrato ex E B, hoc est, ex E D sibi æquali. Quod autem sub C I I D cum quadrato ex E I æquum fuit quadratis ex G D G E, hoc est, eidem quadrato E D, per 47 primi. Quod igitur sub C I I D cum quadrato E I, æquũ erit ei quod sub A I I B cum eodẽ quadrato E I. Communi verò ablato quadrato ex E I, superest quod sub C I I D sectionibus unius, æquum esse ei quod sub A I I B sectionibus alterius rectãgulo. Si verò quarto utraque per cẽtrũ sine bifariã sese seccent, sub earum sectionibus rectãgula quadrata erunt, & cùm sint quæ ex centro æqualia ea rectangula quadrata producent. Si itaque in circulo duæ rectæ sese secuerint, rectangulum &c.

MONITVM.

Triplicem intulimus huic demonstrationem, eò quòd lineæ variis secandi modis in circulo concipientur, quorum tantùm Theon unum, scilicet cùm nulla earum per centrum describitur, exposuit, reliquos omittens, duo scilicet quibus lineæ sese secantes, vel earum altera centrum occupat, propriis figuris demonstrandos, quibus quartus facilis exhibetur, & sine figura, nulla ambiguitate propalatus.

Propositio trigesimasexta.

Si extra circulum sumatur signum, ab eoque duæ rectæ lineæ cadant, & earum altera circulum seccet, altera verò tangat, quod sub tota secante & eius parte extrinsecus sumpta comprehenditur rectangulum, ęquum est ei quod fit ex tangente quadrato.



Extra circulum A B G C sumatur aliquod signum D, à quo duæ producantur lineæ, quarum altera circulum tangat ut D B, altera verò seccet ut D C, sed primo per centrum quod sit E. Dico rectangulum sub tota secante D C & eius parte D I extra circulum sumpta comprehensum, æquari ei quod fit ex D B tangente quadrato. Coniungatur E B ipsa erit rectæ E D perpendicularis, per 18 huius, quoniam (per 6 secundi) quod sub C D tota cum apposita & D I apposita rectangulum, cum eo quod à dimidia E I (vel E B) fit quadrato, æquum est ei quod ex dimidia & apposita C D fit quadrato. sed quadrato ex E D æqualia sunt quæ ex D B, E B (per 47 primi.) Commune autem tollatur quadratum ex E B, superest rectãgulum sub C D & parte D I æquum esse quadrato quod fit ex D B tangente. Ad secundum autem recta secans seccet non per centrum, sitque illa D G A, cui perpendicularis a centro E designetur E Z, ea bifariam secabit rectam (A G, per 3 huius) Coniuncta E G, quoniam (per eandem 6 secundi) quod sub A D, G D cum quadrato G Z æquum est quadrato D Z. Ipsis commune addatur quadratum Z E, Erit quod sub A D, D G cum quadratis G Z, Z E (hoc est cum quadrato G E

per

per 47 primi) æquale quadratis D Z, Z B, *sed quadratis* D Z, Z E *æqualia sunt quadrata* D E, B E, *cùm sint utraque æqualia ei quod ex* D E, *per 47 primi, quod igitur sub* A D, D G *cum quadrato* G E (*hoc est* B E *ex centro sibi æquali*) *æquum erit quadratis* D E, B E, *commune autem tollatur ex* B E *quadratũ. Sequetur rectangulum sub tota* A D *secante & parte* D G *extrinsecus sumpta contentum, æquum esse ei quod fit ex* D E *tangente quadrato. Si itaque extra circulum sumatur signum ab eo, &c.*

Propositio trigesimaseptima.

Si extra circulum sumatur aliquod in plano signũ, & ab eo in circulum duę incidant rectę, quarum altera circulũ secet, altera verò incidat. Sit autẽ quod fit sub tota secante & extrinsecus sumpta eius parte, ęquale ei quod fit ex incidente, incidens circulum tanget.



Sumatur extra circulum A B E *aliquod signum* D *in eodem plano, à quo duæ procedant ad circulum rectæ, quarum altera scilicet* D G A *circulum secet, altera vero* D B A *incidat. Sit autẽ quod sub tota* A D *& eius parte extrinsecus sumpta* D G *rectangulum, æquum ei quod fit ex* D B *incidente quadrato: Dico ipsam* D B *incidentem, circulum tangere, suscipiatur (per primam huius) circuli centrum* Z. *A dato verò signo* D *tangens ducatur* D E, *per 17 huius, coniunctis* Z B, Z D, Z E. *Cùm autem rectangulum comprehensum sub* A D, D G *æquum sit (per hypothesim) quadrato quod fit ex* D B *incidente, & (per præcedentem) æquum sit quadrato* D E *tangentis, ipsæ* D B, D E *erunt æquales. Quia verò binæ* D B, B Z *binis* D E, E Z *sunt æquales, basis autem communis, angulus* D B Z *angulo* D E Z *recto æquus erit, per 8 primi. Rectus igitur erit* D B Z *angulus, & proinde ad extremum diametri* B Z *rectos efficiens* D B *incidens, circulum tanget, per coroll. 16 huius. Si itaque extra circulum sumatur aliquod signum, &c.*

Corollarium.

Si à signo extra circulum sumpto, plures rectæ circulum secuerint, rectangula comprehensa sub singulis & earum parte extrinsecus sumpta, erunt sibi inuicem æqualia.

Nam quodlibet eorum, quadrato quod fit à tangente æquum ostenditur, insuper à quouis signo binæ tangentes, in circulum ductæ sibi inuicem sunt æquales. Cum sint singularum quadrata, æqualia rectangulo sub tota secante, & eius parte extrinseca sumpta.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber quartus.

Diffinitio 1.

FIGVRA rectilinea plana in plana rectilinea inscribi dicitur, quando vnusquisque inscriptæ figuræ angulus, vnũquodque latus eius in qua inscribitur, tangit.

Diffinitio 2.

Figura autem circa figuram describi dicitur, quando vnumquodque latus circuoscriptæ, vnumquemque angulum eius circum quam describitur, tangit.

Hac figurarũ rectilinearum inscriptio & circunscriptio ad eas tãtùm colligitur figuras, quæ rectilinea descriptæ æquiangulæ & æquilatera existunt. Omnis nanque figura plana rectilinea totidẽ angulis quod & lateribus vallatur. Ea de causa præcipit, vnius angulos totidem alternis coaptari lateribus. Secus erit in figuris solidis, quarum sæpius bases anguli & latera eiusdẽ figuræ, diuersis exprimuntur numeris. Quare alia diffinitione libro vndecimo elucidabuntur.

Diffinitio 3.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando vnusquisque inscriptę figuræ angulus circuli circuoferentiam tangit.

Diffinitio 4.

Circulus verò circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circunferentia vnomquemque eius circum quam describitur, angulum tangit.

Diffinitio 5.

Circulus autem in figura rectilinea inscribi dicitur, quando circuli circunferentia vnumquodque latus eius in qua describitur, tangit.

Diffinitio 6.

Figura verò rectilinea circa circulum describi dicitur, quãdo vnumquodque latus circunscriptę, circunferentiam tangit.

Licet circulum ingrediantur ac contineant sæpius trapezia, & alia quorumuis poligonorum irregulares species, quorum angulos quosque circunferentiam tangere sufficit, quãuis inæquales sint sibi ipsis: quia tamen quæ circulum ambiunt æquilatera, ea proinde sequetur esse æquiangula. Quæ verò trapezia aut alia quæuis irregularia circulum ambiunt, angulorum regulam non sequitur, veluti inscriptæ ostendimus sequi 22. tertij. Sola æquiangula & æquilatera discutiet hoc quarto Euclides, ob eorum regulatam methodum.

Diffinitio 7.

Recta linea circulo congruere dicitur, quãdo eius extrema in circuli circunferentiam cadunt.

Cùm lineam circulo congruere, coaptari, subtendere, describere duci, &c. huius significationis voces, quibus videmur iam antea prioribus demonstrandis vsi esse, idem sonent, putarent aliqui hanc diffinitionem frustrà ab Euclide positam esse, scilicet qui terminos diffiniret, post eorum cæptum vsum. Dicemus itaque lineas quas antea circulo adaptauimus, indeterminatas esse, ac confusas, nec

dat

datas quidē sua constantes & proposita lōgitudine, siue ea certa fuerit, siue incerta. Quas verò hac diffinitione explicamus, eas intelligamus esse quascunque nobis propositas diametrum circuli non excedentes Dato circulo coaptatas, illæ etenim ei circulo verè congruere dicuntur, eò quòd earum propositæ quantitas, dato circulo quadam demonstrandi facultate, non autem casu coaptetur, inter duo eius circunferentiæ signa producta, vt proxima & huius prima patefaciet propositio.

Propositio prima. *Problema 1.*

Intra datum circulum, datæ rectę lineæ diametro non maiori æquam rectam lineam coaptare.

Sit datus circulus A B C D, *cuius dimetiēs sit* A C, *data verò recta esto* F, *oportet iam ipsi* F *dato circulo, coaptare æqualem, siquidem* F *diametro æqualis existat, petitum adest. Si minor fuerit* F *ex* A C *diametro datæ* F *æqualis tollatur* A E. *Cētro vero* A, *internallo autē* A E, *circulus* E D B *describatur. Coniuncta* A B *(per diffinitionem 15 primi) æqualis erit ipsi* A E, *& proinde ipsi* F *datæ. Recta verò* A B *cùm minor sit dimetiente, in circunferentiam cadit. Recta igitur* A B *circulo* A B C D, *coaptata est, per 7 diffinitionem huius.*

Propositio secunda. *Problema 2.*

In dato circulo, dato triangulo æquiangulum triangulum inscribere.

Esto datus circulus A B G, *datum verò triangulum sit* D E Z, *Dato* A B G *circulo tangentem lineam (per 17 tertii) ducamus* T A I. *Ad rectam autem* T I *signum verò eius* A *(contactum) ipsi* D E Z *æqualis angulus constituatur* T A G, *angulo* D Z E *æqualis sit* I A B, *per 23 primi, coniuncta* G B. *Quoniam à contactu* A *recta* A B *circulum secat. Angulus* T A G *(ad tangentem) æquus erit angulo* A B G *in alterna sectione per 32 tertii. Eodem igitur argumento æqualis erit* I A B *angulus, angulo* A G B *in reliqua sectione. Sed* T A G *ipsi* D E Z *æqualis positus est:* A I B *vero angulo* D Z E. *Anguli igitur* A B G A G B *singuli, singulis* D E Z D Z E *æquales erunt. Et proinde (per corol. 32 primi) reliquus* G A B *reliquo* Z D E *æquus erit, nempe duorum rectorum residui. Aequiangulum itaque erit* A B G *triāgulum dato* D E Z *triangulo, & circulo* A G B *inscriptū, per 3 diffin. huius. In dato itaque circulo* A G B *dato triangulo* D E Z, *æquiangulum triangulum* A B G *inscripsimus.*

Propositio tertia. *Problema 3.*

Circa datum circulum, dato triangulo, ęquiangulum triangulum describere.

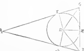
Esto datus circulus A B G *datum verò triangulum sit* D E Z, *cuius vnum latus* E Z *producatur vtrinque, in* I *&* T. *Suscipiatur centrum circuli (per 1 tertij) sitq́;* K *ad signum autem* K *dato* I E D *angulo, æqualis constituatur* A K B, *dato verò* D Z T *æqualis sit* B K G, *per 23 primi. Ad signa verò* A B G *tangentes, per 17 tertij ducantur* M A L M B N *&* N G L. *Quoniam autem quadranguli* A K B M *quatuor anguli quatuor rectis sunt æquales, per corrol. 32 primi, quorum bini oppositi* K A M K B M *sunt recti. Reliqui itaque* A M B A K B *duobus rectis sunt æquales. Sed duobus itidem rectis æquales sunt* I E D D E Z *per 13 primi. Bini itaque* A M B A K B *binis* I E D D E Z *æquales erunt. Ab æqualibus igitur æquales tollantur* I E D *&* A K B *positi. Reliquus* A M B *reliquo* D E Z *æquus erit. Eodem argumento ostendemus* G N B *ipsi* D Z E *æquum esse. Cùm bini* G K B G N B *& bini* D Z T D Z E

duobus rectis æquipolleant, &c. Trianguli igitur M N L *reliquus qui ad* I, *reliquo qui ad* D *trianguli* E D Z *æquus erit, per coroll. 32 primi. Circa datum itaque circulum* A B G *dato triangulo* D E Z *æquiangulum* L M N *triangulum descripsimus, per 6 diffini. huius.*

Propositio quarta. *Problema 4.*

In dato triangulo, circulum describere.

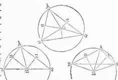
Proponatur triangulum A B G, *cuius duo* B & G *anguli bifariam seccentur per 9 primi, ductis* G D, B D *rectis, sese in* D *secãtibus. A signo autem* D *in singula trianguli latera perpendiculares agantur,* D E D I D Z, *per 12 primi. Quoniam triangulorum* D B E D B Z *duo anguli* D E B D Z B *recti sunt æquales, per constructionem, &* D B E *ipsi* D B Z, *per 7 communẽ senten. vnúmque latus* D B *commune, quod æquos subtendit angulos. Reliqua igitur latera* D E & D Z *æqualia erunt, per 26 primi. Similiter ostendemus* D Z & D I *æquales esse eisdem de causis. Centro itaque* D *interuallo autem* D Z *circulus ducatur* E Z I. *Ab eodem signo* D *tres rectæ æquales in circunferentiam circuli cadent, signum igitur* D *centrum erit circuli* E Z I, *per 9 tertij, qui tanget latera propositi trianguli* A B G, *per corol. 16 tertij. In dato igitur triangulo* A B G *circulum* E Z I *descripsimus, per 5 diffinitionem huius.*



Propositio quinta. *Problema 5.*

Circa datum triangulum, circulum describere.

Sit datum cuiusuis generis triãgulum A B G, *rectangulum, oxigonium, vel ambligonium, cuius duo latera quæ circa non minorem angulum bifariam diuidantur, scilicet* A B & A G *in* D & E *ab ipsis porrò signis,* D & E *perpendiculares excitentur rectis* A B A G, *sintq́;* E Z D Z *concurrentes in* Z, *coniunctis* Z A Z B Z G. *Perspicuum est (ex constructione) duo latera* Z D D B, *duobus* Z D D A, *& angulos* Z D B Z D A *(rectos) esse adinuicem æqualia. Et proinde (per 4 primi) basim* Z B *basi* Z A *æqualem esse. Similiter triangulorũ* A E Z G E Z *bases* Z A Z G *æquales ostendentur. Tribus igitur rectis* Z B Z A Z G *æqualibus datis Centro* Z *Interuallo autem* Z A *circulus describatur,* A B G. *Cùm à signo* Z *plures duabus in circunferentiam rectæ ducantur, ipsum* Z *centrum erit circuli,* A B G *vero circunferentia (per 9 tertij) per trianguli angulos* A B G *ducta. Circa datum itaque triangulum* A B G *circulum* A B G *descripsimus, per 4 diffinitionem huius.*



Corollarium.

Hinc sequitur centrum circuli triangulum rectangulum ambientis, in latus trianguli cadere, oxigonium vero ambientis intra triangulum cadit. Ambiligonium autem ambientis extra triangulum esse. *Nam rectum angulus semicirculum possidet, acutus verò plus semicirculo, obtusus autem minus semicirculo complet (per 31 tertij.) Tres itaque sunt sectiones, quarum in semicirculo linea secans habet centrum, in maiori verò sectione centrum est intus, in minori autem extra sectionem, & igitur extra triangulum in sectione constitutum.*

MONITVM.

Triangulorum tria genera diuersas inscribendi leges exigentia, vnica methodo tribus simul figuris deseruienti, circulo inscribi demonstrauimus paruula hac sumpta hypothesi, qua bifariam secamus duo latera trianguli, quæ circa non minorem angulum, hoc enim assumptum reliqua necessariò sequuntur.

Propositio sexta. *Problema 6.*

In dato circulo, quadratum inscribere.

Circulus

C[illegible] datus sit A B G D, *eius centrum* E, *diameter vero* A G, *cui ad angulos rectos excitetur ad signū* E *recta* B D, *per* 11 *primi, coniunctis* A D, D G, G B, B A, *quoniā centrū est* E, *æquales sunt rectæ* E A, E B, E G, E D, *& angulos æquos cōprehendunt, nēpe rectos. Bases itaque* A B, B G, G D, D A (*per* 4 *primi*) *sunt æquales, sed anguli* A B G, B G D, G D A, *&* D A G *sunt in semicirculo, cum* A G *&* B D *sint dimetientes, & igitur recti, per* 31 *tertij, quadrilaterum itaque rectangulum est & æquilaterum* A B G D, *& igitur quadratum, per* 30 *diffin primi. In dato itaque circulo* A B G D *quadratum* A B G D *inscripsimus.*

Propositio septima. *Problema* 7.

Circa datum circulum, quadratum describere.

Sit circulus A B G D, *cuius centrum sit* E (*per* 1 *tertij*) *dimetiens vero* A G, *cui ad rectos excitetur per* E *recta* B E D, *p* 11 *primi. Ad signa autem* A B G D *tangentes circulum ducantur,* I Z, Z K, K T, T I, *per* 17 *tertij, cùm autem recti sint* (*per hyppothesim*) *qui ad* E *anguli, &* (*per* 18 *tertij*) *qui ad* A *recti, parallelæ sunt* B D *&* I Z (*per* 28 *primi*) *simili argumento item parallelæ erunt,* T K, *&* B D, *ac binæ* I T, Z K, *ipsi* A G. *Parallelæ igitur erunt* I Z *&* T K, *necnon* I T *&* Z K, *cùm non sint in rectum positæ* (*per* 30 *primi*) *quia verò prallelogrammum est* A G, I T, *dimetienti* A G *æqualis erit* I T, *per* 34 *primi. Haud secus ostendentur reliquæ* T K, K Z, Z I *dimetienti æquales esse. Quadrilaterum itaque æquilaterum erit* I T, K Z, *cùm autem angulus* A G T *sit rectus, &* (*per* 34 *primi*) *rectus erit* A I T, *& eadem causa reliqui qui ad* T K *&* Z *recti erunt. Rectangulum igitur erit* I T, K Z, *& æquilaterum, & proinde quadratum, per* 30 *diffinitionem primi, cuius quidem latera tangunt circulum in signis* A B G D, *per coroll.* 16 *tertij. Circa datum itaque circulum* A B G D *quadratum* I T, K Z *descripsimus, per* 6 *diffinitionem huius.*

Propositio octaua. *Problema* 8.

In dato quadrato circulum inscribere.

Esto datum quadratum A B G D, *cuius duo latera* A B *&* A D *bifariam seccētur in* E *&* Z, *ductis parallelis scilicet* E T *ipsis* A B *&* D G, *&* Z K *rectis* A D *&* B G, *per* 31 *primi. Parallelogramma igitur erūt* A I, I G, E K, Z T, *per* 36 *diffinitionem primi, recta igitur* I E *ipsi* A Z (*dimidiæ lateris quadrati, per* 34 *primi*) *æqualis erit, similiter & reliquæ* I Z, I T, I K *eidē dimidiæ lateris, æquales ostendentur. Quare adinuicem æquales erunt, centro* I *interuallo* I E *circulus describatur per* E Z, T K, *qui non secabit rectas* A D, D G, G B, B A *super extremitate diametri, ad rectos constitutas, per* 16 *tertij, sequetur ab vno signo* I *plures duabus rectis in circunferentiam cadere, scilicet* I E, I Z, I T, I K, *quare signum* I *centrum erit circuli* E Z T K, *per* 9 *tertij, circunferentia autem tangit quadrati singula latera in* E Z T K, *per coroll.* 16 *tertij. In dato itaque quadrato* A B G D *circulum* E Z T K *inscripsimus, per* 5 *diffinitionem huius.*

Propositio nona. *Problema* 9.

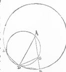
Circa datum quadratum circulum describere.

Detur *quadratum* A B G D, *excitatis dimetientibus* A G B D, *in signo* E *sese secantibus. Quoniam bina latera* A G A B, *& basis* B G, *binis* A G A D, *& basi* D G *sunt* (*per diffinitionem quadrati*) *æqualia, angulus* G A B *angulo* G A D (*per* 8 *primi*) *æquus erit. Triāgulorum itaque* A E B A E D *bina latera* A E A B, *binis* A E, A D *æqualia æquos comprehendunt angulos* E A B, E A D, *bifariam rectum* D A B *secantes. Bases itaque* E B, E D (*per quartam primi*) *sunt æquales. Similiter æquales ostendentur reliquæ* A E, E G *rectæ ac reliqui anguli recti bifariam secari. Quia verò anguli recti qui ad* A B G D *bifariam secantur, eorum dimidij* E A B, E B A (*æquales existentes*) *efficient bases* A E A B *æquales, per* 6 *primi. Similiter æqua-*

les ostendentur E B, B G, E D. *Centro igitur* F *internallo* F A, *circulus per* A B G D *ducatur* [illegible] *los quadrati* A B G D *angulos tangens. Sequetur, circa datum quadratum* A B G D *circulum* A B G D *descriptum esse, per 4 diffinitionem quarti.*

Propositio decima. *Problema* 10.

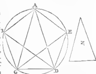
Isosceles, triangulum constituere, habens vnumquemque eorum qui ad basim sunt angulorum, duplum reliqui.



Proponatur recta A B, *quæ (per 11 secūdi) ita seccetur in* G, *vt quod sub tota* A B *& altero segmentorum* G B, *comprehensum rectangulum: æquum sit ei quod fit ex* A G *quadrato. Centro verò* A, *internallo autem* A B, *circulus describatur* B D E, *ipsi porrò* A G *æqualis applicetur recta circulo, sitque* B D, *per 1 huius. Et coniunctis* G D *&* A D, *circa triangulum* A G D, *circulus describatur* A G D E, *per 5 huius. Et quia quod sub* A B *&* B G *æquatur quadrato ex* A G, *idem æquabitur quadrato ex* B D, *quæ ipsi* A G *ponitur æqualis. Et cum recta* B A *circulum* A G D *seccet,* B D *verò eidē circulo incidat, ipsa* B D *(per 37 tertij) ducta a signo* B *extra circulum sumpto, circulum tanget. Angulus igitur* B D G, *ad tangentem, angulo* D A G *(in alterna sectione) æquus erit, per 32 tertij, communis ponatur* G D A. *Binis itaque* B D G G D A, *binis* G A D G D A *æquales erunt. Sed binis* G A D G D A *interioribus ex opposito æquus est exterior* B G D, *per 32 primi. Angulus igitur* B G D *binis* B D G G D A *(hoc est toti* B D A*) æquus erit. Et proinde angulo* A B D *(qui est ipsi* B D A *æqualis (per 5 primi) est enim isosceles* A D B, *& itaque* G D *recta ipsi* B D *(angulum æqualem subtendenti) æqualis erit per 6 primi, necnon rectæ* A G, *cui* B D *æqualis est posita. Cum autem* G D *&* A G *sint æquales, anguli* G D A, G A D *sunt (per 5 primi) æquales sed ipsi* G D A, *æqualis fuit* B D G. *Totus igitur* B D A, *ipsius* G A D *duplus erit, similiter &* D B A *eiusdem* G A D *duplus erit, est enim* A D B *ipsi* A B D *æqualis positus, isosceles itaque triangulum constituimus* A B D, *habens vnumquemque eorum, qui ad basim sunt angulorum* A B D, A D B, *duplum reliqui* B A D.

Propositio vndecima. *Problema* 11.

In dato circulo pentagonum ęquilarerum & æquiangulum inscribere.



Proponatur circulus A B G D E, *sumatúrque triāgulum isosceles (iuxta præcedētem) quod sit* Z, *ipsi vero* Z *æquiangulum, triangulum circulo inscribatur* A G D, *per 2 huius. Erūt itaq; eius anguli qui ad basim* A G D A D G *singuli dupli anguli* G A D, *ex præfata, seccētur bifariā anguli* A G D, A D G *per* B D *&* E G, *per 9 primi, cōiunctis,* A B, B G, A E, E D, *rectis. Erunt igitur quinque æquales anguli* G A D, A D E, B D G, A G E, *&* E G D. *Quare (per 26 tertij) circunferentiæ* A B, B G, G D, D E, *&* E A *æquales erūt. Et (per 29 eiusdem) sub eis æquales subtēduntur rectæ. Aequilaterum itaque erit pentagonum* A B G D E. *Cæterum cùm circunferentiæ singulæ, singulis sint æquales, binæ binis æquales erunt, vt* B G D *sectio,* G D E *sectioni, simul ac ipsis* G E A, B A E, A E D, *singulis sectionibus, quæ (per 21 tertij) æquales cōtinent angulos. Aequiangulum igitur & æquilaterum erit pentagonum. In dato itaque circulo* A G D, *pentagonum æquilaterum & æquiangulum* A B G D E *inscripsimus.*

Propositio duodecima. *Problema* 12.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & ęquiangulum describere.

Sit

Sit datus circulus A B G D *in quo (per præcedentem) sumantur quinque signa, angulos inscripti pentagoni designantia,* A B G D E. *Per ea vero signa tangentes circulum ducantur* T I I K K L L M M I, *ductis à centro quod sit* Z *rectis,* Z B Z G Z D Z K *&* Z L. *Quoniam (per 18 tertij) recti sunt* Z B K Z G K *anguli, recta* Z K *vtrosque subtendens, efficit quadratum (per 47 primi) æquum eis quæ ex* Z G G K. *Similiter eis quæ ex* Z B B K. *Quæ itaque ex* Z G G K *æquantur quadratis ex* Z B B K. *Ab iis porro æqualia auferantur ex* Z B *&* Z G *(quæ ex centro) quadrata. Reliqua ex* B K *& ex* G K *erunt æqualia, & proinde lineæ* B K *&* G K *atque (per 8 primi) anguli* B Z K G Z K *erunt æquales. Haud secus ostendentur æquales,* G L L D *& anguli* G Z L D Z L *adinuicem. Quia verò totus* B Z G *toti* G Z D *est (per 27 tertij) æqualis, super æqualibus* B G G D *circunferentiis, dimidius* K Z G *dimidio* L Z G *æquus erit. Æquiangula igitur erunt triangula* G Z K G Z L, *& reliqua* B Z K B Z L *quotcunque. Et vnum latus (quod scilicet ex centro) vni lateri æquale. Bases igitur (per 26 primi)* B K, K G, G L, L D, D M *æquales erunt. Duplæ igitur earum* T I I K K L L M M I *rectæ æquales erunt. Æquilaterum igitur est pentagonum* I T K L M. *Cæterum quia angulus* B K G *constat ex binis* B K Z G K Z *æqualibus ipsis* G L Z D L Z, *totus* B K G *toti* G L D *æqualis erit, similiter eisdem æquales erunt reliqui* D M E E I A A T B. *Æquiangulum igitur erit* I T K L M *quinquangulum. Circa datum itaque circulum* A B G D *pentagonum, æquilaterum & æquiangulum* I T K L M *descripsimus.*

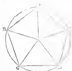
Propositio decimatertia. *Problema 13.*

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.

Sit datum pẽtagonum æquilaterũ, ac æquiangulũ A B G D E, *cuius* B G D, G D E *anguli bifariam diuidantur, per 9 primi, ductis* G Z, D Z *rectis,* A Z *autem (earum concursu) in reliquos angulos rectæ ducantur* Z E, Z A *&* Z B. *Quoniam autem binæ* B G, G Z *binis* D G, G Z *& anguli* B G Z *&* D G Z *æquantur, bases* B Z *&* D Z *æquales erunt. Similiter ostendentur* G Z *&* E Z *æquales, per 4 primi, & æqualia & æquiangula triangula* B Z G, G Z D, D Z E. *Et proinde reliqua* E Z A, A Z B *eodem argumento eisdem æqualia erunt, & æquiangula. Cæterũ ducantur à signo* Z *in pentagoni latera perpendiculares* Z I, Z T, Z K, Z L, Z M. *Triangulorum* Z T G, Z K G, *duo anguli* Z T G, Z G T, *duobus* Z K G, Z G K *æquales sunt, per constructionem, & vnum latus* Z G *commune, reliqua igitur* Z T, Z K *latera erunt æqualia, per 26 primi. ac eadem via* Z L, Z M, Z I *ipsis* Z K *&* Z T *ostendentur æquales. Centro itaque* Z *interuallo vero* Z I *ductus circulus, per æquè distantia à signo* Z *alia signa circunducetur* I T K L M. *In lateribus pẽtagoni existentia, quæ latera circulum tangunt, per coroll. 16 tertij, super extremitate diametri ad rectos constituta. In dato itaque pentagono æquilatero & æquiangulo* A B G D E, *circulum* I T K L M *inscripsimus.*

Propositio decimaquarta. *Problema 14.*

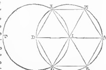
Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.



Esto datum pentagonũ æquilaterũ & æquiangulũ A B G D E, *cuius duo anguli* B G D *&* G D E *bifariam (ex 9 primi) seccentur, per rectas* G Z, *&* D Z. *A concursu autem* Z *ducantur* Z A, Z B, Z E. *Quoniam binæ* B G, G Z, *binis* D G, G Z, *& anguli* B G Z, *&* D G Z *æquantur, ex hypothesi, reliqua latera* B Z, *&* D Z *æqualia erunt, & triangula* B G Z G D Z *æqualia, & æquiangula, per 4 primi, necnon* E D Z *eisdem eodem argumento, æquabitur. Quia verò* Z G D *&* Z D G *anguli, æqualium dimidij, sunt æquales, rectæ,* Z G *&* Z D *æquales erunt, haud secus eisdem* Z B, *&* Z E *reliquæ, per 6 primi, erunt æquales. Angulus igitur* A B Z *dimidius erit anguli* A B G, *nam* A B G *(pẽtagoni) est reliquis* E G D, B G D *æqualis positus. Sed bini* A B Z *&* G B Z *æquales, continentur æquis lateribus* A B, B Z *ipsis* G B, B Z, *bases igitur* G Z, Z A *(per 4 primi) fiunt æquales. Rectæ itaque* A Z, B Z, G Z, D Z, *&* E Z *erunt æquales, centro quidem* Z *interuallo* Z A *circulus* A B G D E, *per singulos angulos pentagoni ductus transit, nec aliquod eius latus secabit, per 2 tertij, cùm intra circulum cadant. Circa datum itaque pentagonum æquilaterum & æquiangulum, circulum descripsimus.*

Propositio decimaquinta. *Problema 15.*

In dato circulo exagonum, æquilaterum & ęquiangulum, inscribere.



Datus circulus sit A E G, *cuius centrum* I *dimetiens verò* A I D, *centro* D *interuallo* D I *circulus describatur* E I G T, *coniunctis* E I B, G I Z, *item* A B, B G, G D, D E, E Z *&* Z A. *Quoniã rectæ* E D, G D *æquantur rectæ* D I, *cũ sint omnes ex centro circuli* E I G T, *& rectæ* E I, G I *eidem* D I *sint æquales, cùm similiter à centro circuli* A E G *oriantur. Adinuicem igitur erũt ipsæ* E D, G D, E I, G I *&* D I *æquales. Triangula itaque* E I D, I D G *æquilatera & æquiangula erunt, per 1 primi, quia verò tres trianguli interiores anguli duobus rectis æquantur, per 32 primi,* E I D *angulus, duorum rectorum tertiæ parti æquipollet, similiter &* D I G, *quare & reliquo tertio duorum rectorum æquiualet* G I B *angulus. Nam recta* G I *super* E I B *rectam consistens duobus rectis æquos efficit, per 13 primi. Aequales igitur sunt* E I D, D I G, G I B *anguli, & igitur* B I A, A I Z, *&* Z I E *(qui ad eorum verticem per 15 primi) erunt eis æquales & adinuicem. Et æqualibus rectis (quæ ex centro) comprehensi. Sequetur igitur (per 4 primi) bases* A B, B G, G D, D E, E Z *&* Z A *esse æquales. Aequilaterum itaque erit* A B G D E Z *exagonum. Cum autem* A Z E *&* Z E D *anguli & reliquorum singuli, ex binis æqualibus* A Z I, E Z I, *ipsis* Z E I, D E I *(qui æquãtur duorum rectorum duobus tertijs) fiant, ipsi erunt æquales adinuicem. Aequiangulum igitur & æquilaterum erit exagonum* A B G D E Z. *In dato itaque circulo* A E G *exagonum æquilaterum, & æquiangulum* A B G, D E Z *inscripsimus.*

Corollarium.

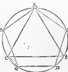
Hinc assequimur latus exagoni æquum esse ei quæ ex centro circuli id ambientis.

Quòd si exagoni reliquas circulo inscriptiones & circunscriptiones inquiramus, pentagoni methodum sectemur, 12. 13. 14. præcedentibus expositam, per rectas scilicet perpendiculares à centro in bases, circulum illi inscribemus, circulo vero exagonum circunscribemus per tangentes, &c.

Propositio decimasexta. *Problema 16.*

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

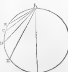
Esto



Esto datus circulus A C D, *cui per* 11 *huius inscribatur pentagonum* A B G D E, *& eidem per* 2 *huius ad signum* A *inscribatur triangulum æquilaterum* A C F. *Quoniam enim totius circunferentiæ tertiam partem subtendit* A C, *hoc est quinque quindecimas. Duo verò pentagoni latera* A B B G, *earumdem quindecimarum circunferentiæ subtendunt sex, cùm quodlibet quintum tres sumat quindecimas. Si ab ipsis* A B B G *subtendentibus sex, ipsam* A C *subtendentem, quinque tollamus, supererit* C G, *vna quidem pars quindecima totius circunferentiæ, coaptemus igitur rectam* G C *& ipsi reliquas æquales, circulo* A C D *(per* 1 *huius) ipsæ æquales circũferentias subtendent, per* 28 *tertij, & igitur circuli quindecimas. Quindecagonum igitur æquilaterum inscriptum est circulo* A C D. *Et quoniam binæ rectæ angulos quindecagoni constituentes, æquales sumunt circuli sectiones, in his sectionibus æqualibus, anguli (per* 27 *tertij) æquales erunt. Æquiangulum igitur, & æquilaterum est quindecagonum circulo* A C D *inscriptum. Cùm autem huic circulum inscribere, vel circunscribere, vel eidem circulo hunc circunscribere curabimus, ars pentagonorum, vt in exagono diximus, imitanda erit.*

Additio ad inuentionem infinitorum poligonorum.

Si in circulo duorum poligonorum latera coaptentur, ab vno signo, excessus arcus maioris supra minorem, comprehendet arcum tot futuri poligoni latera continentem, quot vnitatibus denominatio poligoni minoris lateris, denominationem maioris excedet: futuri autem poligoni laterum numerus, ex multiplicatione denominationum prædictorum poligonorũ consurget.



Vt exemplo elucidemus in circulo A B E *coaptentur latera exagoni quidem* A B *per* 15 *huius, pentagoni* A C *per* 11 *huius, tetragoni* A D *per* 6 *huius, trianguli verò æquilateri* A E *per* 2 *huius. Dico* A D *arcus excessũ supra arcũ* A B *scilicet* B D *arcũ, contingere tot latera optati poligoni, quot vnitatibus denominator ipsius,* A B *exagoni, denominatorẽ* A D *quadrati excedit. Quia verò is excessus est* 2 *vnitatum, duo erunt in* B D *latera. Optati verò poligoni denominator, ex multiplicatione denominationũ poligonorũ cõsurget, scilicet ductis* 6 *per* 4 *fiet* 24 *denominãs poligonum, cuius duo latera subtendent arcum* B D. *Qualium etenim tota circunferentia est* 24. *earum partiũ est* A B *subtendẽs* 4 & A D *sex. Si itaque ex* A D *sex partes subtendente tollantur quatuor, quas subtendit* A B, *supererunt ipsi* B D *duæ, qualium quidem tota est* 24. *Ex exagono igitur & quadrato, fit poligonum* 24 *laterum. Similiter ex exagono* A B *& pentagono* A C, *fiet poligonum* 30 *laterum, cuius vnum latus subtendet arcum* B C. *Nam* A B *ipsam* A C *denominationem vnitate tantum excedit, similiter quoniam* A B *excedit, ipsius* A E *denominationem ternario, arcus* B E *continebit tria latera poligoni* 18 *laterum. Hac eadem seruata methodo, infinita poligonorum latera perscrutari licebit.*

In quintum & sextum Euclidis PROOEMIVM.

VERAM philosophiæ legem sectantes, qua successiuè fieri motum edocemur, quæ liquidiora & percipiendæ geometriæ rudiora essent, quæ tuor prioribus Euclidē tradidisse libris, iam antea docuimus. Namque primo linearum situs, triangula & parallelogramma ita disposuimus, vt priores eorum naturæ partes, discentibus captandæ nullo negotio forent. Secundo linearum admirabiles sectiones. Tertio eius perfectissimæ figuræ circularis incredibiles virtutes, & penè naturæ legibus incomprehensas. Quarto demū regularium, planariúmque figurarum picturas circuli virtute sæpius astructas, quibus discentium mētes planè sublimiora totius geometriæ principia (hoc quinto inchoata) recepturæ, disponantur. Quocirca id obseruandum est, Euclidem post linearum & planorum constructionem traditā, methodica lege eorum inter se habitudinem siue respectum, illico nobis offerre, vt adinuicem facta comparatione siue relatione, quas quantitatum alterationes, aut variationes producant, nobis sit notum. Vt autem facilior præbeatur aditus habitudinis earum scrutandæ, præcensendum est geometriam solas magnitudinum quantitates, nullas verò earum respicere qualitates, easque vnitas & insolutas, ita vt discentium ingeniis earum integritas necessariò confusionem (discretionis vrgente penuria) pariat. Maximè cùm duplicem quantitatum naturam magnitudinibus attribuat geometria, certam scilicet & incertam, quas alieno nomine dicunt aliqui decimo libro, rationalem, & irrationalem, sane horum principiorum legibus arctatam earum vtramque. Quia verò harum quantitatum subest tanta respectus diuersitas, qua aliæ commensurabiles, aliæ verò (opposita denominatione) incommensurabiles dicantur. Certarum siue commensurabilium certis quantitatibus methodum, à numerorum facilitate accipere non dedignabitur, ac eorum obsequio tanta facilitate, confusas ex se & continuas quantitates distribuet, qua non solùm exactas habitudines certarum, sed incertarum respectus quadam lege diiudicandos aperiet, id quidem vnica multiplicandi lege, ab Arithmeticis implorata. Geometræ etenim nullam multiplicationem vnica magnitudine comprehendere possunt, propriam arithmeticis, cùm hi discreta, illi verò continua & insecta semper discutiant, eousque confusa, quod citra discretorum obsequium ad continuorum respectus seu affinitates explicandas fluctuantes palari cogantur. Quare quicquid multiplex aut multiplicatum siue quauis arte discretum, sub vnica quantitate denominabitur, id arithmetica lege factum oportet existimari. Hoc enim vnicum his quinto & sexto ab arithmetica exposcit geometria, scilicet multiplicationem, cuius adminiculo quantitatum respectus patefaciet. Quippe hoc vnum tibi præcinam decernens Euclidis elementa, à tam variis tantísque naufragiis temporum iniuria susceptis eripere, ac in Germanum geometriæ dogma quibusuis postpositis interpretum sententiis (vt par erat) restituere lectorem, si quæ non hactenus vulgaria à reliquísque tradita emerserint, obtestamur non priùs re planè perspecta ac mente concepta censuram agere Geometricas namque confusiones intelligentiæ conferendas discernere, non exiguum fuisse debili nostro conatui negotium, interpretúmque dissidia propalare. Quæ orta sunt non concepta Euclidis mente, in adaptandis numerorum principiis, cùm ad confusa continua numerorum discretione elucidanda ventum est, quorum præcipuum iuuamen multiplicationem comperit. Ea tamen solertia, vt æquè magnitudines multiplicato

quantitatum

quantitatum augmento, adaugeat, quam multiplicato earundem quantitatum decremento, ipsas minuat, semper autem maiori numero maiorem actionem exprimens, siue augmentum fuerit, siue decrementum. Maior etenim augmenti actio, magnitudinem maiorem depromet, maior similiter decrementi actio, magnitudinem minorem producet. Cupientes itaque confusas & sua continui sorte latentes geometriæ magnitudines, discentium ingeniis faciliori intelligentia infundere, earum quantitates propria natura continuas, hypothetica solutione ab arithmeticis dessumpta, sæpiusculè discernemus. Ea quidem quæ per frequentem eius magnitudinis sumptionem, aut per eiusdem frequentem detractionem, vel equidem permixtam scilicet frequentem partim sumptionem, partim verò detractionem producetur, vt satis superque norunt, qui arithmetices limina ingreßi fuere. Omnimodè tamen illam multiplicationem vocauit Euclides, qua latius vtetur tribus sextum sequentibus libris, nulla autem partitione, cuius intelligentia per multiplicationis oppositum sese sensibus offert. Quam etenim qui praxim sequuntur arithmeticam, vocant partitionem eandem decrementi multiplicationem, hoc est partium frequentem solutionem dicemus, nam ab vtraque idem oritur effectus. Cæterum geometricas quantitates discutiens Euclides, certarum intelligentiam ab incertarum quãtitatum notione distare, numeris in obsequium vocatis exponere cogitur. Quod autem tradendum suscipit, more regularis disciplinæ inserendum discentibus se nititur (Cuius quidem disciplinæ quo ampliora ac generaliora sunt præcepta, eo magis locuples, ac fœta reperitur methodus) Nam disciplinarum vires circa infinitum versantur: infinitæ namque certarum quantitatum sunt inter se conferentiæ, necnon incertarum inter se totidem, quæ mortalium sententiis nulla arte præterquam per numeris subiici possunt. Numerorum itaque leges inquirendæ sunt, quæ infinitos præ se ferant actus, quibus infinitæ illæ collatarum adinuicem quantitatum diuersitates, à seipsis recedere certa intelligibilique discrepantia notari poßint. Arithmeticem igitur scrutatus Euclides, vt quod in ea generalius liberiúsque præceptum, suo negotio decens sibi foret sumendum perquireret. Bina sibiipsis conuersa offendit principia, multiplicationem scilicet, & diuisionem, reliqua totius ferè arithmetices in se primordia fouentes. Multiplicatio etenim omnes augendorum numerorum in se complectitur facultates, diuisio verò minuendorum. Sub augmento autem, æqualitate, ac decremento cunctæ teguntur habitudinum alterationes (nam æqualitas nulli obnoxia existit alterationi.) Binarum rursus (multiplicationis & diuisionis) altera tantùm infinitos præ se fert actus, scilicet multiplicatio: omnis namque numerus per omnẽ multiplicari potest, diuidi autem nequaquam. Insuper omnis numerus infinitè multiplicari potest, contra verò diuidi tantùm potest numerus ad vnitatem vsque. Non igitur huic negotio diuisionem, ob finitam eius potentiam vtilem comperit Euclides, sed ideo multiplicationem asciuit, vt per infinitas eius operationes, infinitas suarum geometricarum magnitudinum comparationes propalaret. Quam quidem multiplicationem ea sagacitate in diuisionis contorsit obsequium, vt eisdem multiplicantibus numeris, propositam Geometricam magnitudinem decrescat, frequẽtibus suipsius partium detractionibus, quibus eandem increuit collatis frequentibus suipsius repetitionibus. Sed partium frequens detractio nihil aliud quàm diuisio operatur, quæ quidem frequentia, per liberam vnitatum multitudinem concipi potest. Diuisionem igitur quam Arithmetici finitam limitatámque patiuntur, multiplicatione perficit Euclides, quæ infinita conferendis quantitatibus profert exequia.

Hac ideo de causa multiplicationem tantùm sibi sociauit Euclides, vt potißimè infi-

nitorum propositorum infinita essent, siue in augmentum, aut equidem in decrementum obsequia. Cùm autem his quinto & sexto, vtræque & certarum & incertarum quantitatum leges præscribendæ sint, generalia tantùm proferemus elementa, æquè in certas vt in incertas quantitates imperantia, nullo earum perspecto discrimine, quousque ad decimum librum præfatis prius arithmeticorum elementorum tribus libris nos conferamus. Sed quia incertarum quantitatum methodus, ex certarum traditione patefieri debet, suscipiet hoc quinto Euclides comparandas per multiplicationem, seu æquè multiplicia magnitudines quibus adminiculis quantitatum respectus, siue respectuum naturam propalabit, collatis quidem maioribus ad minores, aut certè minoribus ad quantitates maiores, præfata multiplicandi lege. Quánam verò arte fiant hæ decrementi multiplicationes, septimo libro dicturi sumus ac binis eum sequentibus, vt tandem decimum attingentes, quantitates numeros recipientes, à quantitatibus numeros non recipientibus secernamus · interdum quæ vtrisque conuenient fundamenta iacientes.

EVCLID-



EVCLIDIS DEMONSTRATIOnum restitutarum Liber quintus.

Diffinitio 1.

PARS, est magnitudo minor, quæ à maiore sumitur.

Receptum est omne analogum prius distinguẽdum quàm esse diffiniendum: distinguemus itaque hãc geometricam partem, à parte arithmetica. Cùm etenim geometricæ denominationes quantitatem sonent confusam, Arithmeticæ verò quantitatis denominationem, numeris distributam proferant. Partem hanc geometricam esse dicemus, non tãtum (vt aliquibus placuit) eam quæ sæpius repetita totum præcisè cõstituit, quæ arithmeticis peculiaris existit. Sed præter id eam quæ quouismodo à minore sumpta maioris quantitatem sui facta ad reliquum comparatione exprimat. Confusè autem hanc diffinimus partem, geometricum imitantes morem, eò quòd omnis quantitas minor à maiore detracta, pars eius liberè dici poßit. Detractiones autem illæ in varias incidentes quantitatũ naturas, ob immensam geometriæ in magnitudines potentiam, quid producant suis locis (Supero fauente) narrabimus, inchoantes interdum ab iis, quæ huic sese offerunt discutienda negotio. Pars itaque ea dicetur magnitudo, quæ ad totum relata ab ipsóque detracta aliquid residuũ relinquit. Siue ea pars sæpius repetita totum præcisè constituat, siue per nõ præcisas repetitiones, illud idem componat. Aut equidem per partis ablatæ reassumptionem idem totum reintegret, vt quandoque decimo dicturi sumus. Ea semper minor à maiore quauis arte sumpta, maioris pars apud geometras dicetur.

MONITVM.

Huius diffinitionis voces aliquas transtulimus, cùm dixisset Theon partem eam esse quæ totum metitur, non existimantes huic sententiæ Euclidem subiacere. Quippe qui futuro decimo incertam magnitudinem à certa proposita detrahere (vt incertam eam propalet) sibi futurum esse præuidet. Et proinde incertam veluti totius certæ abstractum, eiusdem certæ partem fore concludit, suo toti penitus incommensurabilem: nihilominus partem diffinisset eam, quæ maiorem vel totam metitur magnitudinem (licet toti certe incommensurabilem futuram esse ab illa detractam, apotomen se ostensurum expectaret, 73 decimi, ac secta 11 secundi recta sectiones, partes esse videret) non credimus, obstante horum elemẽtorum ac totius geometriæ immaculata methodo, cuius facultas ad commensurabiles & incommensurabiles defertur quantitates. Non igitur Euclidem eius arithmeticæ partis diffinitionem geometriæ destinasse credemus. Quam ideo scripsit Theon partis diffinitionem, arithmeticis relinquemus. Is nãque vtriusque disciplinæ diffinitiones commiscuit, immemor quãto abinuicem distent. Nos itaque disciplinarum dignitatem obseruantes, quæq; cuius competant, seorsum explicanda esse consulimus, ne cùm ad decimum peruenerimus (vtriusque certæ scilicet ac incertæ quantitatis præcepta docentem) fœdata extet huius mathesis immaculata methodus, exceptioninibus, limitationibus, restrinctionibus, ampliationibus, & huiusce cautelis incertarum professionum cultioribus ornamẽtis. Sed sibi perpetuo constans certis valletur principiis. Et tandem commune illud 9 eloquium (totum scilicet sua quauis parte maius haberi) veneremur.

Diffinitio 2.

Multiplex est maior minore, quando eam metitur minor.

Hanc multiplicis vocem à numeris subfuratur Euclides, cuius relatiuam simplicem esse dicemus, non autem partem, vt Campanus & Theon asseruerunt. Totum namque parti relatiuè collatum, generaliora his existunt. Omne etenim multiplex simplicis est totum, simpléxque multiplicis pars. Sed non à conuersa omne totum est suæ partis multiplex, cùm omne totum ad partem habitudinem numerorum non recipiat, quam multiplex ad simplicem magnitudinem suscipit. Et ideo eam dicit esse maiorem, quam minor metitur, quia per numerum maiorem multiplex, per minorem verò (aut verius vnitatem) simplex denominatur. Atqui omnem numerum metitur vnitas: facilè igitur conceptu erit, simplicem metiri multiplicem, vt autem hæc suo ordine distribuamus, Geometriæ imprimis quantitates continuas ac confusas, sola vnitate denominari iampridem suscepimus. Quæ

vnitas nulla [illegible] nem aut multitudinem in se patitur. Similiter geometr[illegible] dine, aut quauis sectione caret, & ea propter nihil multiplicare potest.

Quemadmodum enim quantitas vnitate denotata in partes secta, relicto [illegible] pit numeri partium nomen: Sic & geometrica quantitas, vnica, siue continu[illegible] discreti nomen, relicto continui nomine, suscipit. Cum autem multiplicis denomina[tio a multi]tione dependeat, multiplicatio vero a numeris. Multiplex (numerorum legem prosequentes [illegible] mus operationem illam seu effectum multiplicandi aut equidem eam actionem, qua numerus [illegible] cem quantitatem sua discretione ita in augmẽtum vel decrementũ alterat, suarum quidem [illegible] tum repetitione, quod ab hoc effectu procreata quantitas, respectum in simplicem ab altera[illegible] mero denominatum concipiat. Multiplex namque nec maius aut minus a magnitudine [illegible] dici potest, sed ab actionis quantitate a maiori vel minori vnitatum frequentia genita. Quare non quantitati multiplicationem inesse putemus, sed tantum ei actioni seu operationi, qua per alterantem numerum ex simplici producitur multiplex. Quia igitur alteratio illa numero exequiũ parat, simplex verò vnitatis denominatione tegitur, manifestum erit multiplex illud exequium maius simplice exhiberi, cum semper numerus vnitate maior existat, ac numerum vnitas semper metiatur. Minor itaque simplex vnitate conclusa, quæ per vnitates alterantis numeri multiplicem producit, dicetur eam multiplicem, & ideo maiorem, per vnitates alterantis numeri metiri, & eiusdem dicetur pars, aut partes arithmeticæ, quæ ad multiplex arithmeticum sunt relatæ, non autem pars geometrica, cum non semper geometrica pars, multiplex totum componens sub numerorum respectu suscipere possit. Quare hanc multiplicis vocem, non ad omnes geometricas magnitudines sumpsit Euclides, sed ad eas tantum quæ respectum inter se seruant quem numeri. animaduertendũ autem est, geometriæ leges aquè in infinitũ quantitatũ decrementum, vt in infinitũ incrementũ sua dilatare dominia. Qualibet namque magnitudo infinitè minui, vt infinitè augeri potest. Cum igitur multiplicandum proposita quantitatis augmentum suscipimus, multiplex maiorem producet quantitatem multiplicata. Si verò decrementum, minorem multiplicata producet. Eorum tamen multiplicium vtrumque (vt iam diximus) à maiori denominatur numero: eò quod semper multiplicatum quouis expressum numero pro vnitate tanquam vnum sumatur, augendum quidem vel minuendum. Multiplicationem vero denominans, semper est numerus, à quo dictus multiplex, semper simplici multiplicato maior erit. Nam dictio multiplex actionem multiplicandi, non autem quantitatem sonat, vt exemplo augmentum magnitudinis A per vnitates numeri B multiplicantes producemus C, multiplex ipsius A augmentum, scilicet quadruplum A multiplicante B numero denominatum. Si vero alicuius magnitudinis E decrementũ multiplicantes, per vnitates numeri G (decremẽtũ significatis) producamus E, erit idem E multiplex decrementum magnitudinis E, scilicet $\frac{1}{3}$ hoc est tertium à numero G ($\frac{1}{3}$ decrementum multiplicante) denominatum. vt de his latius cum de numeris peculiari traditione septimo libro dicturi sumus 16 diffinit. proprium agentes negotium, Supero propitio, tres multiplicandi discutientes differentias.

Manifestum itaque relinquitur magnitudinem C (vnicè A magnitudinis augmentum) maiorem esse augmenti denominatione, magnitudine A simplice, scilicet quadruplam: nam cum augmentum agimus, quæ huius augmenti plus exprimit actionem, maioris meretur denominationem. Similiter quia E maius expressit decrementum simplice proposita E, suscepto decrementi negotio, ea quæ magis indicat decrementum, seu maiorem decrescendi actionem, eadem lege maioris meretur denominationem, scilicet effectus non quantitatis. Diximus enim multiplex effectui, actioni, vel operationi, non autem quantitati propriè adhærere. Vtraque igitur via cum multiplex siue decrementum, siue fuerit augmentum numero exprimatur, multiplicanda verò quantitas vnitate, perspicuum erit multiplex illud semper maius esse, & insuper minorem vnitate significatam, semper metiri multiplicem numero significatam. Hanc confirmabit multiplicandi methodum 10 diffini. huius, ac postmodum theoremata. Cùm itaque multiplex sit à numeris sumpta denominatio, ea tantùm ad quantitates habitudinem seu respectum numerorum habentes pertinet. Quare cum multiplicem denominabimus aliquam magnitudinem, non substantiam eius, non qualitatem, aut equidem eius quantitatem considerabimus, cum hæc arithmetica nõ consideret. Sed tantum vnitatum frequentiam maiorem vel minorem (quam vocant arithmetici numerum) per quam illa proposita magnitudo plus vel minus optatum a geometria finem consequitur, hoc est augmentum æqualitatem, vel decrementum. Maior igitur vnitatum frequentia magnitudinem augens, eam maius efficit multiplex. Veluti maior vnitatum frequentia eandem minuens, maius multiplex dicetur, aliud quidem incrementum,

...tum, aliud vero decrementum.

Diffinitio 3.

Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quoad quantitatem facta adinuicem habitudo.

Quoniam quantitatis proprium dixit Aristoteles esse secundum quam quid æquale maius, vel minus, dicitur, Diffiniemus rationem geometricã eam esse, quæ habitudinem siue respectum vnius magnitudinis ad alteram (quoad quantitatem comparatæ) in se habet. Quoad quãtitatem præcipuè dicimus, cum inter quasuis magnitudines, non sequetur rationem haberi, sed tantum inter eas quæ commune habent quantitatis genus, licet diuersa in se patiantur quædam accidentia. Illud nanque genus exprimi patitur qua earum maior, minor, aut æqualis fuerit, tanquam verum geometriæ subiectum, vt lineæ ad lineam, plani ad planum, solidi ad solidum, motus ad motum, temporis ad tempus, numeri ad numerum, soni ad sonum, seu interualli (sonorum rationem exprimẽtis) ad interuallum quæ singula ita quantitati subiiciuntur, vt qualibet magnitudo reliqua poßit maior, minor aut æqualis dici. Nihil item refert eas magnitudines diuersas informare naturas, siue accidentium species, dum tamen inter eas illud quantitatis idem sit vinculum, quo hæc illa maior, minor, aut æqualis dici valeat, vt veram rationem subeant geometricam. Diuidemus tamen hanc magnitudinum eiusdem generis rationem incognitam & confusam seu surdam. Nam magnitudines rationẽ siue respectum inter se habentes, quam habent numeri, ad se inuicem rationem cognitam, certam, ac determinatam habere dicentur, eo quod numerorum comparatio sit semper patula ob discretionis eorum luculentiam. Quæ verò eam habent affinitatem aut respectum, qui nullis exprimi potest numeris, & proinde rationem numerorum nõ habent. Illa rationem confusam, ignotam, siue surdam habere dicentur, quarum naturam (Deo duce) decimum exponentes, latius scrutabimur. Cum enim sola discretio (quæ numeris est propria) quantitatum continuarum nobis adaperiat habitudinem, manifestum erit quantitates discretione numerorum priuatas, & intelligentia ideo priuari. Has enunciarunt Euclidis interpretes, libro decimo Irrationales sed impropriè a negatiua priuante Irrationales nanque ratione carentes, siue priuatas propriori voce denominari poterant. De his porro (quas incertas dicimus rationes) supersedendum ad decimum vsque librum erit. Interdum rationes cognitas, certas, ac determinatas (morem præcedentium Euclidis interpretum referentes) subdiuidemus, in rationes maioris inæqualitatis, minoris inæqualitatis, ac æqualitatis. Maioris autem inæqualitatis sunt rationes, quarũ antecedens maius est consequente. Minoris verò inæqualitatis, quarum antecedens minus est consequente. Aequalitatis demum, quarum antecedens consequenti est æquale, hæc enim nullas in se patitur subdiuisiones: maioris quidem inæqualitatis rursus quinque fient species, scilicet multiplex, superpartiens, superparticularis, multiplex superpartiẽs, & multiplex superparticularis. Multiplex ratio est cuius antecedens sæpius in se repetit, siue multiplicat consequens, vt 6 ad 2 (tripla) quia 6 continet in se ter binarium 8 ad 2 quadrupla, quia 8 continet in se quater binarium, &c. Superpartiens est cum antecedens continet in se semel consequens & aliquas eius arithmeticas partes, vt 5 ad 3 (superbipartiẽs tertias) cõtinet enim 5 semel ternariũ & insuper ternarij duo tertia, & 7 ad 4 (supertripartiẽs quartas) &c. Superparticularis est cuius antecedẽs continet semel consequẽs & vnã eius arithmeticã partem, vt 5 ad 4 (sesquiquarta) cõtinet enim 5 semel 4 & vnum ipsius quartũ, 4 ad 3 (sesquitertia) & 3 ad 2 (sesquialtera) &c. Multiplex superpartiens ex multiplici & superpartiente composita, ea est cuius antecedens plures in se capit consequens, & insuper plures eius arithmeticas partes, vt 12 ad 5 (dupla superbipartiens quintas) nam 12 continet 5 bis, & duo eius quinta, & 8 ad 3, (dupla superbipartiens tertias) continet enim 8 bis 3, & duo eius tertia. Multiplex superparticularis est, cuius antecedens continet pluries consequens, & insuper ipsius vnam arithmeticam partem, vt 5 ad 2 (dupla sesquialtera) continet enim 5 bis binarium & vnam eius partem dimidiam, & 7 ad 3 dupla sesquitertia, continet 7 bis ipsum 3, & tertiam eius partem.

Minoris autem inæqualitatis totidem aßignarunt species, eodémque digestas ordine mutatis scilicet antecedentibus in consequentes terminos siue quantitates. Cùm enim mutantur multiplicis rationis termini, fit ratio submultiplex, vt 2 ad 6, & 2 ad 8. Cùm mutantur superpartientis termini, fit ratio subsuperpartiens vt 3 ad 5. & 4 ad 7. Cum mutantur superparticularis termini, fit subsuperparticularis ratio, vt 4 ad 5, & 3 ad 4. Mutatis vero multiplicis superpartientis terminis, fit ratio submultiplex superpartiens, vt 5 ad 12, & 3 ad 11. Mutatis demum multiplicis superparticularis terminis, fiet submultiplex superparticularis, vt 2 ad 5, & 3 ad 10. Harum minoris ad priores

maioris inæqualitatis nihil esse dixerunt distantiæ, dempta sola particula (sub) de[illegible] posita. Reliqua eis communia esse professi sunt, quicquid vni conueniret, alteri [illegible] centes.

Vnde prospiciens plures quosdam in lapsus decidisse, quantitatem rationum minoris inæqualitatis ignorantes, Prænoscens insuper cæptum Euclidis per numerorum libros peragendum. Rationem nimirum certam, quæ inter discreta & continua ceciderit, ab ea quæ inter discreta tantum cadet, lata differentia ob theorematum integritatem fouendam obseruaturum, cùm hæc pura arithmetica, illa autem partim geometrica complectatur elementa: siquidem discreti ad continuum respectum partim geometricum arbitremur, quemadmodum discretæ ad discretam arithmeticam iudicamus affinitatem. Hac de causa tẽpus ac operam redimentes rationem certam breuiori distributione secantes, per æqualitatis & inæqualitatis proferemus species. Rationem æqualitatis leuis admodum cura prætermittentes, quæ suipsius multiplicem parit denominationem, nulli alterationi obnoxiam, vnitate nempe significatam reponemus, rationum inæqualitatis species sequuturi. Rationem igitur inæqualitatis in binas maioris & minoris inæqualitatis rationes diuidemus. Maioris rursus inæqualitatis rationes in duas species. Multiplicem ac superpartientem discernemus. Minoris autem inæqualitatis rationes proximarum conuersas, in binas totidem distribuemus species, Particularem scilicet & partientem. Harum rationum singulas exponentes dicemus, æqualitatis rationem, eam quæ ab vnitate denominata antecedentis in consequens multiplicationem per vnitatem denominantem perficit, quæ secando aut multiplicando propriam quantitatem suapte natura alterare non valens, necessario antecedens consequenti perpetuo relinquet æquali, vt 4 antecedens per vnitatem ductum in incrementum, siue decrementum semper producere eundem 4 multiplicem, suo simplici æqualem cernemus, quæ quidem terminorum æqualitas æqualitatis rationem sua conuersa æqualem esse cogit.

Inæqualitatis rationem verè multiplicem compellabimus. Eius namque denominatio per numerum expressa, antecedentis in consequens multiplicationem ac alterationem pronunciat, siue in augmentum, aut in decrementum, aut etiam in vtrumque pergat multiplicatio, quæ quidem numero non vnitati conuenit.

Hæc itaque per repetitionem consequentis in antecedente exprimetur. Illius verò repetitionis denominatio per vnitates numeri multiplicantis facta, in augmentum, vel decrementum, rationis antecedentis ad consequens quantitatem perfectè resonat. Huius inæqualitatis rationem quam in genere multiplicem diximus, in binas denuo discindemus rationes. Maioris inæqualitatis seu incrementi, & minoris inæqualitatis seu decrementi.

Maioris inæqualitatis ratio seu incrementi ea est, cuius antecedens ad consequens incrementum habet, vel cuius antecedens maius est consequente, hanc in binas distribuimus species, multiplicem ac superpartientem.

Multiplex ratio sui peculiari intelligentia hæc erit, cuius antecedentis quantitas pluries in se repetit consequentis quantitatem. Necnon ea quæ inter numeros & vnitatem cadit, aut equidem quæ discretum continuo confert. Hæc quandoque inter discreta quum eius termini numeris exprimentur reperiri potest, non tamen illi id est proprium, terminorum nempe eius affinitas ad eam quæ inter discretum & continuum decidit affinitatem, tandem reducitur. Huius multiplicis exempla sunt veluti 2 ad 1. 3 ad 1. 7 ad 1. 10 ad 1 sicq; numeri discreti ad vnitatem continuam quouis exemplo cernimus conferentiam. Quod si 21 ad 3 rationem multiplicem ac alias similes numeris expressas inter discretas dixerimus reperiri quantitates. Ad hæc, rationem his numeris 21 ad 3 expositam non esse puram numerorum, sed discreti ad continuum, nempe 7 ad 1, hoc est septenary discreti ad vnitatem continuam & insolutam, siue numeri ad vnitatem ad quam cunctæ conueniunt tandem multiplices, ad minimas suæ rationis partes reductæ.

Superpartientem verò rationem eam esse diffiniemus, cuius consequentis quantitas antecedentis quantitatem præcisa repetitione suipsius integrare nequit. Cum autem hæc sit maioris inæqualitatis, antecedentem consequente maiorem possidet. Non tamen in se plures repetitiones consequentis præcisas recipientem, hac de causa consequentis quantitas necessariò discreta permanet. Hæc itaque superpartiens relicta priori multiplici, reliquas quatuor ab antiquis proditas, in se complectitur, cunctas scilicet vnica copulans essentia, qua discretum maius minori discreto confertur, siue numerus numero, nusquam inter continua aut inter discretum & continuum necessariò reducenda, vt 3 ad 2, 5 ad 3, 12 ad 5, &c. quas ad vnitatem & numerum reducere nequaquam fas est. His itaque superpartiente & multiplici, quasuis maioris inæqualitatis concludemus species certas.

Minoris

Minoris autem inæqualitatis binas totidem prioribus oppositas siue earundem conuersas statuimus particularem & partientem.

Particularem rationem multiplicis conuersam diffiniemus eam esse, cuius antecedentis quantitas pluries sumpta consequentis quantitatem producit, à consequente sumens vnicam tantùm particulam. Hæc ideo multiplicis dicitur conuersa, quòd illius antecedens huius fiat consequens, ac è contra, huius antecedens illius fiat consequens, vt 1 ad 3, 1 ad 7, 1 ad 10, 6 ad 24, vel 1 ad 4, quæ idem sonant, ad minimas partes reductæ.

Partientem verò rationem eam dicemus, cuius antecedens plures sumit antecedentis partes discretas, nusquam autem integrum antecedentem componentes. Hæc superpartientis vera est conuersa, vt 2 ad 3, 3 ad 5, 5 ad 12, quæ nulla arte ad continuas reduci possunt, eò quòd antecedens eum respectum quem vnitas in aliquem numerum, ad consequentem habere nequeat.

Hac breui rationum diuisione cunctas inæqualitatis rationes complectimur, multiplici scilicet ac eius conuersa particulari continui ad discretum quaslibet, superpartiente autem & partiente reliquas quæ inter discreta quæq. cadunt, concludentes. Quæ videntur omnes rationes inæqualitatis quas certas dicere ausi sumus referre. Nam si continui ad continuum rationes relinquere diceremur, has in priorem rationum sectionem siue diuisionem decidisse, qua certas ab incertis diuisimus rationes, memores esse conueniret. Continui namque ad continuum respectus incertas æquè vt certas complecti potest rationes. Ratio namque geometricorum continuorum æquè rationes numerorum arithmeticorum siue certas continet, ac incommensurabilium quantitatum, siue incertas vnica continuorum habitudine, quæ semper actione qua antecedentis quantitas in consequentis quantitatem operatur, exprimenda venit. In discretis quidem per numerorum multiplicationem in continuis verò inexpressa, numeris obsistit.

Ratio certa diuiditur in rationes.

Aequalitatis vt inter 4 & 4.

Inæqualitatis.	*Maioris Inæqualitatis.*	*Multiplex*	*6 ad 2*	*Tripla.*
		Superpartiens	*5 ad 3*	*Superbipartiens tertias.*
		Superparticularis	*5 ad 4*	*Sesquiquarta.*
		Multiplexsuperpartiens	*8 ad 3*	*Dupla superbipartiens tertias.*
		Multiplexsuperparticularis	*7 ad 3*	*Duplasesquitertia.*
	Minoris Inæqualitatis.	*Submultiplex*	*2 ad 6*	*Tertia.*
		Subsuperpartiens	*3 ad 5*	*Tripartiens quintas.*
		Subsuperparticularis	*4 ad 5*	*Quadripartiens quintas.*
		Submult. superpartiens	*3 ad 8*	*Tripartiens octauas.*
		Submult. superparticularis	*3 ad 7*	*Tripartiens septimas.*

Breuior rationum inæqualitatis diuisio.

Inæqualitatis	*Maioris Inæqualitatis*	*Multiplex*	*6 ad 2*	*3 ad 1*		
		Superpartiens	*5 ad 3*	*5 ad 4*	*8 ad 3*	*7 ad 3*
	Minoris Inæqualitatis	*Particularis*	*2 ad 6*	*1 ad 3*		
		Partiens	*3 ad 5*	*4 ad 5*	*3 ad 8*	*3 ad 7.*

Qua de causa omnium harum rationum antecedentes termini consequentium dicantur multiplices, consequentésque antecedentium simplices, siue in augmentum siue in decrementum, licet ipsis consequentibus fuerint maiores vel minores, illud triplici multiplicandi forma fieri declarabimus cum ad numeros (ad quos verum spectat negotium) venerimus, interdum in habentibus rationem certam aut discretam, quamlibet antecedentis quantitatem cuiuslibet consequentis quantitatis multiplicem haberi posse profitebimur, binis quidem operationibus, aut qua numerus vnitatem multiplicat, aut equidem qua numerus numerum multiplicat, expressam, siue in augmentum, siue in decrementum peragatur multiplicatio, aut in vtrumque. Cum itaque omnimodas rationes certas à multiplicantibus numeris exprimi dixerimus, rationem verè exprimere possumus per denominationem multiplicationis, qua antecedens multiplicat consequentis augmentum vel decrementum, ita quod hac lege multiplicatio rationem siue magnitudinum habitudinem exprimit. Non tamen ab ea maior vel minor dicitur ratio, eo quod ratio non vnitatum frequentiam, sed quantitatum respectum tantum consideret. multiplicatio vero vnitatum multiplicantium frequentiam, non magnitudinum quantitatem, cuius multiplicationis denominatio, rationis præcipuam substantiam profert, quia vero rationis quantitas à magnitudinum propositarum, quantitate dependet Reperiemus quauis facta multiplicatione, rationem esse maiorem, cuius antecedens plus de consequente sumit, hoc est, cuius antecedens plures in se continet consequens, aut plures eius partes, seu partes maiores, inde consequimur denominationem quantitatis rationum, non a simplicibus pendere numeris, sed per multiplices exprimi numeros, eò quod à multiplicatione sint producti. Nam senary ad binarum rationem multiplicem, triplam nominantes, eam multiplici denominantimus numero, (nempe triplici) & duplam duplici, quadruplam quadruplici, & reliquas huiusce certitudinis rationes numerorum respectu copulatas, non simplicibus sed multiplicibus numeris denominari concludemus, ostendentes eam habitudinem, quæ ratio dicitur, a sola prodire multiplicatione Sicut enim simplex numerus simplici per additionem coniungitur, ita multiplex rationis denominator, multiplici rationis denominatori, multiplicatione copulatur. Additio igitur multiplicium sola fit multiplicatione, eáque rationum erit additio. at quantitatum additio per simplicium numerorum magnitudines significantium additionem, producitur. Rationem itaque dicemus esse, respectum seu habitudinem, quem inter se habent duæ magnitudines, idem genus quantitatis habentes. Quiquidem respectus in certis rationibus, per eam multiplicationem qua antecedens consequentis multiplicat augmentum vel decrementum, exprimitur. In incertis vero nulla multiplicandi discretione respectus ille patefit, sed surdas & penitus inexpressas denominari eas rationes, ea de causa cogit, quod nullis numerorum discretionibus vti valeant, sed tantùm confusè maiores aut minores reliquis ostendi possint. Affinitatem tamen sibi sumunt à muta illa sumptione, qua antecedens plus vel minus de consequentis quantitate repetit, non secus quam certæ aut discretæ. Quare surdas rationes æquè à surda multiplicatione (si fas sit dici) denominari, & certas ea quæ inter discreta cadit, existimabimus.

Diffinitio quarta.

Rationem habere adinuicem magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ, possunt se inuicem excedere.

Vbi expositum est quid sit ratio, siue quantitatum habitudo, præponenda fuit hæc diffinitio, exponens inter quas magnitudines hæc habitudo dicta ratio cadat. Ait autem magnitudines inter se rationem habere dici, quæ multiplicata, hoc est, per aliquas numeri vnitates sumptæ, se inuicem excedere possunt: illud præassumptum (quantitates rationem habituras eiusdem optari generis) sequitur Euclides Si igitur idem habeant quantitatis genus, facile frequẽs vnius repetitio, aliam non repetitam superabit, adepta namq. per repetitionem maiori quantitate. Quod si diuersa quantitatis habeant genera, inter eas facta habitudo, rationis nomine priuabitur, vt proxima expositum est diffinitione. Nec insuper repetitæ illæ diuersorum generum quantitates, quibusuis numerorum vnitatibus sese excedere poterunt, eò scilicet quod ad se inuicem comparari nequeant, veluti sonus ad motum, tempus ad pondus, linea ad superficiem, & cæteræ huiuscemodi differentiæ. Hora etenim per quemuis numerum in menses & annos producta, stateræ ciclum nusquam excedet, necnon & ciclus in quotuis talenta productus, horam nusquam excedere dicetur, cum quantitatum quoad genus diuersitas, nullam inter eas haberi sinat collationem, a qua ratio possit oriri, vnde propria denominatione, irrationales inter se à rationis priuatione dici possunt. Quod si opponatur (vt a quibusdam) angulum contingentiæ 16 tertij descriptum, nulla multiplicatione rectilineum angulum excedere,

ac proinde nullam ad rectilineum consequi rationem. Dicemus illius anguli contingentiam non esse quantitatis denominationem, sed naturæ, seu potius qualitatis. Quare quantitatis anguli denominationem (quæ fuit linearum inclinatio) multiplicantes, hoc est, easdem lineas immoto contactu à seipsis remouentes, angulum producemus aliquo rectilineo maiorem, ac ideo inter eos angulos ratio quidem erit, sed incerta siue incognita. Concludemus itaque magnitudines idem genus habentes quantitatis (quam solam intuetur geometria) sese per multiplicationem excedere posse ideoque inter eas tantum rationem haberi. Nec facilius iuxta quantitatis proprium, quid maius dici potest altero, quàm per multiplicationis excessum, nec quid minus, quam per multiplicationis decrementum. Quæ igitur magnitudines multiplicatæ sese excedunt, rationem adinuicem habent.

MONITVM.

In hac diffinitione dictionem (possunt) transtulimus, ne sint qui huic verbo hærentes, magnitudines se adinuicem multiplicandas existimēt, quod longè abest, cum sint geometricæ magnitudines, idcóque continuæ ac vnitate denominatæ, omni multiplicādi vi priuātur. Non itaque dicemus, quæ possunt multiplicatæ inuicem, excedere, sed multiplicatæ (scilicet quouis numero cuius est proprium multiplicare) sese possunt excedere.

Diffinitio 5.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam qua tertia ad quartam, quando primæ & tertię æquemultiplicia, secundæ & quartę æquemultiplicia, iuxta quamuis multiplicationem vtraque vtramque vnà excedunt, vnà aquales sunt, vel simul deficiunt sumptę adinuicem.

Dicto quid sit ratio, deinde inter quas magnitudines ratio haberi dicatur, nunc postremò quæ eandem habent rationem exponendæ sunt. Eo quidem ordine, quo prima ad secundā ratio quonampacto rationi tertiæ ad quartam assimiletur, sit inquirendum. Tum, inquit Euclides, eadem erit ratio, cùm æquemultiplicia primæ & tertiæ, simul excedent, simul deficient, aut simul æquabūtur multiplicibus secundæ & quartæ, à quouis alio multiplicante æquemultiplicatis, vt exemplo proponamus sciscitandum quánam arte prima A *ad secundam* B *in eadem sit ratione, qua tertia* C *ad quartam* D. *Proferamus primæ & tertiæ* A *&* C *æquemultiplica, hæc* E *&* F, *insuper secundæ* B *& quartæ* D *alia quæuis æquemultiplicia sint* G H. *Si etenim multiplici* E *excedente multiplex* G, *quauis facta multiplicatione, reliquum* F *excedat* H *etsi æquetur, æquetur, si deficiat, deficiat. Eorum æquemultiplicium simplices,* A *prima ad secundam* B, *erit vt tertia* C *ad quartam* D.

E 18	A 6	B 3	G 15
F 12	C 4	D 2	H 10

Quod si (vt cum diffinito diffinitionem conuertamus) eadem fuerit simplicium supposita ratio, scilicet prima ad secundam qua tertia ad quartam. Sequetur primæ & tertiæ æquemultiplicia, simul excedere, deficere, aut æquari simul, æquemultiplicibus, secundæ & quartæ quauis multiplicatione progenitis. Cæterùm ad negatiuam properantes, vt vtrosque huius diffinitionis aggrediamur intellectus, in eadem ratione magnitudines dicentur non esse, prima ad secundam, qua tertia ad quartam. Quando primæ & tertiæ æquemultiplicia non simul excedent, deficient, aut æquabuntur, æquemultiplicibus secundæ & quartæ, quauis multiplicatione progenitis. Quam prioris instar conuertentes dicemus. Quòd si eadem non fuerit ratio primæ ad secundam, quæ tertiæ ad quartam, sequetur primæ & tertiæ æquemultiplicia, non simul excedere, æquari aut deficere, à multiplicibus æquis secundæ & quartæ, quauis multiplicatione genitis. Hanc diffinitionem eousque locupletem ostendere volumus, quod eius intelligentia, non parum conferat momenti, sublimioribus attingendis. Sed quia hæc diffinitio omnimodam exoptat multiplicationem, antequam communes excessus, defectus, aut æqualitates, æquemultiplicium pariat, cuiusquidem multiplicationis generalitas, à singularum multiplicationum scrutinio dependere videretur. Vt tamen non crucientur ingenia in disquirenda huiusmodi multiplicandi lege, proximam conferemus methodum, qua aliquam multiplicationem æquemultiplicia simul æqualia producentem compertemus. Argumentum inde ducentes ab ea, qua maior multiplicatio æquemultiplices simul excedere, minor vero eosdem simul deficere coget. Propositis iisdem primæ ad secundam, ac tertiæ ad quartam rationibus, dentur bini in

eau[illegible] onic numeri. Conuersim autem numerus antecedens consequentia mult[illegible] et, consequens vero antecedentia. Tum necessario æqui orientur multiplices, vt olim (cor. 17 sep[illegible]) ostensuri sumus. Scilicet primæ & secundæ inter se, necnon tertiæ & quartæ inter se, vt aperiemus exemplo. Esto prima A ad secundam B vt tertia C ad quartam D. Sit eorum ratio quæ numerorum 9 ad 3. Conuersim autem 9 antecedens, vtrasque multiplicet consequentes B & D. Consequens vero 3, vtrasque multiplicet antecedentes A scilicet & C. Sequetur binas A B per binos eiusdẽ rationis numeros, cõuersim ductas, æquales producere multiplices, E & G. Necnon binas C & D æquales ꝑducere F & H. Si igitur E & F primæ A & tertiæ C æquemultiplices, æquentur simul æquemultiplicibus secundæ B & quartæ D, sequetur alia quauis oblata æquamultiplicatione ipsorum E & F, aut eosdem E & F simul excedere ipsos G & H, scilicet si maior proposita fuerit multiplicatio. Siquidem minor, eosdem E & F simul deficere ab ipsis G & H: præter has autem nullæ fiunt multiplicationes. In quauis igitur multiplicatione id faciendum putabimus, huius inuenti facilitatem demonstrata veritate (vt diximus) confirmabit corellarium 17. septimi, interdum sufficiet hanc esse huius diffinitionis intelligentiam. Concludemus itaque eandem magnitudinum propositarũ esse rationem, quando æquemultiplicia antecedentium simul excedent, defficient, aut simul æquabuntur, æquemultiplicibus consequentium, id quidem quauis multiplicatione genitis, & è conuerso, haud secus ad negatiuam. Eandem scilicet magnitudinum propositarum non esse rationem, quando æquemultiplicia antecedentium non simul excedent, deficient, aut non simul æquabuntur, æquemultiplicibus consequentium, quauis multiplicatione productis.

E 18	A 6	B 2	G 18
F 9	C 3	D 1	H 9

Ante paucos annos obiectum fuit in hanc Euclidis diffinitionem, à quodam aliàs peritissimo huius figuræ argumentum, antecedentium 6 & 5 æquemultiplicia 18 & 15 simul excedunt consequentium 4 & 3 æquemultiplicia 8 & 6 tamen simplices 6 ad 4, non sunt in ratione 5 ad 3. ad hæc proponentem oblitum esse quamuis multiplicationem vt diximus. Nam optat Euclides hos communes æquemultiplicium excessus, æqualitates, aut defectus, non tantum in quadam proposita reperiri multiplicatione, sed iuxta quamuis id fieri postulat multiplicationem, quare si antecedentia binario ducamus, fient 12 & 10, si consequentia ternario fient 12 & 9, tum excedente vno scilicet 10 reliquum 9, non excedet alter, hoc est 12 ad 12. Quare per conuersam diffinitionis simplices non erunt in eadem ratione. videmus itaque multiplicium excessus, æqualitates, vel deffectus, non simul procedere facta quauis multiplicatione, vt saltem hoc patuit exemplo, quod quidem ad vniuersalem distribuendam sufficit. Licet namque cuiuis, primam & tertiam eousque multiplicare, quod vtraque reliqua excedat æquemultiplicia, atque hac vsque in decrementum, quod vtramque à reliquis æquemultiplicibus simul defficere cogat, non tamen id in quauis multiplicatione comperimus, vt fieri iubet Euclides, ad conseruandam vniuersalis distributiuæ veritatem. Nam ex Aristotele negatiua vniuersalem distribuit, vt non tantum in aliqua sed in quauis id faciendum præcipit multiplicationem.

18	6	4	8
15	5	3	6

MONITVM.

Campanus exposuit has magnitudines in eadem esse ratione, quando earum æquemultiplicia in eadem erunt ratione. Dixit enim excessum hunc æquemultiplicium non intelligi de excessu quantitatis, sed rationis, quam proportionem vocat, idem per idem exponens. Nec id mirum, tacuit enim præcipuam diffinitionis substantiam, scilicet hanc quamuis multiplicationem, insuper continuam proportionem priori imponens, ac geometricam libertatem maculans. Nam in vtramque æquè discontinuam vt continuam possunt hæ diffinitiones, quicquid deprauati dicant codices. Qua de re autem Euclides simplicium magnitudinum rationem ex æquemultiplicium cognitione deprehendere voluerit, non autem ex earum simplicium inspectu. Illud (sanorum salua sententia) mihi occurrit. Cum ratio inquirenda duarum inter se magnitudinum, à quantitatis earum cognita comparatione dependeat, Geometricæ verò magnitudines eò quòd sint continua & confusæ, nullam proferunt menti quantitatis intelligentiam siue discretionem, qua possint adinuicem comparari quantitatum vires. Cùm autem geometricas continuas & vnicas adhibita multiplicatione, per earum frequentem repetitionem plures efficit, illæ in quantitates discretas transeunt, numerorum speciem induentes, & perinde sensui non veluti continuum, sed discretum (intelligentiæ familiare) sese offerunt discernendæ. Nec omittendum insuper, quod maiorum magnitudinum eandem rationem habentium

bentium differentiæ, multo maiores sunt, & ideo plus intelligibiles Perspexit [illegible] Euclides [illegible]rum esse, æquemultiplices simplicium magnitudinum eandem habere rationem [illegible] demõstratur in, & quaslibet magnitudines proportionales in permutatam rationem deuenturas ostensurum, ab his namque duabus orta est huius diffinitionis inuentio, scilicet à 15 & 16 huius quinti theorematis. Concludemus itaque, si hic præfatus excessus, æqualitas, aut defectus, iuxta quamuis multiplicationem accidat, simplices eandem habere rationem. Si autem econuerso simplices eandem habuerint rationem, id iuxta quamuis multiplicationẽ accidet, contra verò si excessus ille iuxta quamuis multiplicationem productus, non semper accidat, nec simplices eandem habebunt rationem. E conuerso si non habeant simplices eandem rationem, illud non accidet, iuxta quãuis multiplicationem, iuxta eas saltem quæ fiunt per numeros habentes conuersam rationem propositorum simplicium (vt diximus proxima methodo) licet iuxta quamplures alias accidat.

Sexta diffinitio.

Proportio verò est rationum similitudo.

Diximus his proximis duas rationes similes, hoc est easdem, posse (vt sæpius) inter diuersas quãtitates cadere, illa quippe rationum similitudo proportio appellatur, vt si dicamus eandem esse rationem magnitudinum A ad B quam aliarum C ad D, has proportionem habere dicemus. Siue plures fuerint, nempe si eandem eis rationem habeat E ad F, sex magnitudines proportionem dicentur habere. Proportionum autem aliam continuam, aliam dicemus discontinuam. Continuam quidem eam dicemus, cuius rationes similes sequuntur, siue iungunt magnitudines nullo omisso interuallo, vt in datis A B C D magnitudinibus, si ea fuerit ratio A ad B quæ B ad C & eadem quæ C ad D nullo relicto interuallo.

A	B	C	D	E	F
1	2	3	6	4	8

A	B	C	D
1	2	4	8

Discontinuam verò eam dicemus, quæ licet eisdem siue similibus constet rationibus, tamen aliquod omittit interuallum, vt si dicamus eã esse rationem A ad B, quã C ad D non autem quàm B ad C, quæ cum continuum videatur dissoluere, discontinua dicitur proportio: hæc autem cadere potest inter duo vel plura quantitatum genera. Possumus namq; conferre pondus ponderi, in ea ratione qua lineam lineæ conferemus, quaq; tempus tempori, planum plano: erunt igitur octo, quatuor generum magnitudines proportione discontinua coniunctæ. Prior verò quæ continua dicta est, vnicum recipit magnitudinum genus quantitatis, cum prima secundæ, eadem verò secunda tertiæ, tertia verò quartæ (& sic quantumuis) eadem ratione copulentur, quæquidem ratio eadem duas tantùm eiusdem generis cogitur connectere. Sunt alij plures qui rationem vocant proportionem, proportionem verò proportionalitatem, licet Euclides rationem dixerit λόγον, proportionẽ verò ἀναλογίαν, quæ similitudinem sonat rationum. Et proportionem dicunt proinde maiorem vel minorem, acsi maior vel minor daretur rationum similitudo, quod dissonum admodum censentes, potius eligemus Euclidis verba sectari, disciplinæ nuncia. Proportionem igitur non eam magnitudinum affinitatem, quæ ratio dicitur, sed rationum similitudinem esse dicemus, vt perfectè sonat proxima diffinitio sequens.

A	B	C	D
4	2	6	3

Diffinitio septima.

Eandem autem habentes rationem magnitudines proportionales vocentur.

Vocat eas magnitudines proportionales, quarum interualla susceperũt similes rationes, vel easdem (quod idem est hoc loco) siue continuè siue discontinuè suscipiant, quotquot tamen aderunt similibus, siue eisdem coniunctæ rationibus, sub proportionalium nomine comprehendentur.

MONITVM.

Ad hanc septimam (Theonis ordinem transponentes) conuenimus. Posuit enim Theon proportionis diffinitionem, quæ ex rationũ similitudine deprehenditur ante eas diffinitiones, quæ quid sit rationem habere, quidve in eadem esse ratione interpretantur. Non igitur ex prioribus posteriora, sed ex posterioribus priora edocerentur, quam igitur quartam repertmus (vt suo cõgrueret loco) sextam ordine transtulimus diffinitionem.

Diffinitio octaua.

Quando verò æquemultiplicium, multiplex primi excesserit, multiplex secúdi, multiplex autem tertij, iuxta quamuis multiplicationem non excesserit multiplex quarti, tûc primum ad secundum maiorem rationem habere dicetur, quàm tertium ad quartum.

Quinta huius exposuimus quid sit in eadem ratione esse, nunc autem quid maiorem rationem habere intelligamus, dicendum est. Supponit hæc eãdem haberi multiplicium legem, et quam quintam ordine exposuimus, scilicet primum & tertium æquè multiplicari. Secundum verò & quartum alia quauis æquamultiplicatione duci, tunc autem, si multiplex primi excedat multiplex secundi, aliqua multiplicatione verò facta, multiplex tertij non excedat multiplex quarti. Primum ad secundum, maiorem habebit rationem quàm tertium ad quartum. & è conuerso, Si primum ad secundum maiorem rationem habeat quàm tertium ad quartum, multiplice primi excedente multiplex secundi aliqua fiet multiplicatio qua multiplex tertij, non excedet multiplex quarti.

E 18	A 6	B 2	G 8
F 12	C 4	D 3	H 12

Aperiamus exemplo positis quatuor A B C D, *quarum primæ* A, *& tertiæ* C *sint æquemultiplicia* E *&* F, *secundæ verò* B *& quartæ* D *alia quæuis* G *&* H. *Patet* E *multiplice primæ* A *excedente* G, *multiplex secundæ* B, *tertiæ* C *multiplex* F, *iuxta quamuis multiplicationem non excedere multiplex* H, *quartæ* D, *nempe iuxta hanc propositam, à numeris conuersam rationem habentibus ortã. Prima itaque* A *ad secũdam* B, *maiorem rationem habet, quàm tertia* C *ad quartam* D. *Ac è conuerso, si prima* A *ad secundam* B *maiorem habeat rationem, quàm tertia* C, *ad quartam* D, *sequetur multiplice* E *primæ* A *excedente multiplex* G *secundæ* B. *Et multiplex* F *tertiæ* C *iuxta aliquam multiplicationem non excedere multiplex* H *quartæ* D. *Ad minorem ac eius conuersam modico negotio sub eadem pictura quantitatum peruerso ordine. ac si dicamus: Si multiplice* F *primæ* C, *non excedente* H *multiplex secundæ* D, *multiplex* E *tertiæ* A *excedat* G *multiplex quartæ* B, *quauis facta multiplicatione: Prima* C *ad secũdam* D *minorem habet rationem, quàm tertia* A *ad quartam* B: *haud secus in eius conuersa. Si prima* C *ad secundam* D *minorem habeat rationem quàm tertia* A *ad quartam* B, *multiplice* F *primæ* C, *non excedente multiplex* H *secundæ* D, *sequetur multiplex* E *tertiæ* A, *iuxta aliquam multiplicationem excedere multiplex* G *quartæ* B. *Quatuor huius diffinitionis exposuimus sumptiones, licet vnam tantùm receperimus. Id sanè vt cum diffinito diffinitionem conuerti doceremus, præcipuum illud ab Euclide susceptum quinta diffinitione huius memorantes, iuxta quamuis multiplicationem hos excessus fieri aut non fieri. Nam si Campani & Theonis instar hanc prætermisissemus particulam diffinitionis huius, conuersione caruissemus, vt hoc exemplo: Si prima* A *ad secundam* B *maiorem habet rationem, quàm tertia* C *ad quartam* D, *multiplice* E *primæ* A *excedẽte, multiplex* G *secũdæ* B, *sequetur multiplex* F *tertiæ* C *non excedere multiplex* H *quartæ* D: *cuius oppositum patet nisi in quauis multiplicatione dixerimus. Cùm enim intelligat Euclides si facta quauis multiplicatione is excessus non accidat, perspicuum fuit hãc vniuersalem (quãuis) per negatiuam distribui, vt si dixerit: Tertium autem aliqua facta multiplicatione quartum nõ excedat, vt veram huius ac similium diffinitionum integritatem tueamur, ab innumeris exemplorum incursibus, vniuersalis illius penuria labefactam inde colligemus antecedẽtis augmentum rationem augere, eius verò decrementum rationem minuere. E conuerso autem, consequentis augmentum rationem minuere, ac eiusdem decrementum rationem augere. Auctis itaque vel distractis simplicibus, æquè multiplicium incrementa generari liquet vel decrementa.*

E 12	A 6	B 2	G 4
F 8	C 4	D 3	H 6

MONITVM.

Huic à quinta voces, iuxta quamuis multiplicationem contulimus, vt diffinitionum more cum diffinitis converterentur, quod præter has voces fieri minimè poterat, vt ostendimus quinta diffinitione huius, vltimóque huius diffinitionis exemplo, quo discussimus disiunctiuam illam, si multiplex tertij non excesserit multiplex quarti, absque vniuersali (quamuis) distributa in aliquam, huius diffinitionis fore ruinam. Quare hanc vniuersalem (quamuis) à quinta diffinitione affirmatiua sumptam, huicque postremæ parti negatiuæ collatam, in particularem scilicet (aliquam) distribuimus.

Ac

Acsi dicat Euclides, Multiplex autem tertij, iuxta quamuis multiplicationem non excesserit multiplex quarti, licet iuxta aliquam excedat, vt patuit exemplo. Tum prima ad secundam maiorem rationem habet quam tertia ad quartam, vel si aliqua fieri posset multiplicatio æqua secundi & quarti. Qua multiplice primi excedente multiplex secundi, multiplex tertij non excedat multiplex quarti, licet iuxta quamuis multiplicationem is excessus non accidat. Tum erit maior ratio, &c.

Diffinitio 9.

Proportio in tribus quantitatibus saltem constituitur.

Cùm proportionem sexta diffinitione dixerimus esse rationum similitudinem, duæ saltem conficiendæ proportioni optantur rationes. Quia vero rationem diximus esse duarum magnitudinum respectum, qui earum interuallo concipitur. Ad binas igitur rationes duo saltem requiruntur interualla: quæ quidem interualla non minus quàm tribus concluduntur quantitatibus. Intelligemus itaque proportionis minimũ numerum magnitudinum siue quantitatum ternario claudi, hoc est, tres saltem in proportione constituenda requiri quantitates, primæ etenim ad secundam ratio fit vna, secundæ verò ad tertiam, fit altera, quæ rationes cùm sint similes, proportionem constituunt vt A ad B eam habeat quam B ad C rationem. Ipsæ A B C tres quantitates proportionem in minimoquantitatum numero constituunt.

C
B
A

MONITVM.

Huic diffinitioni duarum dictionum (terminis & minima) improprias voces à Theone descriptas transtulimus. Terminos enim cuiuslibet rationis siue argumenti antecedens, & consequens vocamus, quare duæ rationes, saltem quatuor exigunt terminos. Proportio igitur binas complexa rationes, tribus terminis non potest constare tantùm, sed quatuor. Quod si obiiciatur terminos dici magnitudines, & ideo tres magnitudines proportionem efficere: Dicemus magnitudines nomen antecedentis aut consequentis, non pro quantitatis respectu, sed pro situs adeptione recipere. Nam magnitudo B non ideo est antecedens, & consequens quod quanta sit, sed situm ipsi A postremum ipsi verò C priorem sortita, ex binorum adeptione situum antecedentis & consequentis, binas meretur denominationes: eius etenim B quantitas sine situ nulla antecedentis vel consequentis denominatione potest nuncupari. Quia verò dixit Theon proportionem minimam esse, transtulimus dictionem (minima) in aduerbiũ saltem, ne sint aliqui qui proportionem maiorem vel minorem aliquã reliqua esse credant, cùm sit enim rationum similitudo, nulla poterit dici maior vel minor similitudo reliqua. Quare autem Campanus & alij proportionem sæpius maiorem, vel minorem dicant, dicemus illos proportionem pro ratione (satis tamen impropriè) sumere, quæ quidem ratio maius & minus recipit. Proportio itaque tres saltem magnitudines optat, quatuor terminis expressas, binis scilicet antecedentibus, & binis consequentibus.

Diffinitio decima.

Quando tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam duplicem rationem habere dicetur, eius quæ ad secundam. Quando autem quatuor fuerint, prima ad quartam triplicem retionem habere dicetur, eius quę ad secundam. Et semper ordine vna plus, quousque absoluatur proportionalium numerus.



Hanc diffinitionem tantum in proportione continua intelligentes, resumemus quod tertia huius diffinitione diximus. Rationem verè exprimi denominatione multiplicationis, qua antecedens multiplicat consequens apud certas quantitates. Cùm igitur qualibet ratio tantũ in multiplicatione consistat, duplicem rationem dicere possumus, duplicem eius denominationis multiplicationem, vt exemplo ratio C ad D est tripla, hoc est C multiplicat D ter. Sed ratio B ad C rursus est tripla, id est B multiplicat ipsum C ter. Si igitur tripla ipsius B ad C, triplam ipsius C ad D concipiat, ip-

*[illegible] ad D nocuplam pariet. Constabit igitur ratio magnitudinum B ad D duabus [illegible]
tripla B ad C & tripla C ad D. Duplam igitur habebit prima B ad tertiam D ratio[illegible]
habet idem B ad secundam C, scilicet triplam bis sumptam, quæ (quoniam multiplicatione [illegible]
additione copulantur rationes) dupla, triple nocuplam efficiet, non autem sextuplam rationis enim
denominator numerus, non simplex sed multiplex exquiritur ea igitur de causa rationum denomi-
natores, multiplicatione, non autem simplicium numerorum additione iungũtur. Similiter progre-
diemur si fuerint quatuor magnitudines, nam si præferatur A ipsi B, in eadem ratione, scilicet tripla,
dicemus quoniam A est ipsius B tripla, B vero ipsius D nocupla, quæ multiplicatione copulatæ produ-
cent 27, ipsius A ad D rationis denominatorem. Quæ cùm in se concipiat rationes, A ad B, B ad C, C ad
D æquales, sua copulatione rationem A ad D producentes, ratio A ad D tripla dicetur cuiuslibet earũ.*

*Prima igitur A ad quartã D triplicẽ habet eius quã habet ad secundã B. Similiter in infinitũ gra-
dientes, si quinque ponantur quantitates, prima ad quintã quadruplã rationẽ habebit quã ad secũ-
dã. Et eo seruato ordine semper quotquot proponentur quantitates, tot vna minus denominationem
sequi rationis primæ scilicet ad vltimam, supra rationem primæ ad secundam Multiplices etenim
rationes, à numero interuallorum denominantur, atqui quantitatum numerus, interuallorum nu-
merum semper vnitate excedit. Quantitatum itaque numerus eius rationis denominationem vni-
tate semper excedet. Videmus etenim trium quantitatum bina esse interualla, quatuor verò quanti-
tatum tria, & sic ordinatim. Vt autem ostendamus ea quæ hac diffinitione diximus in rationibus
maioris inæqualitatis, similiter consequi in rationibus minoris inæqualitatis, apponemus exemplum
prioris conuersum, translatis tantum terminorum quantitatibus. Geometria etenim eadem facili-
tate minorum ad maiores exponit habitudines, qua maiorum ad mi-
nores. Eadem igitur qua diximus methodo, videmus rationem C ad D
esse tertiam, cum C magnitudo ipsius D magnitudinis decrementum
per $\frac{1}{3}$ multiplicet. Rursus autem B ipsius C decrementum per $\frac{1}{3}$ multipli-
cat, vnius igitur tertiæ decrementum per $\frac{1}{3}$ multiplicatum, vnam
producet nonam, nona itaque vnius tertia erit dupla, scilicet ratio i-
psius B ad D ($\frac{1}{9}$), dupla erit rationis B ad C, scilicet ($\frac{1}{3}$) haud secus, si qua-*



*tuor fuerint magnitudines primæ A ad quartam D ratio, tripla erit rationis eiusdem A primæ ad B
secundam, hoc est ex ratione ipsius A ad B ter multiplicata productæ: ratio enim B ad C multiplicans
rationem C ad D, hoc est $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{3}$ producit $\frac{1}{9}$, rationem ipsius B ad tertiam D, ratio verò B ad D per ra-
tionem A ad B ducta, hoc est $\frac{1}{9}$ per $\frac{1}{3}$ producet $\frac{1}{27}$, rationem quippe ipsius A ad D, triplam rationis A ad
B. Similiter in his quatuor E F G H, ratio E ad H octaua, erit tripla rationis
E ad F dimidiæ. Vnde patet multiplex quãdoque minorem quãtitatem ma-
gnitudinis præ se ferre, non autem numeri, nam maior est octonarius denominator decrementi E
ad H, binario denominatore decrementi E primæ ad secundam F. Et proinde multiplex eius maius il-
lo erit, licet minorem significet quantitatem, maius autem decrementum. Hinc sequetur rationes
extremorum ex quorumlibet mediorum constare multiplicatis rationibus, hoc est rationum deno-
minatoribus. Proponatur inquirenda ratio magnitudinum A ad B, inter ipsa
A & B aliqua ponatur quantitas C, sit autem ipsius A ad C ratio sesquialtera,
reliquæ vero C ad B dupla, ducantur autem earum rationum denominatores
adinuicem, scilicet 1 $\frac{1}{2}$ per 2, fiet 3 denominator multiplicatæ rationis, ipsius
quidem A ad C, quæ constitit ex ratione A ad C & C ad B, hæc autem ratio A
ad B non dicetur dupla ipsius A ad C rationis, cùm non constet ex duabus æ-
qualibus, rationi A ad C, sed maior dupla æquè potest esse sicut & minor quãdoque, vt latius dicemus
quinta sexti diffinitione, tantum supersit Euclidem dixisse in continuæ proportionalibus, rationem
primæ ad tertiam, duplam esse rationis primæ ad secũdam primæ verò ad quartam triplam eiusdem
primæ ad secundam rationis, siue ea multiplex ratio primæ ad tertiam aut quartam, maior fuerit
multiplicata, ratione primæ ad secundam, siue eadem fuerit minor. Et proinde multiplex quando-
que maiorem, quandoque verò minorem suo multiplicato concipere quantitatem, licet ipsum multi-
plex maius semper (hoc est, maiori multiplicante numero) denominatum subsistat.*

2	4	8	16
E	F	G	H



Diffinitio vndecima.

Similis rationis dicuntur magnitudines, antecedentia antecedentibus, & consequentia consequentibus.

Qua-

[illegible] ximus esse rationem habitudinem vnius magnitudinis ad reliqu[illegible] gnitudines dici similis rationis, eas quarum singula antecedentia ad singula consequentia [illegible] bent habitudinem, ideo dici antecedentia antecedentibus similē, ad consequentia habere respectum, & è conuerso consequentia consequentibus similes, pati antecedentium respectus. Ratio etenim semper ea dicitur, quæ respectum antecedentis ad consequens indicat Non antē consequentis ad antecedens, nec antecedentis ad aliud antecedēs, siue consequētis ad aliud consequens, vel omnimoda al[illegible] eorū mixtiones, nempe cum proponitur duarū rationū quatuor quantitates copulātum inuestiga[illegible] da similitudo. Eo ordine disponendæ erunt magnitudines, quo semper ea quæ in aliam multiplicando agit, sit antecedens. Reliqua verò quæ patitur sit consequens, nec minus in alterius rationis reliquis duobus terminis fiet. vnde sequetur Si binæ rationes quatuor quantitates (scilicet duo antecedentia & duo consequentia) copulantes similes fuerint, cum quantites illæ eo ordine disponuntur, similes esse etiam alio ordine dispositis eisdem quantitatibus, hoc est, mutatis antecedentibus in consequētia vel aliquibus eorum varia pro natura proportionis, vt sequentibus diffinitionibus extabit. Quauis tamē variatione proposita, semper ea quæ in aliam multiplicando agit, antecedentis nomen sibi vendicat, reliqua verò consequentis.

Diffinitio duodecima.

Permutata ratio est, acceptio antecedentis ad antecedens, & consequentis ad consequens.

Hanc à prima terminorum variatione inchoat, quæ etenim quantitates prius fuerunt antecedentes binarum similium rationum, ita transferuntur, vt manente prioris rationis antecedente secundæ rationis antecedens, vice consequentis primæ rationis fungatur, & primæ rationis consequens, eiusdē antecedentis secundæ locum subeat, vel breuius antecedentis secundæ & consequentis primæ rationis fit commutatio. Eam terminorum transpositionem vocat proportionem permutata ratione compositam. Hæc autem ideo permutata dicetur, tanquam respectiuè sumpta ad præcedentem, cuius quantitatū ordinem permutauit. Sed vbi vim proportionis iam adepta est, ab ea æqualia potest oriri permutata, vt a priori hæc orta dicetur permutata. Omnes nanque veræ erunt proportiones, vt patebit in theorematis harū diffinitionum sensus demōstrātibus, vt exemplo adaperiamus. Sint A B C D quarum A antecedens sit ad B consequens, simili ratione qua C antecedens secundæ rationis, ad D consequens. Ratio permutata dicetur ea, quæ commutatis cōsequente primæ & antecedente secundæ, dicet esse A ad C, vt B ad D.

A	B	C	D
A	C	B	D

Diffinitio decimatertia.

Conuersa ratio est, acceptio consequentis, tanquam antecedentis ad antecedens tanquam consequens.

Conuersam rationem supposita similis rationis relatiuam, vt permutatam diximus concipere necesse est. Suppositis igitur alicuius proportionis rationibus, cùm in priori ratione transfertur antecedens in consequens, & è conuerso. In posteriori verò ratione idem fit, hæc terminorum prius data proportione dispositorum conuersio. Proportionem à cōuersa ratione denominat, vt si in proposita proportione fuerit A ad B vt C ad D, erit conuersim B ad A vt D ad C.

A	B	C	D
B	A	D	C

Diffinitio decimaquarta.

Composita ratio est acceptio antecedentis cum consequente, tanquam vnius ad ipsum consequens.

Compositam rationem veluti præmissas à supposita proportione oriri vult, scilicet, si primæ rationis antecedens & consequens coniuncta, eidem consequenti comparētur. Secundæ quoque rationi simile fiat, hæc proportio à composita denominabitur ratione, vt si supposita proportione fuerit A ad B vt C ad D, erit composita ratione A B simul ad B, sicut C D simul ad D.

A	B	C	D
AB	B	CD	D

Diffinitio 15.

Diuisio rationis est, acceptio excessus quo antecedens excedit consequens, ad ipsum consequens.

Dixit enim compo-
Quia hæc est præcedentis conuersa, ex eiusdem figuræ typo eam indicabimus. *sitam fieri coniunctis antecedente & consequente simul, quod quidem tanquam vnicum antecedens comparatum fuit consequenti. Et ideo verum fuit antecedens compositum, excedere simplex consequens, simplici antecedente. Quare comparantes excessum antecedentis compositi ad simplex consequens, reperimus eum excessum esse prius antecedens simplex, simplici consequenti comparatum, vt sumamus ordine conuerso a posteriori proportione incipientes. Si fuerit vt A B simul ad simplex B, sic C D simul ad simplex D, erit diuisa ratione A excessus quo A B excedit B, ad ipsum B, sicut C excessus quo C D excedit D ad ipsum D, hoc est, erit A ad B vt C ad D, quæ fuit prior supposita proportio, ad quam reuertimur. Non tamen intelligamus eum excessum determinatum esse, sed liberum quemuis, rationibus proportionis coniunctum.*

Diffinitio 16.

Conuersio rationis, est acceptio antecedentis ad excessum quo excedit antecedens ipsum consequens.

Hæc ferè præcedenti opponitur. Cùm autem fit comparatio antecedentis consequente maioris ad consequens, sicut aliud antecedens ad aliud consequens, hac posita ratione per conuersionem rationis sequetur, antecedens eam rationem habere ad suipsius excessum, quo excedit suum consequens, quam aliud antecedens ad suum excessum quo excedit consequens, vt si fuerit A C ad A B sicut D F ad D E, erit sicut A C antecedens ad B C excessum, quo excedit ipsum A B consequens, sic D F antecedens ad E F excessum, quo excedit ipsum D E consequens.

A B C
D E F

Diffinitio 17.

AEqua ratio est, pluribus existentibus magnitudinibus, & aliis eis æqualibus multitudine, binis sumptis in eadem ratione. Quando fuerit sicut in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic in secundis prima ad vltimam, vel aliter acceptio extremorum per subtractionem mediorum.

Ad hanc proportionem exponendam, binos magnitudinum ordines supponit Euclides, æquales quidem & multitudine & rationum similitudine, si hac lege fuerit in primo ordine, prima ad vltimam: sic in secundo, prima ad vltimam, vel si extremæ ordinis vnius eandem inter se habeant rationem, quam extremæ alterius totidem subtractis mediis: hæc proportio dicitur æqua ratione constitui, vt exemplo. Sint duo ordines totidem magnitudinum A B C D & E F G H: sumantur binæ rationes eadem scilicet A ad B vt E ad F, & binæ B ad C vt F ad G & C ad D, vt G ad H. Quãdo autẽ fuerit in primo ordine A prima ad D vltimam, sic in secundo ordine E prima ad H, vltimam, vel cum ablatis totidem mediorum rationibus, rationes A ad D & E ad H extremorum æquales erunt, hæc proportio æqua ratione copulabitur. Huius autem necessitas à 10 huius depẽdet. Cùm enim rationes interuallorum A B C D & E F G H, vel A ad D, vt E ad H sint æquales, necessariò rationes extremorum (ex eisdem rationibus mediorum constantes) æquales erunt.

A	B	C	D
8	6	4	2
E	F	G	H
12	9	6	3

Diffinitio 18.

Ordinata proportio est quando fuerit sicut antecedens ad consequens, ita antecedens ad consequens, fit autem consequens ad rem aliam sicut consequens ad rem aliam.

Hæc

Hæc binos quantitatum ordines requirit. Disponit enim prius quatuor proportionales, binis æquis rationibus coniunctas, quarum binas consequentes esse sit antecedentes, ad alias sibi consequentes relatas, eadémque coniunctas ratione, vt exemplo, si fuerit A ad B vt C ad D, sit autem B consequẽs ad E rem aliam, sicut D consequens ad F rem aliam, hæc rationum dispositio ordinata dicetur proportio, eò quod prioris ordinis ratio prior, priori secundi, posterior verò posteriori æqualis sit, & sic quotcunque fuerint rationes.

A	B	E
6	3	12
C	D	F
4	2	8

Diffinitio 19.

Perturbata proportio est quando tribus existentibus magnitudinibus, & alijs eis æqualibus multitudine fit, sicut in primis magnitudinibus antecedens ad consequens. Sic in secundis magnitudinibus antecedens ad consequens, Sicut autem in primis consequens ad rem aliam, sic in secundis res alia ad antecedens.

Hæc similiter quatuor proportionales supponit; vt cùm primæ rationis consequens ad aliquam magnitudinem eam seruabit rationem, quam aliqua alia magnitudo ad secundæ rationis antecedens, hic ordo rationum perturbata vocetur proportio, vt exemplo, Esto A ad B, vt C ad D, sit vero B primæ rationis cõsequens ad rem aliam E, sicut quædam alia res F ad C antecedens secundæ rationis. hic rationum ordo licet perturbatus sit, nihilominus verè proportionalis est: nam bini ordines binas rationes alijs binis æquales habent: est enim A ad B eadem rationi C ad D, sed B ad E est eadem rationi F ad C, ipsorum ordinum igitur binæ rationes, binis æquales existunt. Ostendit hac diffinitione, nihil referre an prioris ordinis ratio, posteriori rationi secundi ordinis æqualis fuerit, perturbato hoc ordine. Dum tamen quilibet ordo totidem rationes contineat, singulas singulis æquales, licet non ordinata proportione, sed perturbata serie. Id quidem vt tandem inter extremas eadem reperiatur ratio, ex eisdem medijs rationibus constans, siue ordinata siue perturbata serie dispositis, æquam rationem cõstituentibus.

	A	B	E
	6	3	2
F	C	D	
12	8	4	

MONITVM.

Binas insuper apponit præter has diffinitiones Zambertus, quas easdem cum binis præcedentibus vltimis reperientes, data opera omisimus. Non enim eas Euclidem scripsisse fuit verisimile, nec forsan omnes ab Euclide scriptas, ad nos peruenisse credibile. Dissentiunt etenim Theon & Campanus, non tantùm ordine, & theorematum numero, sed quandoque & sensu, vnde verum fuisse arbitramur Zãberti scriptum in luminari ad perspectiuam, cum scilicet quandoque reperisse Euclidem, apud Socraticum, in vetustißimis & tineis, ac carie contritis græcis codicibus. Non igitur difficile videbitur multa ad nos temporis iniuriam heteroclita detulisse. Cùm itaque coniiciamus Euclidem multas alias proportionum varietates, quam ab his receperimus, reliquisse, tamen has demonstrandis futuris elementorum theorematibus sufficere rati, studiosis si quas præter has disquirere cupiant, relinquimus exequendum. His igitur nouem ab vndecima quid conueniat exponere volentes, dicemus has geometricas proportiones omnibus quantitatum generibus inseruire, diuersis quidem respectibus. Nam licet vndecima similes antecedentium ad consequentia proferens rationes, omni quantitatum generi copuletur, cùm in diuersis genere similes poßint dari rationes, attamen duodecima permutata, rationes easdem extra idem quantitatis genus esse non sinit. Nam primæ rationis antecedens ad secundæ rationis antecedẽs comparatũ, priores binas rationes inter eiusdẽ generis quantitates cecidisse cogit, conuersa verò binas rationes in bina quantitatum genera cadere patitur, nihil enim priorum cum posterioribus miscet, quod idem operatur & composita ratio, necnon diuisio rationis: eas insuper insequitur conuersio rationis, illæ etenim, quatuor magnitudinum numero quæqua claudũtur. AEqua vero ratio sex aut plures postulãs magnitudines binis ordinibus dispositas, diuersa quantitatũ genera cuilibet ordini scilicet propriũ genus inesse patitur. Ordinata autẽ duo quantitatũ genera similiter defert, cui sit consors perturbata, cũ earũ singulæ binos quãtitatũ ordines præ se ferant, si libeat duobus quantitatum generibus obnoxios. Cũ enim rationẽ dixerimus esse respectũ siue habitudinẽ, qua prior duarum oblatarum magnitudinum, posteriorem sua quantitate multiplicat, multiplicationisq́; huius quãtitatem rationis eiusdẽ quantitatẽ denominare, illud præmonendum duximus: quod scilicet cum rationis alicuius expreßio, nil aliud sit quàm antecedentis ad consequens multiplicatio, per multiplicationum comparationes ordietur hic quinto Eu-

clides, rationum apertre inter se differentias, habitudines siue respectus, illæ etenim cùm suas quantitates non simplicibus sed multiplicibus exprimant numeris, per multiplicium quantitatum additionem, detractionem & æquationem, ipsarum quantitates æquemultiplicibus inter se comparatis magnitudinibus edocebit, præcipue sex prioribus huius quinti theorematis. Quicquid enim de multiplicatione vnius in alteram dicet quantitatis, idem de ratione dictum postremo patebit. Cùm autem binæ quantitates binarum æquemultiplicāt augmentum, hæc multiplicationis æqualitas, æquales inter eas denunciat rationes, maior maiores, minor verò multiplicatio, minores esse rationes edocet, quia verò augmenti verum est oppositum decrementum, conuerso argumento dicemus, binas quantitates binarum decrementum multiplicantes æqua multiplicatione, æquales ad eas rationes habere, veluti in augmenti diximus multiplicatione, sed cùm in augentibus maior multiplicatio maiorem rationis quantitatem afferat, perspicuum erit in minuentibus maiorē decrementi multiplicationem, plus rationis decrescere denominationem, & proinde maius decrementi multiplex, minorem præ se ferre rationem existimemus maiori tamen expressam numero, vt idem quod de quantitatibus diximus rationibus conferri posit. Diximus enim quantitates per decremēti earum multiplicationem minui, maiori verò (quanto minores fient) exprimi numero, vt percipiamus totius geometriæ legem in augmento, æquatione, vel quantitatum decremento consistere, Cùm enim æquatio nulla egeat multiplicatione, eò quòd vnitati assimiletur, reliquas geometriæ partes (quæ ab ea hinc inde recedunt) per numerorum auctas multiplicationem, plus ab ea æqualitate recedere fatemur, vt quæ plus in augmentum tendant maiori numero, maiores demonstrentur, quæ verò in decrementum maiori numero, minores effectæ noscantur, quod idem rationum quantitatibus conuenire deduximus. Postmodum 7 huius incipit magnitudinum rationes in genere quidē, vt quæ maiores, minores, aut certè æquales dicantur, illico quædam particulariora subnectens. A 16 vero proportionum variationem nouam vltimis diffinitionibus expositam demonstrat, vt ille arguendi species prius diffinita, geometrica demonstratione firmentur.

Propositio prima.

Si fuerint quotcunque magnitudines totidem magnitudinum singulę singularum æquemultiplices, quotuplex est vna vnius magnitudo, totuplices erunt omnes omnium.



Sint quotcunque magnitudines A *&* B, *totidem magnitudinum* C *&* D *æquemultiplices, singulæ singularū. Dico omnes* A *&* B, *omnium* C *&* D *totuplices esse, quotuplex est vna* A *vnius* C, *quoniam* A *est multiplex ipsius* C. *Sumātur in* A *quotcunque sint magnitudines ipsi* C, *æquales scilicet* A E, E F, F G. *Similiter in* B *ipsi* D *æquales* B M, M L, L I. *quot igitur ipsius* C *erunt in* A, *tot ipsius* D *erunt in* B. *sed binæ magnitudinum* A *&* B *partes binis* C *&* D *sunt æquales, quot autem sunt in* A *ipsius* C, *tot sunt in* A *&* B *ipsarum* C *&* D. *Binæ igitur* A *&* B, *toties repetunt ipsas* C *&* D, *quoties* A *repetit ipsam* C. *Quotuplex est itaque* A *vna vnius* C, *totuplices erūt omnes* A B *simul sumptæ omnium* C D *simul sumptarum, hoc ostendimus exemplum in multiplicantibus augmentum. Idem proinde ostendetur in multiplicantibus decrementum, conuerso quantitatum ordine, multiplicet* C *ipsius* A *decrementum æquæ vt* D *multiplicat ipsius* B *decrementum. Quoties igitur* C *diminuet sui distractione* A, *toties* D *diminuet ipsum* B. *Diminuant per magnitudines* A E, E F, F G, *&* B M, M L, L I, *quoties* C *aufert ad ipsius* A *decrementum scilicet* E F G, *toties* D *aufert ipsius* B *decrementum* M L I. *Toties igitur vtrumque* C D *vtriusque* A B *decrementum auferet scilicet* E M, F L, *&* G I, *quotuplex igitur erit* C *ipsius* A *decrementum, totuplex erunt omnes* C *&* D *simul sumptæ decrementum, omnium* A *&* B *simul sumptarum. Si fuerint itaque quotcunque, &c.*

MONITVM.

Hanc priorem in æquemultiplicantibus decrementum ostendere volumus eadem absolui opera, qua in augmentum multiplicantibus prius ostendimus. Cùm enim decrementum multiplicantes numeri, æque propositorum posint esse multiplices, vt hi qui augmentum multiplicant, sufficiet (vt tædium vitemus) futuris demonstrandis, alterum tantùm æquemultiplicium vel multiplicandi genus

prefer

proferamus, augmenti quidē aut decremēti, vt contrariorū eadem intelligatur esse disciplina: haud secus æquemultiplices reperiemus, vtraque seu mixta proposita multiplicatione ea nāque ex binis sigillatim operantibus cōstat. Nam quæ singulatim ad alias idem habebunt incrementum, idemq́; decrementum, sequetur eas simul ad vtrasque eodem incremento ac decremento esse æquemultiplices: hæc succincta animaduersione quodammodo digna putauimus, licet Euclides (sola multiplicatione vsus) demonstrarit alterum tantùm, scilicet incrementum, veluti plus familiare primordia gustantibus. Sed ne in paralogismum decidamus, huius memores sub voce multiplices hinc inde quoduis multiplex suscipiamus, scilicet increscens, decrescens ac mixtum vtroque constans.

Propositio secunda.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, vt tertia quartæ: fuerit autem quinta secundæ æquemultiplex, vt sexta quartę, composita prima cū quinta æquè erit secundæ multiplex, vt tertia cum sexta quartæ.

Sit prima A B *secundæ* G *æquemultiplex, vt tertia* D E *quartæ* Z, *sit insuper quinta* B I *eiusdem secundæ* G *æquemultiplex vt sexta* E T *quartæ* Z: *dico compositam* A I *æquè esse secundæ* G *multiplicem, vt composita* D T *quartæ* Z. *Quoniam æqualis est multiplicatio* A B *ad ipsam* G, *et quæ* D E *ad* Z. *Æqualibus illis æquales addantur ipsius* B I *ad* G, *&* E T *ad* Z *multiplicationes: igitur omnes* A B *prima &* B I *quinta ad* G *secundam omnibus* D E E T *tertiæ & sextæ ad* Z *quartam, erunt (per secundam commun. sentent.) æquales multiplicationes. Si igitur prima secundæ æquè fuerit multiplex vt tertia, &c.*

Vel aliàs quoties A B *capit* G, *tot sunt in* D E *ipsius* Z: *sed quot sunt in* B I *ipsius* G, *totidem sunt in* E T *ipsius* Z. *Cùm igitur in* A B B I *tot sint ipsius* G, *quot in* D E E T *ipsius* Z: *prima* A B *& quinta* B I *æquemultiplex erit ipsius* G *secundæ, quotuplex tertia* D E *& sexta* E T *simul sumptæ, quartæ* Z. *Si igitur prima secundæ, &c.*

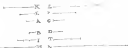
Propositio tertia.

Si primum secundi æquè fuerit multiplex, vt tertium quarti, sumantur autem æquemultiplicia primi & tertij: æquesumptorum vtrumque vtriusque æquè erit multiplex, alterum quidem secundi, alterum autem quarti.

Sit primum A *secundi* B *æquemultiplex, vt tertium* G *quarti* D: *sumantur autem æquemultiplicia,* E Z *quidem ipsius* A *primi, vt* I T *ipsius* G *tertij. Dico totuplex esse* E Z *secundi* B, *quotuplex* I T *est ipsius* D. *secentur* E Z *quidem in totidem magnitudines æquales ipsi* A *(quæ sint* E K K Z*) in quot secabitur* I T *æquales ipsi* G, *cum sint æquemultiplicia singula singulorum. Quia verò æquemultiplex est* A *ipsius* B *vt* G *ipsius* D, *æquemultiplex erit* E K *prima secundæ* B, *vt tertia* I L *quartæ* D. *Similiter reliqua* Z K *quinta eiusdē* B, *vt reliqua sexta* L T *quartæ* D, *æquè erit multiplex. Sunt enim æquales ipsæ* E K I L, *rectis* A *&* G, *ipsarum* B *&* D *æquemultiplicibus, etiam si pluries repetant ipsas* A *&* G. *Sequetur itaque (per præcedentem) totam* E K, K Z *compositam à prima & quinta, æquemultiplicē esse ipsius* B *secundæ, vt tertia & sexta* I L, L T *ipsius* D *quartæ: sed ipsa* E Z *&* I T *sunt æquesumpta multiplicia ipsorum* A *primi, &* G *tertij. Æquesumptorum igitur vtrumque, vtriusque scilicet* E Z *ipsius* B, *vt* I T *ipsius* D *æquemultiplex erit. Si itaque primum secūdi æque fuerit multiplex, vt tertium quarti, sumantur autem, &c.*

Propositio quarta.

Si primum ad secundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, AEquemultiplicia primi & tertij ad æquemultiplicia secundi & quarti, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem sumpta ad inuicem



Sit A primum ad B secundum vt G tertium ad D quartum. Sintque ipsorum A & G æquemultiplicia E & Z, ipsorum verò B D alia quæuis I & T: Dico esse vt E ad I sic Z ad T. Sint rursus ipsorum E & Z æquemultiplicia K & L, ipsorum verò I & T alia quæuis M & N. Et cum E primum secundi A sit æquemultiplex, vt Z tertium quarti G. Sint autem æquè sumpta K & L primi & tertij æquemultiplicia. Ipsa K & L æquemultiplicia erunt ipsorum A & G, per præcedentem, Et eadem causa M & N ipsorum B & D. Sed cum A ad B sit vt G ad D, ipsæ K L simul excedent vel deficient ab ipsis M & N, per conuersam 5 diffinitionis. Si autem simul excedant K & L, vel simul deficiant ab ipsis M & N. Quia sunt K & L æquemultiplices ipsarum E & Z, & aliæ quæuis M & N ipsarum I & T, erit (per 5 diffinitionem) E prima ad I secundam, vt Z tertia ad T quartam. Si igitur primum A ad secundum B eam habuerit rationem quam tertium G ad quartum D, Æquemultiplicia E & Z primi & tertij, ad I & T æquemultiplicia secundi & quarti, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem sumpta adinuicem.

Corollarium.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint & conuersim proportionales erunt. *Nam si K & L simul excedentes vel deficientes ipsis M N, efficiant E ad I sicut Z ad T, sequetur conuersim, quod M & N simul excedentes vel deficientes ipsis K & L, efficient I ad E sicut T ad Z. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & conuersim proportionales erunt, hoc corollarium exponit 13 diffinitionem.*

MONITVM.

Quoniam Campanus diffinitionũ quintæ & octauæ huius necessariam veritatem non exposuit, Theon verò tacuit eius expositionem, per quintam hanc (ea non exposita) demonstrantes, an demonstrata sit, iudicandum relinquunt. Nam quintam prius exponens Campanus diffinitionem, similem 15 huius theorematis efficit. Quare hoc monitum præferendum arbitrati sumus, vt huius potissimè veritatem, à diffinitionis quintæ conuersa, à nobis exposita constare præuideamus, id enim causa fuit, cur prolixiores in ea & octaua diffinit. exponendis euaserimus, vt perfectè hanc & plures sequentes ipsius quintæ & octauæ obsequio demonstrandas, certis prælibatis concluderemus.

Propositio quinta.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ, Et reliqua reliquę ęquè erit multiplex, quotuplex est tota totius.

Sit tota A B totius G D æquemultiplex, vt ablata A E ablatæ G Z: Dico reliquam E B reliquæ Z D æquè esse multiplicem, vt tota A B totius G D, ponatur E B æquemultiplex ipsius I G, vt A E ipsius G Z. Quoniam singulæ A E E B singularum G Z I G sunt æquemultiplices, vt vna A E vnius G Z, vel E B ipsius I G, tota A B totius I Z æquè erit multiplex, vt vna A E vnius G Z, per primam huius, sed (per hypothesim) quotuplex A E est ablatæ G Z, æquemultiplex est tota A B totius G D. Tota igitur A B æquè erit multiplex ipsius I Z, vt ipsius G D: æquales igitur sunt G D & I Z. Communis auferatur G Z, reliquæ I G & Z D erunt æquales. Quotuplex erit igitur E B ipsius I G, totuplex erit & ipsius Z D sibi æqualis. Sed quotuplex E B ipsius I G, totuplex fuit A B ipsius G Z, & A B ipsius G D, per hypotheses. Quotuplex itaque erit tota A B totius G D, vel ablata A E ablatæ G Z, totuplex erit reliqua E B reliquæ Z D. Si igitur magnitudo, &c.

Propositio sexta.

Si duę magnitudines, duarum magnitudinum æquè fuerint multiplices, & ablatę aliquæ, earundem æquè fuerint multiplices, etiam reliquæ eisdem vel æquales sunt, vel æquè ipsarum multiplices.

Sint

Sint duæ magnitudines A B G D, *duarum* E *&* Z *æquemultiplices, sint insuper ablatæ aliquæ ab ipsis, scilicet* G T A I, *earundem* E *&* Z *æquemultiplices. Dico reliquas* I B *&* T D *eisdem* E *&* Z *æquales, vel ipsarum æquemultiplices esse. Ostendamus primo cum altera reliquarum æqualis erit, & reliquam æqualem esse. Sit reliqua* I B *ipsi* E *æqualis. Dico proinde* T D *ipsi* Z *æquam esse, ponatur* G K *æqualis ipsi* Z. *Quoniam autem æquemultiplex fuit,* A I *ipsius* E *&* G T *ipsius* Z: *æqualis vero est* I B *ipsi* E, *&* K G *ipsi* Z, *æquè igitur multiplex erit tota* A B *prima & quinta, ipsius* E *secundæ, &* K T *tertia & sexta ipsius* Z *quarta, per 2 quinti. Quotuplex autem est* A B *ipsius* E, *totuplex est* G D *ipsius* Z, *quotuplex itaque erit* K T *ipsius* Z, *totuplex eiusdem erit &* G D *æquales igitur sunt* K T *&* G D, *per 2 communem sententiam. Communis auferatur* G T, *reliqua* T D *reliquæ* K G *æqualis erit. Et proinde* K G *(ipsi* Z *æqualis) efficit* T D *eidem* Z *æqualem. Reliqua igitur* I B *&* T D *eisdem* E *&* Z *sunt æquales. Similiter ostendemus eas esse æquè multiplices siue augmento, siue decremento. Si ponamus* K G *æquè multiplicem ipsius* Z, *vt* I B *ipsius* E, *sequetur* T D *eiusdem* Z *totuplicem esse, quotuplex fuit* K G *eiusdem. & proinde quotuplex fuit* I B *ipsius* E. *Si itaque duæ magnitudines duarum, &c. Hac nostram multiplicis expositionem necessariò concludit.*

K G T D Z E B A I

Propositio septima.

Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.

Proponantur æquales magnitudines A *&* B, *ipsis autem alia quædam exponatur* C: *Dico æquales* A *&* B *eandem habere rationem ad* C. *& contrà,* C *ad singulas earum* A *&* B, *eandem habere rationem. Cùm enim ratio sit (per 3 diffinitionem huius) magnitudinum respectus quoad quantitatem, sed* A *&* B *magnitudinum æqualium ad eandem* C *magnitudinem, æquales sunt quoad quantitatem respectus: ipsarum igitur* A *vel* B *ad eandem* C *æquales erunt rationes. Erit igitur vt* A *ad* C *sic* B *ad* C. *Et proinde contra (per coroll. 4. huius)* C *ad* A *vt* C *ad* B, *æquales itaque ad eandem, eandem, &c.*

A C B

MONITVM.

Hanc poteramus ampliori apparatu per 5 diffinitionem ostendere. Sed non arbitrati sumus eam quintam esse, vsque adeò huic intelligentiæ vicinam vt fuit tertia, Et insuper breuius & familiare admodum fuit hoc argumentum. Nam Theon & Campanus per primam cõmunem sententiam hanc & præcedentem nituntur demonstrare: quod facilius per secundam absoluetur. Omnis enim æqua multiplicatio æqualium quantitatum, fit per æquales æqualiter additas magnitudines, quas secunda sententia docet æquales producere.

Propositio octaua.

Inæqualium magnitudinum, maior ad eandem maiorẽ rationem habet quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quàm ad maiorem

Sint inæquales magnitudines A B *maior &* G *minor, sit & alia quædam* D: *Dico* A B *ad* D, *maiorem habere rationem quàm* G *minor ad eandem* D, *& insuper ipsam* D *ad* G *minorem, habere maiorem rationem, quàm ad* A B *maiorem. Auferatur à maiori* A B, *æqualis ipsi* G, *sitq;* B E, *ipsarum autẽ* B E *&* G *æquemultiplices sint* T I *&* K. *Reliqua item* A E *æquemultiplex ponatur* I Z, *tali quidem multiplicatione qua minor ipsarum* T I I Z *excedat ipsam* D. *Augeatur autem* D *multiplicatione ea, qua quãprimum excedat* K, *& sit* C. *Quoniam minor ipsarum* T I *&* I Z *excedit ipsam* D, *reliqua* K *(ipsi* T I *æqualis) excedet eandem* D. *Ipsa autem* C *excedens quamprimum* K, *minor erit ipsa* T Z. *Sit ergo prima* A B, *secunda* D, *tertia* G, *& quarta eadem* D. *Quia æquemultiplicium (*T Z *&* K*) primi* A B, *& tertij* G, *& iuxta quamuis multiplicationem (*C *bis sumptũ) secundi & quarti* D *bis sumpti, multiplex primi, scilicet* T Z, *excedit* C *multiplex secundi: multiplex verò tertij* K, *non excedit multiplex quarti* C, *aliqua secundi & quarti facta multiplicatione. Sequetur (per 8 diffinitionem) primum* A B *maiorem habere rationem ad secundam* D, *quàm tertium* G *ad quartum idem scilicet* D. *Inæqualium igitur* A B *&* G, *maior* A B *maiorem rationem habet ad eandem* D, *quàm minor* G. *Conuerso verò argumento secunda pars prima conuer-*

A E D G B T G K I Z

si fiet a... Namque positu D prima, G secunda, D rursus tertia, & A E quarta, patebit C æquemulti- plex primæ excedere K æquemultiplex secundæ. Idem verò C æquemultiplex tertiæ, non excedere T Z multiplex quarta. Prima igitur D ad secūdā G minorem, maiorem habebit rationem, quam eadem D tertia ad A E quartam & maiorem. Inæqualium itaque magnitudinum, maior ad, &c.

MONITVM.

Huius demonstrationis inuentio ab eo oritur, quo minor duarum magnitudinum liberè æquemultiplicetur cum maiore, quousque horum multiplicium differentia excedat tertiam magnitudinem scilicet D, id quidem, vt fieri possit ipsius D, talis multiplicatio, quæ ipsum K excedens, ab ipso T Z deficiat.

Propositio nona.

Quę ad eandem, eandem habēt rationem, ęquales adinuicem sunt, & ad quas eadem eandem habet rationem, ipsę sunt ęquales.



Hæc ex præcedente breuissimè deducitur habeant enim bina A & B ad eandem C, eandem rationem Dico A & B esse æquales. Si quidem non essent, maior ad ipsam C, maiorem rationem haberet, quàm minor, per 8 huius, sed eandem habent rationem. æquales itaque erunt A & B. Rursus ad secundum: habeat eadem C ad singulas A & B eandem rationem: Dico A & B esse æquales. quod si inæquales essent, eadem C ad minorem, maiorem haberet rationem, quod esset cōtra hypothesim. Non sunt igitur inæquales A & B. Quæ itaque ad eādem, eandem habent rationem, æquales, &c.

Propositio decima.
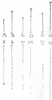
Ad eandem tationem habentium, maiorem tationem habens, illa maior est. Ad quam autem eadem maiotem rationem habet, illa minor est.



Ad eandem C rationem habeant A quidem maiorem, B verò minorem. Dico A maiorem esse ipsa B. Nō est enim minor A ipsa B: nam si minor esset, minorem haberet rationem ad ipsam C, per 8 huius. Nec quidem æqualis, nam æqualem haberet rationem, per 7 huius, quod esset oppositum supposito, cùm A maiorem habeat ad C quàm B, rationem ex hypothesi. maior igitur erit A ipsa B. Ad secundam verò partem, habeat eadem C ad B maiorem rationem quam ad A. Dico B esse minorem ipsa A. Si enim credatur maior B ipsa A, magnitudo C ad B maiorem, haberet minorem rationem (per 8 huius) quàm ad A, contra hypothesim. Si vero æqualis credatur B ipsi A, eadem C ad B eādē haberet rationē quàm ad A, per 7 huius quod opponeretur similiter hypothesi, nam per eam C, habet ad B maiorem, quàm ad A rationem. Non itaque maior aut æqualis est: igitur B minor est ipsa A. Ad eandem itaque rationem habentium, &c.

Propositio vndecima.

Quæ eidem eædem sunt tationes, & adinuicem sunt eædem.



Supponantur rationes A ad B & G ad D esse eadem rationi E ad Z: Dico rationes A ad B & G ad D esse easdem adinuicem. Dentur singulis antecedentibus A G E æquemultiplicia I T K. Singulis verò consequentibus B D Z alia quæuis æquemultiplicia L M N. Quoniam A est ad B in eadem ratione qua E ad Z, sed primæ & tertiæ A & E sumpta sunt æquemultiplicia I & K, secundæ vero & quartæ B & Z alia quæuis L & N. Sequetur per conuersam quintæ diffinitionis. Si I sit maius ipso L, & K esse maius ipso N, si æquale, æquale, si vero minus, minus. Similiter cùm sit G ad D sicut E ad Z, eodem argumento si T excedat M, & K excedet N. Si æquale, æquale, si autem minus minus, per eandem conuersam. Si igitur I excedente L K excedat N, ipso vero K excedente N T excedat M à primo ad vltimam liquet I excedente L, T excedere M, si æquale, æquale, et si minus minus. Eorum itaque multiplicium simplices A ad B & G ad D in eadem erunt ratione, per 5 diffinitionem huius. Quæ itaque eidem eædem sunt rationes & adinuicem sunt eædem.

MONITVM.

Hæc & ferè omnes præcedentes huius quinti, eousque per se notæ existunt, vt potius principia quàm demonstranda theoremata dici debeant. Qua autem de causa Euclides eas difficiliori demonstratione petat, mea est sententia. Quòd hæc theoremata generali quadam maiestate in omnes geometricas quantitates commensurabiles scilicet & incommensurabiles imperant, quarum quidem habitudo, nullo modo potest exhiberi patula: per quantitatis earum cognitionem, vt fieret si omnes tantum commensurabiles essent. Ac insuper quia multiplicationis discretio confusas geometriæ quantitates elucidat.

Propositio duodecima.

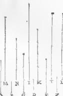
Si fuerint quotcunque magnitudines proportionem habentes, erit sicut vna antecedentium ad vnam consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.



Sint quotcunque magnitudines proportionem habentes, scilicet A *ad* B *vt* G *ad* D, *vtque* E *ad* Z: *Dico esse sicut vna antecedentium* A *ad vnam consequentium* B, *sic omnes* A G E *antecedentes, ad omnes* B D Z *consequentes, sumantur ipsarum antecedentium* A G E *æquemultiplicia* I T K. *Reliquarum verò consequentium* B D Z *alia quæuis æquemultiplicia* L M N. *Quoniam quotuplex est* I *ipsius* A, *tam multiplices sunt* I T K *simul sumptæ ipsarum* A G E *simul sumptarum, per* 1 *huius. Similiter quotuplex erit* L *ipsius* B, *totuplices erunt omnes* L M N *omnium* B D Z, *simul sumptarum, per eandem. Quatuor igitur ordine disponãtur magnitudines, scilicet* A B A G E B D Z. *Quia vero singulæ antecedẽtes* A G E, *ad singulas* B D Z *consequentes, eandem habent rationem, sequetur (per conuersionem* 5 *diffinitionis)* I *multiplici primæ* A *excedente* L *multiplicem secundæ* B, *ipsam* T *excedere* M, *&* K, *ipsam* N. *Igitur si* I *multiplex ipsius* A *excedat* L *multiplicem ipsius* B, *omnes* I T K *excedẽt omnes* L M N, *si æquales æquales, si minores minores erũt. Ipsa igitur quatuor* A *ad* B *vt* A G E *ad* B D Z *proportionales erunt, per* 5 *diffinitionem huius. Si fuerint itaque quotcunque magnitudines, &c.*

Propositio decimatertia.

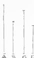
Si prima ad secundam eandem habuerit rationem & tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem rationem habeat, quàm quinta ad sextam, prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit quàm quinta ad sextam.



Habeat prima A *ad secundam* B *eam rationem quam tertia* G *ad quartam* D, *tertia verò* G *ad quartam* D *maiorem rationem habeat quàm quinta* E *ad sextam* Z: *Dico primam* A *ad secũdam* B *maiorem rationem habere, quàm quinta* E *ad sextam* Z. *Assumantur antecedentium* A G E *æquemultiplicia* M I T, *consequentium verò* B D Z, *sumantur alia quæuis æquemultiplicia* N K L: *quoniam* A *&* B *in eadẽ ratione sunt ex, quæ* G *ad* D, *sequetur (per conuersionem quintæ diffinitionis)* M *excedente* N *&* I, *excedere* K, *quia verò* G *ad* D *maiorẽ rationem habet quàm* E *ad* Z, *aliqua fiet multiplicatio qua* I *excedente* K, T *non excedet* L, *per conuersionem octauæ diffinitionis. Sequetur itaque* M *excedente* N, *aliqua multiplicatione facta,* T *nõ excedere* L, *& ipsorum* A *&* E *æquemultiplices sunt* M *&* T. *Ipsorum verò* B *&* Z *aliæ quæuis æquemultiplices sunt* N *&* L. *Igitur* A *ad* B *maiorem rationem habebit quàm* E *quinta ad* Z *sextam, per octauam diffinitionem. Si itaque prima ad secundam eandem habuerit, &c.*

Propositio decimaquarta.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam, prima verò tertia maior fuerit, & secunda quarta maior erit, etsi ęqualis ęqualis, etsi minor, minor.



Prima A ad secundam B eam habeat quam G ad D rationem, sitq́; A maior ipsa G: Dico B esse maiorem ipsa D, & si æqualis æqualē, & si minor minorem. Quoniam A est maior tertia G, ipsa ad B maiorem rationem habet quàm G (per 8 huius) sed est vt A ad B sic G ad D: igitur G ad D maiorem habet quam G ad B. Maior est igitur B ipsa D, per secundam partem decimæ huius. haud secus patebit si supponatur A æqualis ipsi G, secundam B æquari quarta D, per septimam & secundam partem nonæ huius, si verò A supponatur minor G. & B ipsa D minor ostendetur, per octauam, & secundam partem decimæ, vt prima parte. Si itaque prima ad secundam, &c.

Propositio decimaquinta.

Partes eodem modo multiplicium, eandem rationem habent sumptæ adinuicem.

Sint G B & E Z partes magnitudinum A B & D E suarum æquemultiplicium. Dico esse sicut A B ad D E, sic G B ad E Z. Quoniam enim quot sunt in A B magnitudines G B, totidem in D E sunt ipsius Z E, singulæ ad singulas eandem rationem habentes, cùm sint æquales. Sicut igitur B G vna antecedentium ad E Z vnam consequentium, sic (per 12 huius) erunt A B omnes antecedentes ad D E omnes consequentes. Similiter ostendemus si ipsarum A B, D E multiplicia decrementa sint G B & Z E, conuersa ratione, per coroll 4. huius, cùm ab ipsis A B & D E quælibet ablatæ, æquales sint ipsis G B, Z E. Eandem habebunt igitur rationem, A B ad D E, vt G B ad Z E (per eandem duodecimam huius.) Partes itaque eodem modo multiplicium, &c.

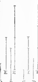
MONITVM.

Hoc theoremate ostendit Euclides amplam, quam exposuimus multiplicādi legem, cùm dicit partes æquemultiplicium nam si tantùm eas partes quæ totum præcisè metiuntur intelligeret, per primam diffinitionem, ab hac geometriæ lege, potissimam rationum multitudinem abstraheret, nempe quatuor maioris inæqualitatis species, scilicet superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Nos igitur æquemultiplices qualibet rationis specie copulatas, huic adscribemus theoremati, vt earum simplices eandem eis habeant rationem, non autem multiplices tantùm quas simplices metiuntur sua repetitione præcisè, vt plures voluerunt.

Propositio decimasexta.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

Sint proportionales (siue in eadem ratione) A ad B qua G ad D: Dico esse vicissim (hoc est permutata ratione) A ad G vt B ad D. Sint ipsarum A & B æquemultiplices E & Z: Ipsarū verò G & D aliæ quæuis æquemultiplices I & T. Cùm autem sit A ad B vt G ad D, erit (per præcedentem) E ad Z sicut I ad T (æquemultiplices enim sunt) quia verò proportionales sunt. Si E maior fuerit ipsa I, & Z ipsa T (per 14 huius) maior erit, si minor minor, & si æqualis æqualis: variato igitur ordine, sit A prima, G secunda, B tertia, & D quarta. Quoniam igitur E multiplici primæ excedente I multiplex secundæ, sequitur Z multiplex tertiæ, excedere T multiplex quartæ, æquali verò existente æquale, minori autem minus Simplices A prima ad G secundam erunt, vt B tertia ad D quartam. Sunt enim primæ A & tertiæ B æquemultiplicia, secundæ vero G & quartæ D aliæ quæuis æquemultiplicia sumpta, per quintam diffinitionem huius. Si quatuor itaque, &c.



Propositio decimaseptima.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, diuisę quoque proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines scilicet A B *ex* A E E B, *&* D G *ex* G Z Z D. *Sitque sicut composita* A B *ad* B E, *sic composita* G D *ad* D Z: *Dico diuisas esse* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D. *Sumantur æquemultiplices ipsarum* A E E B, *sintque* I T T K. *Ipsarum verò* G Z Z D *sint* L M M N, *singulæ singularum Per primam igitur erunt omnes* I K *&* L N *omnium* A B *&* G D *æquemultiplices, rursus quæuis alia æquemultiplices ipsarum* E B *&* Z D *sumantur* K C *&* N P. *Cùm enim* T K *prima sit secundæ* E B *æquemultiplex vt tertia* M N *quartæ* Z D, *quinta verò* K C *sit eiusdem* E B *secundæ, vt sexta* N P, *quartæ* Z D *æquemultiplex erit tota* T C *eiusdem* E B, *vt tota* M P *ipsius* D Z, *per 2 huius, est autem* A B *ad* B E *vt* G D *ad* D Z. *Si igitur* I K *multiplex primæ* A B *excedat, æquetur, vel deficiat* T C *multiplici secundæ* E B, *&* L N *tertiæ multiplex, excedet &c.* N P *multiplicem quartæ* D Z, *per conuersam 5 diffinit. huius. Quare ablatis cõmunibus* T K *&* M N, *sequetur* I T *multiplici ipsius* A E *excedente* K C *multiplicẽ* E B, *&* L M *multiplicẽ* G Z *excedere, æquari, vel deficere ipsi* N P *multiplici ipsius* Z D. *Erunt igitur simplices* A E *ad* E B *vt* G Z *ad* Z D, *per quintam diffinitionem huius. Si itaque compositæ magnitudines, &c.*

Propositio decimaoctaua.

Si diuisę magnitudines proportionales fuerint, compositę quoque proportionales erunt.

Sint diuisæ magnitudines A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D: *Dico eas compositas* A B *ad* B E *esse vt* G D *ad* D Z. *Quod si opponatur, erit vt* A B *ad* B E *sic* G D *ad aliquam maiorem vel minorem ipsa* D Z, *sit prius ad minorem quæ sit* D I. *Quoniam enim composita* A B *ad* B E *sunt vt* G D *ad* D I, *erunt (per præcedentem) diuisæ,* A E *ad* E B *sicut* G I *ad* I D, *sed sicut* A E *ad* E B *sic supponitur* G Z *ad* Z D. *erit igitur sicut* G I *ad* I D *sic* G Z *ad* Z D. *Sequetur itaque (per 14 huius) si prima* G I *tertia* G Z *maior fuerit, & secunda* I D *quarta* D Z *maior erit, sed & minor supponitur, quod est absurdum. Non igitur habet* G D *ad minorem ipsa* Z D, *rationem quam* A B *ad* B E. *Similiter ostendetur quod nec ad maiorem, nam* Z D *inuenietur maior alia maiore supposita, quod fieri non posset: igitur* A B *ad* B E *rationem habet quã* G D *ad* D Z. *Si itaque diuisæ magnitudines proportionales, &c.*

Propositio decimanona.

Si fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum ad ablatum & reliquum ad reliquum, erit sicut totum ad totum.

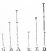
Sit tota A B *ad totam* G D *vt ablata* A E *ad ablatam* G Z, *erit vicißim (per 16 huius)* B A *ad* A E *vt* D G *ad* G Z, *sed si coniuncta* B A *ad* A E *fuerint vt* D G *ad* G Z, *erunt (per 17 huius) diuisim* B E *ad* E A *vt* D Z *ad* Z G. *Rursus igitur erit vicißim, vt reliqua* B E *ad reliquam* D Z, *sic ablata* E A *ad ablatam* Z G. *Et proinde (per 11 huius) vt tota* A B *ad totã* G D. *Si itaque fuerit sicut totum ad totum, sic ablatum, &c.*

Corollarium.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & rationis cõuersione, proportionales erunt. *Cum enim sit vt* A B *ad* G D *sic* B E *ad* D Z, *erit vicißim vt* A B *ad* B E, *sic* G D *ad* D Z: *sed cũ fuerit antecedens* A B *ad consequens* A E, *sicut antecedens* G D *ad consequens* G Z, *& conuersione rationis erit antecedens* A B *ad* E B *excessum quo excedit suum consequens* A E, *sicut antecedens* G D *ad excessum* Z D *quo excedit suum consequens* G Z, *per 16. diffinitionem huius.*

Propositio vigesima.

Si fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ eisdem æquales numero, binæ sumptę in eadem ratione, æqua autem ratione in primis prima vltima maior fuerit, & in secundis magnitudinibus prima vltima maior erit, & si æqualis æqualis, & si minor, minor.



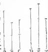
Sint quotcunque magnitudines A B G, *totidémque* D E Z, *ita binæ in eadem ratione, vt scilicet* A *ad* B *sic* D *ad* E, *vtq́;* B *ad* G *sic* E *ad* Z, *sit autem* A *maior quã* G: *Dico* D *maiorem esse ipsa* Z, *si minor minorem, si verò æqualis æqualem. Cùm autem (per hypothesim)* A *sit maior ipsa* G, *erit (per 8 huius) maior ratio* A *ad* B *quàm* G *ad eandem* B, *sed cùm sit vt* B *ad* G *sic* E *ad* Z, *erit conuertendo (per corol. 4 huius) vt* G *ad* B *sic* Z *ad* E. *Atqui rationes* A *ad* B *&* D *ad* E *cum sint eædem, maiores igitur sunt quàm* G *ad* B *&* Z *ad* E, *singulæ singulis. ad eandem igitur* E *rationem habentium* D *&* Z, *maiorem rationem habens* D, *ipsa maior est (per 10 huius) reliqua* Z. *Si itaque fuerint quotcunque magnitudines, &c.*

MONITVM.

Huic liberam facultatem apponentes, diximus præter Euclidem (quotcunque) non tantùm tres magnitudines: nam si quotus alia ponãtur inter A *&* G *cùm totidem inter* D *&* Z, *semper* A *maior, maiorem ad singulas earum habebit rationem quàm* G *minor. Quia verò* D *&* Z *ad singulas reliquarum inter eas positarum, eãdem ex hypothesi habent rationem, & per allegata* D *similiter ipsa* Z *maior erit, & si* A *ipsi* G *æqualis, &* D *ipsi* Z *æqualis, & si minor, minor. Præterea quotcũque fuerint magnitudines, ex tribus semper fiet demonstratio.*

Propositio vigesimaprima.

Si fuerint tres magnitudines, & aliæ totidem binę sumptę in eadem ratione, fuerit autem perturbata earum proportio, æqua ratione verò prima, tertia maior fuerit, & quarta sexta maior erit, & si æqualis, æqualis, & si minor, minor.



Sint tres magnitudines A B G *aliæq́; totidem sint* D E Z, *binæ autem in eadem ratione perturbatim constituantur, vt scilicet* A *ad* B *sic* E *ad* Z, *vtq́; (per 19 diffinitionem huius)* B *ad* G *sic* D *ad* E: *Dico si* A *maior fuerit tertia* G, *& quarta* D *maior erit vltima* Z, *& si minor, minor, & si æqualis, æqualis. Quoniam est* B *ad* G *vt* D *ad* E, *erit conuersum (per coroll. 4. huius)* G *ad* B *vt* E *ad* D. *Sed cùm* G *minor sit ipsa* A, *ea habet ad* B *minorem rationem quàm* A *ad eandem* B, *per 8 huius, quare ratio* E *ad* D *(quæ est eadem ipsi* G *ad* B*) erit minor ratione eiusdem* E *ad* Z, *quæ est eadem rationi* A *ad* B *erit igitur (per secundam partem decimæ huius)* D *quarta maior ipsa* Z *sexta, nempe* A *fuit maior tertia* G, *si autem* A *fuerit ipsi* G *æqualis, eadem* B *ad* A *& ad* G *eandem habebit rationem, per 7 huius, similiter* E *ad* D *&* Z, *sunt enim eædem rationes, si autem minor sit* A *ipsa* G, *similiterq; ostendetur (per 10 huius)* D *esse minor ipsa* Z. *Si fuerint igitur tres magnitudines, & aliæ totidem, &c.*

Propositio vigesimasecunda.

Si fuerint quotlibet magnitudines, & aliç eisdem ęquales numero, binę sumptę in eadem ratione, fuerit autem earum ordinata proportio, & ęqua ratione proportionales erunt.

Sint

Sint quo[illegible]tudines A B G, aliæque totidem sint D E Z, binæ sumptæ & ordinatim in eadem ratione, vt scilicet A ad B sic D ad E, atque B ad G sic E ad Z, & sic consequenter quotcunque fuerint. Dico esse, æqua ratione primam A ad vltimã G, sicut primam D ad vltimam Z: Sumãtur ipsarum A B G æquemultiplicia I K M, ipsarũ vero D E Z aliæ quæuis quæ multiplicia T L N. Cum enim simplicia sint in eadem ratione A ad B vt D ad E & B ad G vt E ad Z erunt (per 15 huius) eorum multiplicia I ad K & K ad M vt T ad L & L ad N. Quotuis igitur magnitudines I K M & aliæ totidem T L N bina sumuntur in eadem ratione quarũ (per 20. huius) prima vltimam in vtroque ordine simul excedunt, æquantur, vel simul deficiunt. Earum igitur simplices (per 5. diffinitionem huius) A ad G erunt vt D ad Z. Si itaque fuerint quotlibet, &c.

MONITVM.

Apposuimus huic ordinatam proportionem, non ad cogenda theorematis verba huic ordinatæ proportioni, nam ex se idem sonant, supponuntur etenim similes rationes, eodem situ in vtroque magnitudinum ordine, haberi. Sed vt æquam rationem 17. diffinitione expositam, in ordinata proportione, hoc theoremate intelligi, vt in perturbata proximè succedenti, ostensuri sumus, locum obtinere percipiamus. Fuit autem haud secus liberum 20. propositioni eam ordinatam accommodare, aut non, nam ea communi acceptione deordinata, intelligenda est, veluti hæc, vt præfatus 20. & 21. ostenderemus, æquam rationem simul maiores, minores, vel æquas efficere magnitudines, in ordinata vt perturbata proportione, postmodum 22. & 23. eandem æquam rationem in vtraque ordinata, & perturbata proportionales efficere extremas, ostensuri, decimam octauam diffinitionem elucidantes.

Propositio vigesima tertia.

Si fuerint tres magnitudines, & aliç totidem, binç sumptç in eadem ratione, fuerit autẽ perturbata earum proportio, & ęqua ratione proportionales erunt.

Sunto tres magnitudines A B G, tres item aliæ D E Z, in proportione perturbata, A quidem ad B vt E ad Z, B vero ad G vt D ad E dispositæ: Dico esse æqua ratione vt A ad G sic D ad Z proportionales: Sint ipsarum A B D æquemultiplices C K H, reliquarum verò G E Z aliæ quæuis æquemultiplices F L I, cùm sit vt A ad B, sic E ad Z, erit (per 15. huius) vt C ad K, sic L ad I: quia verò est B ad G vt D ad E, eadem ratio primi & tertij B & D æquemultiplicia K & H, ad secundi & quarti G & E æquemultiplicia F & L (per quartam huius) eandem habebunt rationem. Tres itaque sunt magnitudines C K F, & totidem aliæ H L I in perturbata ratione proportionales, vt scilicet C ad K sic L ad I, vtque K ad F sic H ad L. Si igitur C excedit F, H excedet I, æquabitur, vel deficiet, per 21 huius. Id propterea earum simplices A ad G erunt (per 5 diffinitionem huius) vt D ad Z æqua ratione proportionales. Si fuerint itaque tres magnitudines, & aliæ totidem binæ sumptæ, &c.

MONITVM.

Quia demonstrauit hanc Theon permutatæ rationis obsequio, potiorem & compendiosam elegimus demonstrandi viam, vt possint (si libeat) sumi tres magnitudines vnius generis, tres verò alterius generis quoad quantitatem, quod non patitur permutata ratio. Hac etenim arte libera cedet facultas huic theoremati, æquè magnitudines diuersorum, ac eiusdem generis complectendi.

Propositio vigesimaquarta.

Si primum ad secundum eandem habuerit rationem quam tertium ad quartum, habuerit autem quintum ad secundum, eam rationem quam sextum ad quartum, etiam primum & quintum composita, ad secundum, eandem habebunt rationem, quam tertium, & sextum, ad quartum.

Sit primum A B *ad secundum* G *vt tertium* E D *ad quartum* Z, *sit etiam* B I *quintum ad* G *secundum, vt* E T *sextum ad* Z *quartum: Dico composita* A B B I *ita esse ad* G *secundum, vt* D E B T *ad* Z *quartum. Quoniam est* B I *ad* G *vt* E T *ad* Z, *erit (per corroll. 4 huius) vt* G *ad* B I *sic contra* Z *ad* E T. *Cum autem sint tres magnitudines* A B G *&* B I, *& tres item aliæ* D E Z *&* E T, *bina in eadem ordinata ratione, scilicet* A B *ad* G *vt* D E *ad* Z, *&* G *ad* B I *vt* Z *ad* E T, *æqua igitur ratione erunt* A B *ad* B I *vt* D E *ad* E T, *per 22 huius. Et quoniam diuisæ* A B *ad* B I *sunt vt* D E *ad* E T, *coniunctæ (per 18 huius) erunt vt* A I *ad* I B *sic* D T *ad* T E. *Rursus æqua ratione tres* A I I B G, *& tres aliæ* D T T E Z, *sunt ordinatim in eadem ratione bina sumptæ. Aequa igitur ratione erunt (per 22 huius) vt* A B I *composita primum & quintum ad* G *secundum, sic* D E T *composita tertium & sextum ad* Z *quartum. Si itaque primum ad secundum eandem, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima earum reliquis maiores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B *ad* G D, *vt* E *ad* Z, *quarum maxima sit* A B, *minima verò* Z: *Dico* A B *&* Z *reliquis* G *&* E *maiores esse. A magnitudine enim* A B *æqualis ipsi* E *abscindatur* A T, *ab ipsa verò* G D *æqualis ipsi* Z *tollatur* G I. *Cum autē sit* A B *ad* G D, *vt* E *ad* Z, *ipsis verò* E Z *æquales positæ sint* A T *&* G I, *erit vt* A B, *ad* G D *sic* A T *ad* G I. *Reliquum igitur* T B *ad reliquum* I D *erit (per 19 huius) vt totū* A B *ad* G D. *Maius igitur erit* T B, *ipso* I D, *per 14 huius. A maiori ergo* T B *minori* D I *æquum auferatur* B C, *quod quidem ablatum ipsi* Z *copuletur, quia* G I *ipsi* Z, I D *verò ipsi* B C *æquales sunt, tota* Z *&* B C *ipsi* G D *æqualis erit. Sed* A T *ipsi* E *posita est æqualis, binæ igitur* A T *&* Z *cùm* B C *ipsis* E *&* G D *æquales erunt. Superest autem ipsi* A C *magnitudo* C T, *binæ igitur* A B *maxima &* Z *minima, reliquis* E *&* G D *maiores erūt residua* C T. *Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c.*

MONITVM.

Vbi exposuit Euclides simplicium & cōtinuarum magnitudinum rationes, per æquemultiplicia earum rationum, interdum sex varias proportiones, quas duodecima & quinque eam sequentibus diffinitionibus diffiniuit, propositionibus ac corollariis demonstrauit. Hæ etenim sex species eam quæ 11. diffinita est sequūtur necessariò positam. Nā si quatuor magnitudines sint similis rationis antecedentia antecedentibus & consequentia consequentibus, sequetur eas esse proportionales, permutata ratione, per 16 conuersa per corollarium 4 huius, composita per 18, diuisa per 17 conuersione rationis per corollariū 19. Aequa verò (cuius sunt duæ species, ordinata scilicet & perturbata) per 22 & 23 huius. Quæquidē sex species sunt modi arguendi, ex rationū similitudine conclusi, & demōstrationibus propalati. Decem verò priores diffinitiones, nulla egent demonstratione, sed ampliori expositione, vt eas diffinitis cōuerti cernamus. Nusquā tamen in demonstrādis theorematis alia acceptione qua diffiniuimus eas sumentes, vt extet inuiolata methodus. Campanus autem nouem ex Euclide sumptas, præter expositas à Theone apponit propositiones, quas data opera præterimus. Per octo etenim priores ostendit maiores rationes his omnibus argumētis sequi maiores, sicut ostēdimus similes sequi similes rationes, quod nulla eget demōstratione. Si enim similis ratio similem concludat, maior (sibi similem concludens) maiorem proposita concludet, & proinde in conuersis maior minorem concludens, ostendit similiter minorem, concludere maiorem. Haud dissimiliter transfert Campanus,

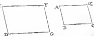
prima

primæ propositionis huius æquimultiplicationẽ, in maiorem multiplicationem sua 34 seu vltima, sup ponens priores rationes maiores subsequentibus, vt cõcludat omnium antecedentium simul sumptorum ad consequentia simul sumpta, maiorem rationem haberi aliqua posteriorũ rationum, quæ cum facile ex demonstratis percipiantur, atque ad sequentia demonstranda nulla necessitate exquirãtur potius Campani quam Euclidis fuisse arbitramur inuenta laudãda quidem, sed non necessaria qua per ea quæ diximus, super octaua huius diffinitione, facile colligentur. scilicet antecedentium augmentum rationes augere, decrementum verò minuere. E contra consequentium augmentum rationes minuere, decrementum vero augere. Cùm igitur quæ ad sequentia demonstranda requirantur, tantum exprimere ab Euclide sumpta decreuerimus, reliqua saltem non necessaria studiosis pro suis quisque viribus adaperienda relinquimus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber sextus.

Diffinitio prima.

SIMILES figurę rectilineę sunt, quę singulos angulos singulis æquales habent, & quę circa angulos æquales sunt, latera proportionalia.



Similes figuras rectilineas esse dicit, cum singuli anguli vnius, singulis angulis alterius sunt æquales, vt si figuras A B C & E D G similes esse dicat cùm anguli scilicet A ipsi E, B verò ipsi D, C autem ipsi G, & H ipsi F erunt æquales, & insuper quando latera æqualibus angulis terminata erunt proportionalia, vt A B ad E D, sit sicut B C ad D G, & sic in quibusuis rectilineis, dum tamẽ singuli anguli sint singulis æquales, & latera proportionalia, insu per quantumuis inæquales extiterint figuræ. Tamen similes erunt quemadmodũ vidimus 35 36 & 42 primi, dissimiles sæpius æquales fieri. Similiter autem positæ sunt figuræ ad datam rectã quæ datam rectam similis rationis cuilibet alterius datæ habent, aut quæ circum æquales angulos latera pa rarella, aut in rectum constituunt, quod præferendum fuit ad sequentium vsus intelligẽtiam. Non tamen pro diffinitione traditum cùm cuiuis satis se offerat intelligendum, nulla principij authoritate decoratum.

Diffinitio secunda.

Reciprocę figurę sunt, quando vtriusquę figurarum antecedentes in alterius earum consequentes, mutuò proportionales fuerint.



Hæc præcedentem insequitur quoad proportionem laterũ, & æqualitatem angulorum, sed prior vtrosque proportionis antecedentes in vna, & consequentes in alia disposuit figura. Hæc autem vni figuræ antecedentẽ vnius rationis, cõsequentem verò alterius apposuit. Reliquæ demum figuræ, reliquos attribuens terminos, vt A B ad E G, sicut E D ad A C, ea proportionis dispositio dicitur reciproca, siue reciprocæ figuræ ea proportione disposita.

MONITVM.

Huius diffinitionis texturam alterare cogimur, longe etenim à vero eam descripsit Zambertus dicens, reciprocas figuras quarum termini rationales (cuius vice græca vox rationes scribit) fuerint, nec quid sit rationalem esse dixit, nec insuper rationales esse sufficeret, sed proportionales, ea quidem proportione, quæ eius proportionis rationes suos antecedentes & consequentes mutuo siue alternatim disponant, vt diximus.

Diffinitio tertia.

Extrema & media ratione recta linea diuidi dicitur, quando fuerit sicut tota ad maius segmentum, sic maius ad minus.

Hanc diffinitionem absoluit II. propositio secũdi, alio quidem sectionis prætextu ibi demonstrato: extrema autem & media eo dicitur, quod trium propositarum maior in se binas, extremam ac mediam, contineat quantitates, vel maior binis reliquis æquetur.

Diffinitio quarta.

Altitudo vniuscuiusque figuræ, est à vertice ad basim perpendicularis acta.

Quod

Quod enim hic vocat figuræ altitudinem, vocauit 35 primi, & … cam sequentibus, in eisdem esse parallelis rectilineas figuras. Nunc autem non tantum planas figuras, sed & solidas intelligemus altitudinem suam metiri, perpendicularem a vertice in basim demissam, quæ semper æqualis erit, distantia parallelarum, planam vel solidam figuram comprehendentium. Quia vero non semper a vertice ad basim perpendicularis agi potest, sequemur parallelarum doctrinam, scilicet extendentes basim vndique quæ perpendicularem possit demissam recipere, vt in solido A B, *vel in plano* A D, *perpẽdicularis* A C *in basim* D C *extensam cadẽs, altitudo eius figuræ dicetur.*



Diffinitio quinta.

Ratio ex rationibus constare dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

Exposuimus tertia quinti diffinitione quid sit ratio, ibidem enim eam esse reperimus, veram quantitatem habitudinis duarum magnitudinum per multiplicationem, qua antecedens multiplicat consequens, expressam. Cùm igitur rationis quantitas à multiplicatione pendeat, merito voluit Geometer rationes simul iungi multiplicatione, vt ex his composita prodeat, quæ composita ex simul coniunctis constare dicetur sic rationes sesquialteram, & sesquitertiam dicemus cõponere per multiplicationem suarum denominationum, rationem duplam: nam ratio 6 ad 4 sesquialtera denominatur, ab 1 & $\frac{1}{2}$ reliqua verò 4 ad 3 sesquitertia, per 1 $\frac{1}{3}$ illæ igitur rationum quantitates, scilicet 1 $\frac{1}{2}$ per 1 $\frac{1}{3}$ multiplicata inuicem, producunt 2 quantitatem, scilicet duplam rationis 6 ad 3 extremarum.

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$
6 4 3
2

Cùm autem tertia quinti diffinitione diximus, rationis minoris inæqualitatis quinque species, sub duabus quantitatis denominationibus arctari, particulari scilicet & partiente, vt ab his veram Euclidis mentem deducamus, earum rationum quantitates multiplicantes, ac compositas productas (iuxta huius diffinitionis methodum) exerentes rationes, ostendamus qua lege hoc absoluatur negotium. Quoniam geometrarum est quantitates comparare, Arithmeticorum verò comparationem eam numeris discernere, vbi cadant numerorum vires, seruata tamen vera discrepantia quantitatis rationum maioris inæqualitatis, à minoris inæqualitatis rationum quantitate, maximè in rationibus componendis. Nihilo secius plures fuerunt arithmetici, rationes minoris inæqualitatis ab eisdem numeris eas denominantibus exprimi, quibus earum conuersæ maioris inæqualitatis (præposita tantum particula sub) asserentes, vt tripla subtriplam opponẽtes, sesquialteræ verò subsesquialteram, superbipartienti verò tertias, subsuperbipartientem tertias: duplæ verò sesquialteræ sub duplam sesquialteram. Triplæ autem tripartienti quartas, sub triplam tripartientem quartas, vnde aliqui ex harum denominationum numeris, per hanc diffinitionem, rationum quantitates constare arbitrati sunt, censentes rationem 4 ad 6 subsesquialteram nominari, eò quod eius conuersa 6 ad 4 maioris inæqualitatis sesquialtera nuncupetur, ac proinde eandem earum esse quantitatem, vt quicquid vni conueniat alteri conuenire dixerint. Cùm autem obsequendum fuit (horum more) huius diffinitionis imperio, scilicet omnes rationum compositiones, per multiplicationem absolui, proposita fuit ratio 4 ad 2 constare ex ratione, 4 ad 6 quæ ab eis nuncupata fuit subsesquialtera, & 6 ad 2 tripla, sub sesquialteram verò 1 $\frac{1}{2}$ per triplam 3 multiplicantes repererunt 4 $\frac{1}{2}$ (productum rationis 4 ad 2 denominatorem) longè à vero distare. Quonam pacto autem iuxta Euclidis verba, hanc 4 ad 2 rationem, ex rationibus medijs 4 ad 6 & 6 ad 2 restituerent inquirentes, quam absurdum & Euclidis precepto penitus oppositum protulerunt inuentum, scilicet denominatorem rationis maioris inæqualitatis 6 ad 2, qui fuit 3, per minoris denominatorem quem dicunt 1 $\frac{1}{2}$ diuidentes, vt tandem iure vel iniuria producant 2 denominatorem, 4 ad 2 extremorum, licet Euclides omnes illas rationum compositiones multiplicatione produci iubeat, non diuisione, subinferentes hanc diffinitionem, tantum in omnino maioris vel omnino minoris inæqualitatis rationibus intelligi, non autem quando altera maioris, alia verò minoris fuerit inæqualitatis. Nam id per multiplicationem iubente Euclide adimplere non potuerunt, ea namque de causa quòd denominationes rationum maioris pro denominationibus rationum conuersarum minoris inæqualitatibus impropriè sumpserant. Et cùm binæ denominationes inter se ad incrementum aut decrementum multiplicatæ, idem producant denominans, incremento aut decremento referendum, eas ideo confundi ac rationes incrementi (vel maioris in-

4 6 2
$\frac{1}{2}$ 3

æqualitatis) eadem denominationis quantitate, qua ipsis conuersas rationes decrementi (seu minoris inæqualitatis) nuncupari putarunt, maximè cum idem produci viderint, si quantitatem per aliquem numerum diuidamus, aut equidem si eandem per eundem numerum in decrementum multiplicemus sumentes autem binarum denominationum, alteram in incrementum, alteram verò in decrementum multiplicandas, non idem ac si binas multiplicarent, aut binas diuiderent, produci perceperunt. Quare vt idem producant, rationem incrementi seu maioris inæqualitatis, per rationem decrementi, seu minoris inæqualitatis diuidi iusserunt: hacque lege huic diffinitioni multiplicationem quandoque & diuisionem quandoque ascripserunt, contra Euclidis mentem, qui sola multiplicatione eius absolui præcepit operam, quapropter nos improprias rationum maioris inæqualitatis denominationes abstulimus, eas scilicet, quæ earum conuersis conuenirent, vt diximus tertia quinti diffinitione. Proprias eis denominationes ex habitudinis vera substantia deprehensas ascribêtes, vt ex his qualibet rationis determinata quantitas, per multiplicationem quantitatis mediarum depromatur, nulla adducta diuisionis alteratione, Euclidémque per multiplicium legem sua edocendi proposita capacem satis supérque fuisse demonstremus. Quod exemplo, in omnino maioris, omnino minoris, & mixtis ostendamus rationum compositionibus, sit componenda ratio A ad C, ex binis A ad B, & B ad C, maioris inæqualitatis rationibus, scilicet A ad B sesquialtera $1\frac{1}{2}$ & B ad C sesquitertia $1\frac{1}{3}$ inuicem multiplicatis producentibus 2, dicemus A ad C rationem duplam esse. Sit rursus eadem figura in rationibus omnino minoris inæqualitatis componenda ratio C ad A, ex binis scilicet C ad B tripartiente quartas $\frac{3}{4}$, & B ad A bipartiente tertias $\frac{2}{3}$, ductis $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$ producemus $\frac{1}{2}$, dimidiam rationis C ad A denominatricem. Haud secus in mixtis, Sit componenda ratio, A ad C ex ratione A ad B minoris inæqualitatis (nempe bipartiente tertias) & ex ratione B ad C (maioris scilicet tripla) multiplicatis earum quantitatibus $\frac{2}{3}$ per 3 fiet 2, denominator quippe quantitatis rationis ipsius A ad C duplæ. Si etenim ex pluribus duabus componendæ sint rationes extremarum quantitatum, idem fiet, vt exemplo in his quatuor magnitudinibus A B C D, Sint inter extremas A & D tres rationes, scilicet A ad B sesquialtera $1\frac{1}{2}$ B ad C dupla (2) C verò ad D bipartiens tertias ($\frac{2}{3}$) prima ($1\frac{1}{2}$) per secundam 2 ducta fiet 3, rursus 3 per reliquam $\frac{2}{3}$ ducta fiet 2, denominator quippe rationis extremarum A ad D. Hac etenim lege quasuis rationum compositiones, sola multiplicatione (Euclidis scripta seruantes) complebimus. Ac veras rationum quantitatibus denominationes præstabimus, præcipuam earum quantitatis affinitatem sonantes. Licet aliqui rationi quantitatem inesse negauerint, non animaduertêtentes rationem ab Euclide dici maiorem minorem, vel æqualem, ad alteram, veram quantitatis esse demonstrante essentiam. Ididem quantitati proprium asseruit Aristoteles, secundum quam quid maius, minus aut æquale dicatur. Quoniam hac rationum compositio à decima diffinitione quinti orta est. Qua rationē primæ ad tertiā multiplicem ait Euclides rationis primæ ad secundā, scilicet duplā, primæ verò ad quartam triplicē eiusdem primæ ad secundam, vt percipiamus rationes extremarum (primæ scilicet & tertiæ) ex rationibus mediarum, inuicem multiplicatis, produci, vt hac diffinitione denunciat. Quæ quidem multiplicatio si per seipsam fiat, duplam producet: si quidem per aliam fiat multiplicatio, aliud producet consurgens, nec duplum, nec triplum quadruplumve, vt ostendimus exemplis rationum quæ numeris exprimi possunt multiplicandæ. Quod attamen locum obtinet in reliquis rationibus cousque surdis, quæ numeris exprimi non valeant, vt patebit 30 propositione huius, per lineam extrema & media ratione sectam, tres rectas proportionales efficientem: nam primæ seu totius ad tertiam, siue minus segmentum ratio, dupla est rationis primæ ad maius segmentum, per 10 diffinitionem quinti, & igitur multiplex. Nihilominus illarum trium linearum rationes nullis exprimi valent numeris, tamen per multiplicationem rationis primæ ad secundam, in se necessario consurgit primæ ad tertiam ratio, quamuis ignota penitus existat huiusmodi multiplicatio, nobis non autem natura, cuius proprium est ea multiplicatione ignota nobis similes surdas producere rationes, æquè vt reliquas, nobis ob numerorum facilitatem familiares. Ratio itaque quæuis siue surda, siue numeris expressa constat (inter extremas quasuis quantitates eiusdem generis) ex multiplicatione rationum mediarum quarumcunque. Illud idem affirmat Euclides 23 huius, dicens æquiangula parallelogramma, ex rationibus laterum conflare rationem. Quòd absoluit demonstratio ex rationibus mediorum componens rationes extremorum iuxta harum diffinitionum methodum.

MONITVM.

Ex his [illegible] rium prodit, rationem extremarum ex rationibus quotcunque mediarum quantitatum nasci quia licet ratio A ad B excedat rationem extremarum A ad C, & sit minor Ratio tamen reliqua B ad C tanto minor reperietur, vt excessum quem habuit A ad B super A ad C præcise minuat & auferat. Quare si media quantitas vtraque extremarum minor fuerit, rationum componentium prior, maioris, posterior verò minoris erit inæqualitatis. Si vero media quantitas maior fuerit, prior ratio minoris, posterior verò maioris inæqualitatis erit: sic in quotlibet terminis mediis, prior etenim extremorum, proportionem inchoans, & vltimus eam concludens, cogunt rationes mediorum nulla arte extremorum rationem variare posse sed semper ad extremorum rationis quantitatem redire, quod per numeros facilè demonstratur. Sint extremi 4 & 3 & quotcunque medy 6 & 8, licet vltimus 3 sit minor primo 4, tamen videmus 6 addere ad 4 binarium rursus 8 addere ad 6 binarium: sunt igitur iam priori addita duo binaria, quæ videmus per 3 auferri ab vltimo medio, vt ea tantum supersit vnitas, qua 4 prior excedit 3 vltimum, ac ad veram ipsius 4 ad 3 habitudinem, siue rationem fiat reductio. Quare quantæcunque fiant mediarum rationum additiones, vel quantitatum subtractiones, illæ nihilominus per extremorum respectum ea arte cogentur, vt omnes simul sumptæ mediorum rationes, ad extremorum rationis quantitatem reducantur, id equidem facta earum rationum inter se multiplicatione. Ideo diximus inter se eas multiplicandas esse rationum quantitates, ne iuxta Theonis verba hæc quinta sexti per quemuis multiplicantem eas ducere liceret, veluti licuit ex quarta diffinitione quinti magnitudinem quouis multiplicante excedentem, rationem habere, dici. Sed adinuicem multiplicandæ sunt rationes. Si verò media quantitas inter extremas, maior vna, minor verò reliqua constituatur, vtraque ratio aut maioris, aut simul minoris erit inæqualitatis, vt 4 6 8 minoris, & 8 6 4 maioris. Illic enim dimidia ratio, 4 ad 8 ex bipartiente tertias, & tripartiente quartas, colligitur, hic verò dupla 8 ad 4 ex sesquitertia & sesquialtera componitur, vbique seruata multiplicatione, iuxta diffinitionis veram mentem.



4 6 8 3

Diffinitio sexta.

Deficere specie parallelogrammo simili dato, dicitur parallelográmum ad rectam lineam applicatum, quando applicatum ad totam lineam occupandam deficit, parallelogrammo simili dato, excedere verò quando excedit simili dato.

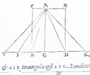
Vt si A D ad rectam A B applicatum, deficit ipso D B simili dato E, vel si ad rectam A C applicatum excedit eodem D B simili dato E dicetur deficere specie simili dato, aut excedere.



Propositio prima.

Triangula & parallelogramma quæ sub eadem sunt altitudine, ad se inuicem sunt vt bases.

Sint bina triangula A B G, A G D super eadem altitudine A G. Sint item bina parallelogramma A E B G & A G D Z, similiter sub eadem altitudine A G vel E B, per 4 diffinitionẽ huius: Dico esse vt G B basis ad G D basim, sic A G B triangulum ad A G D triãgulum, sicque E G parallelogrammum ad G Z parallelogrammum. Sint ordine quatuor magnitudines, scilicet B G & G D bases prima & secũda A B G & A G D vero triangula tertia & quarta. Producatur recta B D ad vtrasque partes versus, T & K, ipsi G D æqualis sit D K, ipsi verò B G quotcunque æquales fiant, I B T I, coniunctis A T A I A K: quoniam per 38 primi, æqualia sunt singula A T I & A I B triangula ipsi A B G. Similiter



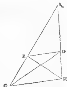
& A D K ipsi A G D. Totidem erunt triangula ipsi A B G æqualia, quot & bases ipsi [illegible] *liter totidem erunt triangula ipsi A B G æqualia, quot & bases ipsi G D æquales,* [illegible] *bet basi vnum constitutum sit triangulum. Primæ & tertiæ igitur scilicet bases B G & trianguli A B G æquemultiplicia, scilicet tota T G, & totum A T G triangulum, secũdæ & quartæ scilicet basis G D & trianguli A G D æquemultiplicia (totam scilicet G K, & totum A G K triangulum) simul excedunt, æquantur, vel deficiũt, hoc est, si T G excedat G K, triangulum A T G excedet A G K, si deficiat, deficiet si æquetur, æquabitur per 38 primi. Quatuor igitur simplices prima B G ad secũdam G D bases, erunt sicut tertia A B G ad quartam A G D triangula. Quia vero ea triangula dimidia sunt parallelogrammorum A E B G & A G D Z, per 41 primi, quæ per 15 quinti sunt in eadem ratione partium, scilicet triangulorum A B G & A G D, Erũt & parallelogramma in eadem ratione basium B G & G D, per 11 quinti. Potuerunt per æquemultiplicia demonstrari parallelogramma, veluti triangula. Triangula igitur & parallelogramma quæ sub eadem sunt altitudine, ad se inuicem sunt vt bases.*

Corollarium.

Si binarum rectarum altera seccetur vtcumque, rectangula sub integra & quolibet segmento sectæ comprehensa ad se inuicem sunt vt segmenta. *Nam rectangula sub A G integra & segmentis B D sectæ, scilicet B G, G D ad se inuicem sunt, vt B G ad G D segmenta, sic B A ad A D rectangula quotcunque fuerint.*

Propositio secunda.

Si triãguli ad vnum laterũ acta fuerit aliqua recta linea parallela, proportionaliter secar ipsius trianguli larera: etsi trianguli latera proportionaliter secta fuerint. Per sectiones ducta linea recta, parallela erit ad reliquum trianguli latus.



Sit triangulum A G E, ad cuius vnum laterum G E parallela B D ducatur introrsum: Dico B D secare reliqua latera A G & A E proportione A B ad B G, vt A D ad D E. Quoniam enim triangula B D E & B D G super basi B D & eisdem parallelis existentia, sunt per 37 primi æqualia. sed idem triangulum A B D ad æqualia scilicet B D E & B D G eandem rationem habet per septiptimam quinti, & per præcedentem, eam habet A B D ad D B E quàm A D ad D E, & A B D ad B D G, quàm A B ad B G habet. Sequetur igitur per 11 quinti esse A B ad B G, sicut A D ad D E. Ad secundam autem partem supponantur latera secta A B ad B G sicut A D ad D E. Dico B D esse ipsi G E parallelam, cùm autem sit A B ad B G vt A D ad D E, erit (per præcedẽtem) A B D ad D B E, sicut idem A B D ad B D G. Ad quas igitur eadem A B D magnitudo, eãdem habet rationem, ipsa (per 9 quinti) sunt æquales. Triangula igitur D B G & B D E erunt æqualia, super eadem itaque basi B D existentia, in eisdem sunt parallelis B D G E, per 39 primi. Si itaque triãguli ad vnum laterum acta fuerit aliqua recta linea, &c.

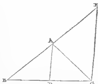
Corollarium.

Si parallela vni laterum trianguli triangulum secuerit, simile toti à toto tollet. *Nam proportionales secat vt patuit A G ad A B vt A E ad A D, erit igitur vicißim (per 16 quinti) A G ad A E vt A B ad A D, proportionalia igitur sunt circa communẽ ad A angulum latera, sed æquiãgula nam A E G A D E recta, cadunt in parallelas, quare angulos A D B ipsi A E G & A B D ipsi A G E æquales efficient, (per 29 primi.) Similia igitur erunt, A B D ablatum, & A B G totum (per primam diffinitionem huius.)*

Proposi

Propositio tertia.

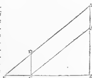
Si trianguli angulus bifariam secetur, dispescens autem angulum recta secuerit & basim, basis segmenta eandem habebunt rationē, reliquis ipsius trianguli lateribus. Et si basis segmenta eandem habuerint rationem reliquis ipsius trianguli lateribus, à vertice ad sectionem coniuncta recta, bifariam secat ipsius trianguli angulum.



Trianguli A B G *angulus* A *bifariam secetur ducta* A D, *per 9 primi, secante basim in* D. *Dico esse* B D *ad* D G *sicut* B A *ad* A G. *Per signum* G *parallela excitetur ipsi* A D *sitq;* G E. *Extendatur autem recta* B A *in* E, *in parallelas autem* A D E G *cadens* B E, *angulum* B E G *angulo* B A D *æqualem (per 29 primi) efficit, in easdem rursus parallelas cadens* A G, *alternatim* A G E *&* G A D *angulos æquos efficit, per eandem, singuli igitur* A E G, A G E *anguli singulis* B A D *&* G A D *sunt æquales. Et igitur adinuicem, cùm ipsi* B A D *&* G A D *sint per hypothesim æquales. Latera igitur* A E, A G *æquis angulis subtēsa (per 6 primi) æqualia erunt: quia verò ad vnum laterum trianguli* B E G *acta est parallela* A D, *proportionaliter erit* B D *ad* D G *sicut* B A *ad* A E *(per 2 huius) hoc est ad* A G *sibi æqualem. Ad secūdam verò partem, si fuerit* B D *ad* D G *vt* B A *ad* A G: *Dico à vertice* A *ad sectionem* D *coniunctam, angulum* B A G *bifariam secare, disponantur* B E *&* G E *vt prius, quoniam est* B D *ad* D G, *sic* B A *ad* A G, *erit (per præcedentem)* B D *ad* D G *vt* B A *ad* A E, *æquales igitur sunt* A E, A G *rectæ, & proinde (per 5 primi) anguli* A E G, A G E *(qui ad basim) similiter æquales: sequetur igitur (per 29 primi)* B A D *ipsi* A E G *&* G A D *ipsi* A G E *esse æquales, & adinuicem igitur æquales erunt* D A B, D A G, *cum sint æqualibus æquales. Bifariam itaque secuit recta* A D *angulum* B A G. *Si igitur trianguli angulus, &c.*

Propositio quarta.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, & similis rationis sunt, quæ æqualibus angulis latera subtenduntur.



Sint triangula æquiangula A B G, D G E, *habentia angulos æquales* A B G *ipsi* D G E, *&* A G B *ipsi* D E G, *ac* B A G *ipsi* G D E: *Dico ea proportionalia habere latera,* A B *ad* D G *vt* B G *ad* G E, *vtq;* A G *ad* D E *æqualibus angulis subtensa. Ponatur trianguli* D E G *(vel similiter descripti) latus* E G *in rectam ipsius* G B, *quoniam anguli* A G B *&* D E G *sunt æquales, per 28 primi, parallelæ erunt* E D *&* G A, *quia vero anguli* A B G *&* D G E *sunt æquales, erunt (per eandem) parallelæ* A B *&* D G. *Compleatur igitur parallelogrammum* A G D Z, *in rectam cadent* E D, D Z, *per 30 primi, cùm sint eidem* A G *parallelæ, & concurrant in* D, *similiter* B A, A Z, *cùm parallelæ sint ipsi* G D. *Cum autem trianguli* B E Z *ad vnum latus* B Z *acta sit parallela* D G, *erit* E G *ad* G B *sicut* E D *ad* D Z, *hoc est, ad* G A *sibi æqualem. Similiter quia ad vnum rursus latus* E Z *acta est parallela* A G, *erit* B G *ad* G E *sicut* B A *ad* A Z, *hoc est* G D *sibi æqualem, sicut igitur conuersim (per corol. 4. quinti)* B G *ad* G E, *sic* A G *ad* D E, *& sic fuit* A B *ad* D G. *Æquiangulorum itaque triangulorum proportionalia sunt, &c.*

Propositio quinta.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur.

Sint duo triangula A B G *&* D E Z, *quorum latera sint proportionalia* A B *ad* A G *vt* D E *ad* D Z, *vtque* A B *ad* B G *sic* D E *ad* E Z, *& sicut* A G *ad* G B *sic* D Z *ad* Z E: *Dico ea triangula esse æquiangula, & æquales habere angulos, quos eiusdem rationis latera subtendunt, scilicet* A *ipsi* D, *&* B *ipsi* E, *ac* G *ipsi* Z, *super rectam* E Z *ad signum* E *angulus angulo* B *æqualis constituatur* Z E I, *ad signum vero* Z *æqualis ipsi* G *sit* E Z I, *per 23 primi, reliquus igitur* Z I E *reliquo* A *est æqualis, per corollarium primum 32 primi. Aequiangula igitur sunt* A B G *&* I E Z *triangula. Erunt itaque (per præcedentem) circa* A *&* I *(æquales angulos) latera proportionalia,* A B *ad* A G *vt* I E *ad* I Z, *&* A B *ad* B G *vt* I E *ad* E Z, *&* A G *ad* G B *vt* I Z *ad* Z E, *sed sicut* A B *ad* B G *sic fuit* D E *ad* E Z, *igitur* I E *&* D E *ad eandem* E Z *eandem rationem habētes, sunt (per 9 quinti) æquales, similiter* D Z *&* I Z *æquales erunt. Sequetur itaque (per 8 primi) cū* D E D Z *ipsis* I E I Z *& bases sint æquales æquiangula esse* D E Z *&* I E Z *triangula, sed ipsi* A B G *triangulo æquiangulum fuit* I E Z. *Per primam igitur communem sententiam, eidem* A B G *æquiangulum erit* D E Z *triangulum, & æquales erunt anguli* B A G *ipsis* E D Z *eiusdem rationis lateribus subtensis. Si igitur duo triangula latera proportionalia habuerint, &c.*

Propositio sexta.

Si bina triangula vnum angulum vni angulo ęqualem habuerint, & circum æquales angulos latera proportionalia æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos sub quibus eiusdem rationis lateta subtenduntur.

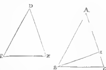
Sint duo triangula A B G *&* D E Z, *vnū angulum* A *vni angulo* D *æqualem habētia, circum eos autem angulos, latera* B A *ad* A G, *sicut* E D *ad* D Z: *Dico reliquos angulos scilicet* B *ipsi* E *&* G *ipsi* Z *(eiusdem rationis lateribus subtensos) æquos esse. Ad datam rectam* D Z *signúmque eius* Z *ipsi* G, *æqualis angulus constituatur* D Z I: *ad signū autem* D *ipsi* A *æqualis fiat* Z D, *reliquus itaq;* B *reliquo* I *æquus erit per corollarium 32 primi. Aequiangula igitur erunt* A B G *&* D I Z *triangula, & proinde (per 4 huius) erit* A B *ad* A G, *sicut* D I *ad* D Z. *Susceptum est autem vt* B A *ad* A G, *sic* D E *ad* D Z: *sicut igitur (per 11 quinti)* D E *ad* D Z, *sic* D I *ad* D Z, *æquales igitur sunt (per 9 quinti)* D E *&* D I. *Sed triāguli* E D Z *duo latera* E D D Z *duobus* I D D Z *& angulus* E D Z *angulo* I D Z *sunt æqualia. Aequiangula igitur, per 4 primi, erunt triangula* E D Z I D Z, *& æqualia, æquiangula proinde erunt, per primam communem sententiā,* A B G *&* D E Z *quia verò, per hypothesim, æqualis fuit angulus* B *ipsi* I, *& eidem* I *æquus ostensus est* E, *& ideo* E *ipsi* B *æquus erit, similiter* Z *ipsi* G, *reliqui quidem sub quibus eiusdem rationis latera subtenduntur. Si igitur bina triangula vnum angulum vni angulo æqualem &c.*

Propositio septima.

Si bina triangula vnū angulum vni angulo æqualem habuerint, circum autem alios angulos latera proportionalia: Reliquorum verò vtrumque simul aut minorem aut non minorem recto, ęquiangula erunt triangula, & ęquales habebunt angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

Sint

Sint duo triangula A B G, *& D E Z, angulum A angulo D æqualem habentia, circa verò alios angulos B & E latera proportionalia A B ad B G, vt D E ad E Z, Reliquorum vero G & Z sit primo minor recto quilibet eorum. Dico æquiangula esse triangula* A B G *& D E Z, & æquales habere angulos B & E, circum quos proportionalia sunt latera, quod si non sint æquales B & E, sit B maior. Ad signum B recta A B, per 23 primi, constituatur ipsi E æqualis angulus A B I. Cum enim æquales sint A ipsi D & A B I ipsi D E Z anguli, reliquus A I B reliquo Z æquus erit, per corollar. 32 primi. Sicut igitur D E ad E Z, sic erit A B ad B I, per 4 huius. Sed sicut D E ad E Z, sic fuit A B ad B G, sicut proinde A B ad B I, sic A B ad B G. Aequales igitur sunt B I & B G, per secundam partem 9 quinti. Anguli itaque B I G B G I (ad basim) sunt æquales, per 5 primi, quia vero idem B I G & B G I sunt (per 17 primi) duobus rectis minores, ipso B I G existente vno recto minore, reliquus A I B vno recto maior erit, per 13 primi. Et ostensus est æqualis ipsi Z angulo, recto quidem minori posito, quod fieri nō potest. Neuter itaque angulorum A B G & D E Z altero maior est, æquales igitur sunt. Sit rursus secūdo nō minor recto quilibet angulorū G & Z. Dico A B G & D E Z æquos esse Si autem non, sit B maior, & (vt prius) sit A B I æquus ipsi D E Z. Reliquus B I A reliquo Z æquus erit, per coroll. 32 primi. Et tandem anguli B I G & B G I æquales erunt, sed B G I non minor recto supponitur, bini igitur B I G & B G I eiusdem trianguli anguli, duobus rectis non sunt minores, contra ostensum 17 primi, quod est absurdum. Qualibet igitur via B & E anguli sunt æquales, circum quos proportionalia sunt latera, & proinde (per præcedentem) æquiāgula sunt triāgula A B G & D E Z. Si itaque bina triangula vnum angulum vni angulo, &c.*



Propositio octaua.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basim perpendicularis agatur, quę ad perpendicularem triangula similia sunt toti & ad inuicem.

Sit triangulum A B G *habens angulum rectum* A, *à quo perpendicularis in basim demittatur* A D *Dico triangula* A B D *& A D G similia esse toti* A B G, *& adinuicem. Triangulorum* A B G *& A B D recti sunt anguli, scilicet per hypothesim* B A G, *& per demissam* A D, *angulus* A D B, *communis verò est* B *angulus. Reliqui igitur* B A D *& A G D (per corollarium 32 primi) erūt æquales: quia similiter triangulorum* B A D *& A G D duo anguli* B D A A D G *recti sunt æquales, & duo alij* B A D A G D *fuerunt æquales, reliqui (per idem coroll. 32 primi)* A B D G A D *æquales erunt. Aequiangula igitur erunt triangula* A B G A B D *& A G D. Circum igitur æquales angulos latera proportionalia erunt, per 4 huius. Et proinde (per primam diffinit. huius) similia erunt, scilicet* A B D *& A G D (quæ ad perpendicularem) adinuicem, & toti* A B G. *Si itaque in triangulo rectangulo, &c.*



Corollarium.

A trianguli recto angulo in basim perpendicularis media est proportionalis inter basis segmenta: insuper inter basim & vnumquodque segmentorum medium, proportionale est latus quod ad idem segmentum. *Cùm sit vt* B D *ad* D A, *sic* D A *ad* D G *circum æquales angulos, media est proportionalis* A D *inter basis segmenta. Præterea erit medium latus* A G *inter* B G G D, *sicut latus* A B *inter* G B B D, *comprehendunt enim eosdem angulos, scilicet* G *&* B.

Propositio nona. *Problema* I.

A data recta linea, ordinatam partem abscindere.

Proponatur A B *recta, a qua imperemus aliquam partem abscindi, scilicet sex tertiasdecimas vel* $\frac{6}{13}$ *vt omni geometricæ parti conuenire hec ostendatur iuxta primã quinti diffinitionẽ. Concurrat cũ* A B *recta quedã* A G *ad signum* A *in acutam angulum, rectæ verò* A G *quotcũque propositæ signentur partes scilicet* 13, *ad sextam autem sit* A D, *Tredecim verò habeat* A G, *coniunctæ autem* G B *parallela fiat* D Z: *Ipsa secat trianguli* A B G *latera* A B A G *proportionaliter, per 2 huius. Sicut itaque* G D *ad* D A *sic* B Z *ad* Z A. *Et componendo sicut tota* G A *ad ordinatam partem* A D *sic* B A *ad ordinatam partem* A Z, *per 18 quinti. A data igitur recta* A B *ordinatam partem* A Z *abscidimus.*



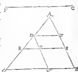
MONITVM.

Similiter si abscindere à data A B *ordinatam incertam velimus, secetur* A G, *per 11. secundi in* D. *Tum similis fiet* A Z *pars rectæ* A B, *qualis fuerit* A D *rectæ* A G, *quæ tamẽ incertæ erunt, vt quandoque latius. Hac de caussa hæc incerta æquè pars ordinata erit rectæ* A B, *vt alia quæuis discreta.*

Propositio decima. *Problema 2.*

Datam rectam lineam non sectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Esto data recta A B *non secta, data verò secta esto* C F, *cuius primo segmento æqualis sit* A D, *secundo* D E, *tertio verò* E G, *quotquot fuerint in recta* C F. *Coniuncta autem* G B *parallelæ ducantur* D Z *&* E I. *A signo* D *parallela ipsi* A B *ducatur* D K *secans* E I *in* T, *Parallelogramma igitur sunt* D I T B D B. *Æquales itaque sunt* D T Z I *&* T K I B *rectæ. Et quoniam parallela est* E T I *ipsi* G K B, *erit, per 2 huius,* G E *ad* E D *ut* K T *ad* T D, *vel sicut* B I *ad* I Z *ipsis æquales. Et cùm* D Z *sit parallela ipsi* G B, *erit (per eandem) vt* G D *ad* D A *sic* B Z *ad* Z A. *Est igitur* B I *ad* I Z *vt* G B *ad* E D *&* I Z *ad* Z A *sicut* E D *ad* D A. *Datam igitur rectam lineam* A B *non sectam, data recta* C F *lineæ sectæ similiter secuimus.*



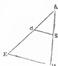
Corollarium.

Hinc fit datam rectam lineam in datarum rectarum ratione, secare. *Nam coniungantur in rectam lineam angulum cum data recta efficientem, datæ rectæ rationes habentes, veluti* A D D E E G, *nam hoc theoremate data* A B *in earum rationes habentes* A Z Z I I B *rectas, secta est.*

Propositio vndecima. *Problema 3.*

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint binæ rectæ A B A G *ad angulum* A *dispositæ, quæ producantur in rectum ad* E *&* D. *Rectæ vero* A G *æqualis ponatur* B D, *& coniunctæ* B G *parallela fiat* D E. *Quoniam trianguli* A D E *ad vnum latus* D E *parallela existit* B G, *erit (per 2 huius)* A B *ad* B D *sicut* A G *ad* G E. *Sed* A G *&* B D *sunt æquales: erit igitur sicut* A B *ad* A G, *sic eadem* A G *ad* G E. *Duabus igitur datis* A B A G *rectis, tertiam* G E *proportionalem reperimus.*



Propositio duodecima. *Problema 4.*

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

Exponan-

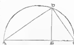
Exponantur tres rectæ scilicet A B G, oportet iam ipsis quartam inuenire proportionalem, sint binæ rectæ D E D Z contingentem angulum constituentes. Recta verò A æqualis ponatur D T, ipsi B verò æqualis sit T Z. At ipsi G æquetur D I, coniunctæ T I parallela fiat Z E, producta D I in E. Trianguli itaque D Z E ad vnum laterum Z E acta est parallela T I. Proportionales igitur erunt (per 2 huius) quatuor rectæ, D T ad T Z sicut D I ad I E, ipsis autē D T T Z D I æquales sunt A B G & erit igitur sicut A ad B sic G ad I E. Tribus itaque datis rectis lineis, quartam inuenimus proportionalem.



Propositio decimatertia. *Problema 5.*

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Proponantur binæ datæ rectæ, A B B G in rectum, quibus mediam inquiramus proportionalem, super tota A G semicirculus describatur A D G, ad signum vero B ipsi A G perpendicularis excitetur B D, coniunctis A D D G rectis, triangulum A D G rectangulum erit, per 31 tertij. Cùm autē ab angulo recto D in basim A G sit demissa perpendicularis D B, ipsa est media proportionalis inter segmenta A B B G basis A G, per coroll. 8. huius. Duabus igitur datis rectis A B B G mediam proportionalem D B inuenimus.



Corollarium.

Hinc assequimur data recta linea, aliam rectam (duplum eius excedentem) in binas extremas proportionales illi secare. *Sit C data cuius duplum excedat A B, ad signum A perpendicularis fiat D A quæ æqualis ponatur datæ C, super A B verò semicirculus describatur A G B, ipsi verò A B parallela sit D G quæ circulum secabit, cum sit minor semidiametro, per hypothesim, perficiatur parallelogrammum D F coniunctis G A G B. Æqualis igitur erit G F ipsi A D, & quia perpendicularis est ad datam A B (per constructionem) ipsa G F, rectam A B datam secabit in extremas sibi proportionales A F F B per corol. 8 huius.*



Propositio decimaquarta.

AEqualium & vnum vni æqualem habētium angulum parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum vni æqualem habentium angulum, reciproca sunt latera quæ circum ęquales angulos, ea quoque sunt ęqualia.

Sint æqualia parallelogramma A B & B G vnum angulum D B Z vni angulo I B E æqualem habentia. Dico latera D B ad B E esse reciprocè, sicut I B ad B Z circū æquales angulos, cùm anguli D B Z & I B E sint æquales, ponatur I B in rectum ipsius B Z, reliqua D B erit in rectum ipsius B E, sunt enim ad verticem, perficiatur parallelogrammum Z E, erit (per 7 quinti) sicut A B ad Z E parallelogramma, sic B G ad idem Z E, sunt enim æqualia A B & B G, sed sicut A B ad Z E sic recta D B ad B E, per primam sexti, sicutque B G ad Z E sic I B ad B Z, per eandem, sunt enim adinuicem vt bases, sicut igitur (per vndecimam quinti) D B ad B E latera, sic reciprocè I B ad B Z. Continet enim vnum parallelogrammum antecedens, & consequens consequentis & antecedentis alterius, per secundam huius diffinitionem. Similiter econuerso ostendetur secunda pars, scilicet si latera D B ad B E sint reciprocè, vt I B ad B Z. Dico parallelogramma A B B G esse æqualia, cum sit eadem

..tio (ex hypothesi) D B ad B E, ratione B I ad B Z, eadem erit (ex prima sexti) parallelogrammorum A B ad Z E, quæ B G ad idem Z E. Ipsa igitur A B & B G sunt (per 9 quinti) æqualia. AEqualium itaque & vnum vni æqualem habentium, &c.

Propositio decimaquinta.

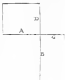
AEqualium & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum, reciproca sunt latera quę circum æquales angulos. Et quorum vnum vni ęqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, quę circum ęquales angulos, ea quoque sunt æqualia.



Triangula A B G & A D E sint æqualia, & angulos B A G & D A E æquales habeant, ad verticem scilicet: Dico circa eos angulos latera esse reciproce G A ad A D, sicut E A ad A B. Cum autem anguli sint ad verticem in rectum erũt B A E & G A D rectæ, triangula itaque A B G A B D (cùm sint sub eadem altitudine) ad se inuicem sunt vt bases G A ad A D, per I huius. Similiter triangula A D E & A D B sunt sicut A E ad A B, bases. Sed cùm ex hypothesi A B G & A D E triangula sint æqualia, & ad idem A B D rationem habeant, eandem habebunt rationem, per 7 quinti. Rectæ igitur G A ad A D, & E A ad A B (eandem ipsis triangulis habentes rationem) adinuicem eandem habebunt, per vndecimam quinti. Alternatim igitur erunt proportionales G A ad A D, vt E A ad A B, per 2 diffinitionem huius. Ad secundam autem partem supponantur esse reciprocæ G A ad A D, sicut E A ad A B: Dico triangula A B G & A D E esse æqualia. quoniam enim est eadem ratio G A ad A D, quæ E A ad A B, sed vt G A ad A D, sic A B G ad A B D triangula, per primam sexti, sicútque E A ad A B, sic similiter A D E ad A D B. Eadem igitur erit ratio A B G trianguli ad A D B, quæ ipsius A D E ad idem A D B. Aequalia proinde erunt A B G & A D E triangula, per 9 quinti. Aequalium igitur & vnum vni æqualem habentiũ, &c.

Propositio decimasexta.

Si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehensum rectangulum, æquum est ei quod sub mediis continetur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquum fuerit ei quod sub mediis continetur rectangulo, quatuor rectę lineę proportionales erunt.



Sint quatuor lineæ proportionales A ad G, vt B ad D: Dico comprehensum rectangulum sub extremis A & D æquum esse, ei quod à mediis B & G fit rectãgulo. Fiat ex A D rectãgulum, item ex B & G aliud rectangulum. quoniam parallelogrãmorum A D & B G reciproca sunt latera, A quidem ad G, sicut B ad D, ea sunt æqualia, per 14 huius. Rursus ad secundam partem, & si supponamus sub extremis A & D contẽtum, æquum esse ei quod sub mediis B G continetur: Dico ipsas quatuor A ad G esse vt B ad D. Cùm æqualia sint rectãgula A D & B G latera habebunt reciproca, erit igitur A ad G vt B ad D (per eandem 14 huius). Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales, &c.

Propositio decimaseptima

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehensum rectangulum, ęquum est ei quod à media quadrato, etsi quod sub extremis comprehensum rectangulum ęquum fuerit ei quod à media quadrato ipsę tres rectę lineę proportionales erunt.

Propo-

Proponantur tres rectæ lineæ proportionales A B D *scilicet* A *ad* B, *sicut* B *ad* D, *ex* A *&* D *vero fiat rectangulum* A D, *& ex* B *quadratum* B C *fiat. Dico æquum esse rectangulum* A D *quadrato* B C, *cùm enim sint æquales* B *&* C, *erit sicut* A *ad* B, *sic* C *ad* D *quatuor igitur sunt rectæ proportionales* A B C D *sub extremis itaque earum* A *&* D *rectangulum, æquum est (per præcedentem) rectangulo sub medijs* B C *comprehenso, quod quidem est quadratum ipsius* B *mediæ. Æquum est igitur rectangulum* A D *quadrato* B C*. si verò è contra rectangulum æquum fuerit quadrato* B C, *ipsæ* A B C D *(per præcedentem) erunt proportionales. sed cùm* B *&* C *sint æquales, erit sicut* A *ad* B, *sic* B *ad* D. *Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, quod, &c.*



Corollarium.

Hinc assequimur, quamlibet rectam esse mediam proportionalem, inter quasuis duas rectas, æquale su[b] ipsius quadrato rectangulum constituentes.

Propositio decimaoctaua. *Problema 6.*

A data recta linea, dato rectilineo simile, similitérque positum rectilineum describere.



Esto data recta A B, *à qua describendum sit rectilineum simile similiterq́; positum ipsi* C D F E, *subtendat angulum* C *recta* D F, *& sic quotcunque angulos rectilinei subtendamus, ipsum in triangula resoluentes, scilicet* C D F, D F E*. Ad signum* A *& datam rectam* A B, *æqualis constituatur angulus ipsi* D C F, *sitque* B A G, *per 23 primi, & ipsi* C D F *æquus fiat* A B G, *reliquus* A G B *reliquo* C F D *(per corollarium 32 primi) æquus erit. Æquiangulum itaque est triangulum* A B G *triangulo* C D F *simile igitur similitérque erit positum, sicutque* F D *ad* G B, *sic erit* C D *ad* A B, *per 4 huius. Ad rectam autem* B G *similiter describatur triangulum* B G I *ipsi* D F E, *quia verò æquales sunt bini anguli* A B G G B I *binis* C D F F D E, *totus* C D E *toti* A B I *equus erit, similiter* A G I *ipsi* C F E, *necnon* E *ipsi* I. *Erit itaque* F D *ad* G B, *sicut* D E *ad* B I. *Sed fuit* F D *ad* G B *sicut* C D *ad* A B, *erit itaque* C D *ad* A B, *vt* D E *ad* B I, *circum æquales angulos, similiter ostendetur* C F *ad* A G, *vt* C D *ad* A B, *&* F E *ad* G I. *Totum itaque* A B G I *rectilineum toti* C D, F E *rectilineo simile similitérque positum est, & circum æquales angulos latera proportionalia habet. A data itaque recta linea dato rectilineo, &c.*

Propositio decimanona.

Similia triangula, adinuicem in dupla sunt ratione laterum similis rationis.

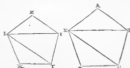


Sint bina triãgula A B G *maius &* D E Z *minus similia, angulos* A G B *angulis* D Z E *æquos habentia. Dico triangulum ad triangulum duplam habere rationem, quam latus ad latus, scilicet* B G *ad* E Z. *Quoniam enim triangula sunt æquiangula, per 1 diffinit. huius, proportionaliter erit* A B *ad* D E *sicut* B G *ad* E Z *per 4 huius. Sit autem vt* B G *ad* Z E *sic (per 11 huius)* Z E *ad* B I. *Tres itaque proportionales erunt, quarum prima* B G *ad tertiam* B I *duplam habet rationem, quam ad secundam* E Z *per 10 diffinitionem quinti. Quia verò* A B *ad* D E *supponitur vt* B G *ad* E Z, *& vt* E Z *ad* B I. *Erit* A B *ad* D E *vt* E Z *ad* B I *reciprocè, per 2 diffinitionem huius. Quare (per secundam partem 15 huius) æqualia erunt* A B I *&* D E Z *triangula, cùm anguli* E *&* B *sint æquales. Est autem* B G *ad* B I *basim, vt triangulum* A B G *ad* A B I *per primam huius. Est igitur* B G *ad* B I *vt* A B G *ad triangulum* D E Z, *aquum ipsi* A B I. *Sed* B G *ad* B I *duplam ostensa est habere rationem, quam latus* B G *ad latus* E Z. *Triãgulum igitur* A B G *ad trian-*

gulum D L Z, duplam habet rationem quam latus B G ad latus E Z, & proinde quam similis rationis reliqua latera. Eadem est enim ratio (per 1 diffinitionem huius) laterum. Similia itaque triangula adinuicem in dupla sunt ratione, &c.

Propositio vigesima.

Similia poligona in similia triangula diuiduntur, æqualia numero, & proportionalia totis: Poligonum autem ad poligonum, duplam habet rationem, quam similis rationis latus, ad similis rationis latus.



Sint similia poligona A B G D E & Z I T K L. Dico ea diuidi in similia triangula & æqualia numero. Et singula ad singula, esse vt totum ad totum poligonum. Poligona verò adinuicem habere duplam rationem laterum similis rationis, scilicet quam A B ad Z I, vel aliud ad aliud similis rationis latus. Cùm (per hypothesim seu figurarum similitudinem) æqualis sit B A E angulus I Z L angulo. Et circum æquales angulos proportionalia latera, scilicet B A ad A E sicut I Z ad Z L. Coniunctis B E & L I rectis, æquiangula erunt, per 6 huius, triangula A E B & Z L I, & angulus A B E angulo Z I L æquus erit. Sed cùm per constructionem totus A B G toti Z I T angulo sit æquus, & ablatus A B E ablato Z I L, reliquus E B G reliquo L I T æquus erit, per decimamnonam quinti. iunctis autem E G & L T rectis, quoniam est vt E B ad A B sic L I ad Z I circa æquales angulos. Et sicut A B ad B G sic Z I ad I T, æqua ratione (per 22 quinti) erit vt E B ad B G sic L I ad I T. Atqui cùm E B G angulus L I T angulo, ostensus sit æqualis, æquiangula & proinde similia erunt E B G & L I T triangula, per 6 huius. Quoniam enim æqualis est angulus, B G D angulo I T K & E G B ipsi L T I. Reliquus E G D reliquo L T K æquus erit. Et eodem argumento patebit angulos D E G & K L T æquos esse, & proinde (per hypothesim & sextam huius) triangulum E G D triangulo L T K æquum esse. Poligona igitur in similia triangula, & numero æqualia diuisa sunt. Cæterùm, quia singula triangula singulis sunt similia, erit vt A B ad B E sic Z I ad I L. Permutatim verò (per 16 quinti) vt A B ad Z I sic E B ad L I. Sit autem E B commune latus triangulorum A E B B E G. Similis verò rationis sit latus L I, commune triangulorum Z L I I L T. Duplam habent igitur rationum (per præfatam) singula triangula A E B ad Z L I, & E B G ad L I T adinuicem, quam habent similis rationis latera E B ad L I. Eandem itaque adinuicem (per sextam communem sententiam) habebunt. Idem ostendetur de triangulis E G D & L T K eandem habere quam E B G ad L I T, scilicet duplam communium E G ad L T laterum. Sed sicut A B ad Z I sic fuit E B ad L I. Duplam igitur habebunt singula triangula ad similia rationem quam A B ad Z I. Totum igitur poligonum A B G D E ad totum Z I T K L, eandem habens rationem (per 12 quinti) quam triangula similia, duplam habet rationem quam A B ad Z I similis rationis latera. Similia itaque poligona in similia triangula diuiduntur, & æqualia numero, & proport. &c.

Corollarium primum.

Hinc assumitur, omnes rectilineas figuras similes, duplam habere laterum similis rationis rationem. *Omnes enim figuræ rectilineæ similes in similia resoluuntur triangula, pérque id demonstratum est.*

Corollarium secundum.

Tribus datis lineis rectis proportionalibus, erit sicut prima ad tertiam, sic quod à prima rectilineum, ad illud quod ex secunda simile, similitérque descriptum rectilineum. *Nempe in dupla ratione primæ ad secundam.*

MONITVM.

Superest huic theoremati obiectum imminens discutiendum. Ait namque secunda pars similia poligona duplam habere laterum rationem. Quid tum cùm æqualia & similia fuerint poligona? quánam arte duplam habebunt laterum rationem, iuxta huius sententiam? Quinimò potius eandem habere non duplam comperimus.

Ad

Ad hec, rationis duplæ aut cuiusuis multiplicis ortum, a suipsius per se ducta quantitate, propalant decima quinti necnon quinta huius diffinitiones atqui æqualitatis ratio, vnitate denominata suipsius quantitatem, hoc est, vnitatem vnitate multiplicans in seipsam denuò incidit, eò quòd nulli sit alterationi obnoxia. Qua de causa vnitatis duplam triplam aliámque multiplicem per se productam, ab vnitate nusquam recessuram arbitremur. In rationibus nimirū duplæ triplæ aut aliæ quæuis multiplices simplicis in se ductu gignuntur, non per quantitatum additionem siue vnitatum repetitionem vt apud arithmeticos, quod latius his diffinitionibus expreßimus. Idcirco rationē æqualitatis ab vnitate denominauimus, quod ea vnicum sit interstitium, inter inæqualitatum excessus incremento genitos, aut defectus decremento prolatos. Excessus quidem integris numeris vnitatem in incrementum iterantibus, defectus vero fractis eandem in decrementum repetentibus, æqualitatem autem vnitate, nulli alterationi subdita, incremento scilicet aut decremento iamdudum exposuimus quare æqualitatis rationem suipsius multiplicem veluti vnitatem dicere non verebimur.

Propositio vigesimaprima.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & adinuicem sunt similia.

Sint eidem rectilineo C similia rectilinea A & B: Dico ipsa A B esse similia. Cùm enim A & B sint ipsi C similia, æquales ipsi C habent angulos, per primam diffinitionem huius ergo & adinuicem (per primam communem sententiam) æquales: quia verò circumæquales angulos ipsi C habent latera proportionalia, hoc est, eiusdem rationis, per primam diffinitionem, & adinuicem circumæquales angulos latera habebunt eiusdem rationis, per vndecimam quinti. Quæ itaque eidem rectilineo sunt similia, & adinuicem (per primam diffinitionem huius) erunt similia.

Propositio vigesimasecunda.

Si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, quę ab eis rectilinea similia, similitérque descripta, proportionalia erunt. Et si quæ ab eis rectilinea similia, similitérque descripta proportionalia fuerint, ipsę quoque rectę lineæ proportionales erunt.

Exponantur quatuor rectæ lineæ proportionales, A B ad G D vt E Z ad I T Dico rectilinea ex A B & G D similia, eam adinuicem seruare rationem, quam rectilinea similia similitérque descripta, ex E Z & I T ad se seruant: Datis A B G D tertiam X, ipsis verò E Z I T tertiam O proportionalem (per vndecimam huius) inueniamus. Erit igitur sicut prima A B ad tertiam X, sic A B L, à prima descriptum, ad G D K à secunda descriptum simile rectilineum, per secundum corollarium vigesimæ huius, & per idem corollarium E Z ad O sicut E Z M rectilineum ad I T N: sed cum sit A B ad G D vt E Z ad I T, & G D ad X vt I T ad O, erit æqua ratione (per vigesimāsecundam quinti) vt A B ad X sic E Z ad O. Sicut itaque A B L ad G D K sic E Z M ad I T N, per vndecimam quinti, quæ ab eis itaque rectilinea similia proportionalia erunt. Sed iam ad secūdum, sunto quæ ex A B & G D similia (A B L & G D K) in ea ratione qua ex E Z & I T similia, E Z M & I T N: Dico ipsas A B ad G D esse vt E Z ad I T, cum enim ea rectilinea sint in eadem ratione, per hypothesim, & rationem habeant laterum A B ad G D, & E Z ad I T duplam, per corollariū vigesimæ huius, ipsa laterum ratio (per septimam communem sententiam) eadem erit, scilicet A B ad G D vt E Z ad I T. Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.

MONITVM.

Subnectit Theon huic theoremati lemma secundæ parti huius obaudiens, cui obiicit ostendendam esse æqualitatem laterum, cum rectilinea sunt æqua & similia quod ab huius theorematis sententia secernitur, quæ tantum similes rationes non laterum excessus, æqualitates aut defectus exoptat, illæ vtique similes sub generali proportio, alium demonstratione satis superque fouentur. Non enim æqua & similia esse possunt absque æqualium rectarum descriptione. Id equidem lemma non inconsulto prætermisimus, tanquam minimè necessarium. Sed potiori obiecto occurrentes, prælibatæ vigesimæ monitum impendimus quo periculum ex æquis similibus emergens erumpamus.

Propositio Vigesimatertia.

AEquiangula parallelogramma, rationem adinuicem habent, compositam ex lateribus.

Quia demonstrauimus decima diffinitione quinti, & quinta huius extremorum rationes ex mediorum rationibus constare, Proponamus bina parallelogramma æquiangula, quorum singuli æquales anguli in G *concurrant, sintq́;* A B G D *&* G E Z I, *sit autem in rectum* B G I *recta reliqua* E G D *(per conuersam 15 primi) in rectum erit, & perficiatur parallelogrammum* G T: *Dico rationem* A G *ad* G Z *parallelogrammorum, componi ex rationibus laterum* B G *ad* G I *&* D G *ad* G E, *quoniam tres sunt magnitudines* A G G Z *& earum media* G T, *ratio extremarum* A G *ad* G Z *constat ex rationibus medius, per quintam diffinitionem huius, scilicet* A G *ad* G T *&* G T *ad* G Z, *sed ratio* A G *ad* G T *eadem est rationi* B G *ad* G I *laterum, per primam huius, ipsius verò* G T *ad* G Z *ratio, eadem est rationi alterius lateris,* D G *ad reliquum* G E, *per eandem. Constat igitur ratio* A G *ad* G Z *parallelogrammorum, ex rationibus laterum* B G *ad* G I *&* D G *ad* G E. *Aequiangula igitur parallelogramma rationem, &c.*

Propositio Vigesimaquarta.

Omnis parallelogrammi quę circa dimetientem sunt parallelogramma, communem ei angulum habentia, similia sunt toti, & adinuicem.

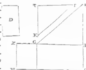
Sit parallelogrammum A B G D *cuius dimetiēs esto* A G, *circa quam existant parallelogramma* E K *&* T I *communes ei angulos habentia ad* A *&* G: *Dico ea scilicet* E K, T I *similia esse toti* D B, *& adinuicem, quoniam parallelogrāma sunt* B D, E K *&* T I, *in parallelas* A E B, K Z T *&* D I G *sine* A K D, E Z I, K T G *cadens* A Z G *recta. Angulos* E A Z *ipsi* K Z A, E Z A *ipsi* K A Z, T Z G *ipsi* Z G I, T G Z *ipsi* I Z G, B A G *ipsi* A G D, *ac* B G A *ipsi* D A G *æquos (ex 29 primi) efficit: reliquos itaque* B *ipsi* D, E *ipsi* K, *&* T *ipsi* I *(per 1 coroll. 32 primi) æquales, haud secus faciet. AEquiangula igitur & ideo similia sunt triangula* A B G *ipsi* G D A, A E Z *ipsi* Z K A, *&* Z T G *ipsi* G I Z, *sicut ideo* A B *ad* B G *sic* A E *ad* E Z, *ac* Z T *ad* T G, *sub iis itaque rectis comprehensa parallelogramma* A B G D, E K T I *similia sunt, ex prima diffinitione huius. Omnis itaque parallelogrammi quæ circa dimetientem sunt, &c.*

MONITVM.

Ampliori fastu hanc per 2 huius, & per 16 & 18 quinti, demonstrare potuissemus sed facilitati consulentes, compendium prolixitati prætulimus. Insuper contulimus illud (communem ei angulū habentia) tāquam necessarium conclusioni generandæ. nam absque communi angulo deperit eorum necessaria similitudo, vt proxima 26 patebit.

Propositio vigesimaquinta. *Problema 7.*

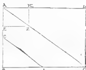
Dato rectilineo simile, & alij dato æquale, idem constituere.



Esto datum rectilineum A B G, *cui oporteat simile constituere, & ipsi* D *dato æquale. Ad datam rectam* B G *dato* A B G, *æquale constituatur rectangulum* B G E L, *per 45 primi, producta verò* B G *in* Z *ad rectam* G E *angulúmque* Z G E *ipsi* D, *æquum rectangulum fit* G E Z M. *Rectis porrò* B G G Z *media proportionalis inueniatur* I T, *per 13 huius, à recta* I T *dato* A B G *simile describatur rectilineum* K I T, *per 18 huius. Dico* K I T *simile dato* A B G, *æquúmque esse dato* D, *cùm sint tres proportionales* B G, I T, G Z *rectæ, erit* B G *ad* G Z *tertiam, dupla ratio quam eiusdem* B G *ad secundam* I T, *per 10 diffinitionem quinti. Sicut* B G *ad* G Z, *sic per primam huius rectangula* B E *ad* G M. *Ipsa igitur* B E *&* G M *duplam habent rationem quam* B G *ad* I T, *sed duplam quam* B G *ad* I T *habent,* A B G *&* K I T, *per 20 huius. sicut igitur* B E *ad* G M, *sic* A B G *ad* K I T, *vicissim igitur erit* B E *ad* A B G *vt* G M *ad* K I T, *per 16 quinti. Aequale est autem* B E *ipsi* A B G, *æquale igitur erit (per 14 quinti)* G M *ipsi* K I T: *eidem verò* G M *æquum fuit* D *datum, ipsi itaque* D *dato æquum erit* K I T, *simile autem descriptũ ipsi* A B G *dato. Dato igitur rectilineo simile, & alij dato æquale idem constituimus.*

Propositio vigesimasexta.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem angulum habens ei, circum eundem demetientem est toti.



A parallelogrammo A B G D *parallelogrammum auferatur* A E Z K, *simile & similiter positum toti* A B G D, *& insuper communem habens angulum* A, *cum toto: Dico vtriusque dimetientem* A Z *&* A Z G *eandem esse rectam, sectis bifariam* A B *&* B G *lateribus in* C *&* F, *iuncta* C F *parallela erit rectæ* A G, *per corollarium secundum 39 primi, quare anguli* B A G *&* B C F *æquales erunt per 29 primi, atqui angulo* B A G *æquus est* E A Z *angulus, ex parallelogrammorum posita similitudine. Idem itaque* E A Z *angulus angulo* B C F *æqualis erit, exterior interiori opposito, parallela igitur erunt* A Z *&* C F, *per 28 primi, sed* A Z *&* A G *eidem* C F *parallela concurrunt in* A, *ipsæ itaque in rectum sunt positæ, per 30 primi. Parallelogramma ideo* A B G D *&* A E Z B *circa eandem sunt dimetientem. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, &c.*

MONITVM.

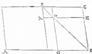
Demonstrationem huius mutauimus, eò quòd plures ab impoßibili eam demonstrant negatiuam destruentes. Nos autem affirmatiuam probatam plus congruere rati, hanc breui admodum argumẽto conclusimus, vt insuper ad parallelogramma externa similia similiter posita, ac ad idem A *signum angulos habentia, extẽdatur. Semper enim figurarum similitudo, & similis positio efficit angulos* A Z B *&* A G B *æquales, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde ad rectam* E Z *cadentes rectas* A Z, Z G, *per 14 primi vnicam efficere rectam.*

Propositio vigesimaseptima.

Omnium parallelogrammorũ ad eandem rectam lineam applicatorum deficientiúmque specie parallelogrammis similibus similitérque positis, ei quod à dimidia descriptum est, maximum id est, quod ad dimidiam applicatum parallelogrammum, simile existens ei quo deficit.

... etur A B recta bifariam in G, ad dimidiam autem G B a-... applicetur parallelogrammum G E, cuius dimetiens sit ... parallelogrammum quo deficere debet aliud ap-... est simile ipsi G E (quod a dimidia) & similiter posi-... ipsum erit circa eundem dimetientem D B, per præcedentē. Nam eorum communis angulus est B, quare vt applicatum ad rectam A Z, deficiat à recta A B simili ipsi G E, a signo A, vsque ad dimetientem id describi necesse est. Sit igitur applicatum A I, id verò quo deficit ad complementum rectæ A B, sit I B simile existēs ipsi G E, quod scilicet ad dimidiam. Dico omnium parallelogrammorum ad ipsam A B sic applicatorum inter A & rectam D B, maximum esse id quod applicatur ad dimidiam, scilicet A D vel G E sibi æquale. Si enim applicatum tangat rectā D B inter D & B, sit A I. Dico A D maius esse ipso A I. Cùm I E & I G supplementa sint æqualia, per 43 primi, F D verò & D C (per 36 primi) sunt similiter æqualia. Est autem F D maius ipso I E cum sit æquum ipsi D C, maius igitur erit F D ipso I G. Commune addatur F G, maius itaque erit A D ipso A I. Sed ipsi A D æquū est G E per 36 primi, igitur G E maius est ipso A I, parallelogrammo quidem D I. Si vero A I tangat D B extrinsecus, sit vt in sequenti figura. Dico GE maius esse ipso A I. Cùm enim æqualia sint F G G C, per 36 primi, & æqualia sunt D C N G (per 43 primi) supplemēta. Ab æqualibus itaque F G G C æqualia auferantur N G D C. Reliquum scilicet A I cum quadrangulo I D, simul sumptum, æquum erit reliquo G E quod ad dimidiam G B applicatum est. Eodem igitur quadrangulo I D maius erit G E ipso A I. Omnium itaque parallelogrammorum, ad eandem, &c.





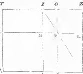
MONITVM.

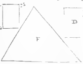
Voces propositionis (græcum imitantes) variauimus, vt protectum ad lineam applicatum intelligatur, sumptum verò, quo in fine vitetur, id quod deficit protectum, censendum est.

Propositio vigesimaoctaua. Problema 8.

Ad datam rectam lineam parallelogrammum applicare, deficiens specie parallelogrammo simili dato, æquale autem rectilineo, non maiori eo quod ad dimidiam sic applicatur, vt id cui expedit simile deficere.

Recta linea A B bifariam secetur in E, Oportet tam ipsi A B applicare parallelogrammum deficiens specie parallelogrammo simili ipsi D dato. Æquale autem rectilineo F, quod quidem non est maius eo parallelogrammo quod super dimidiam A E sic applicatur, vt ipsum D, simile similiterque positum. Ad rectam igitur E B ipsi D simile applicetur E B Z I, per 18 huius, & perficiatur T B. Quoniam autem F (cui æquale expedit applicare) non est maius eo quod ad dimidiam A E applicatur, scilicet ipso A I. Si fuerit ei æquale, consequimur optatum. Nam ad rectam A E applicatum est A I, deficiens specie ipso E Z simili dato D, æquale autem est A I dato F rectilineo, non maiori (sed ex hypothesi æquali) eo quod ad dimidiam A E sic quidem applicatur, vt D, cui expedit simile E Z deficere. Si verò F cui æquum applicandum est, sit minus ipso A I, cui æquum est E Z. Sit minus aliquo rectilineo, et porrò rectilineo æquum, simile verò ipsi E Z (per 25 huius) describatur G L M, recta autem L M æqualis sit I O ipsi verò L G æquetur I N, & perficiatur parallelogrammum I P. Quod quidem est æquum ipsi G M, simile verò ipsi E Z tota similiterque positum. Quare circum eundem dimetientem est toti E Z, per 26 huius, coniungatur recta I P B dimetiens, ipsis E Z N O communis, producatur





tur O P quidem in S, & N P in C & R latera parallelogrammi T B. Dico A P esse applicatum ad rectam A B, deficiens specie ipso S R simili ipsi D, æquum autem ipsum A P dato F rectilineo. Cum autem E Z excedat (per hypothesim) rectilineum F ipso G M, hoc est ipso N O. AEquum erit F gnomoni N S S Z. Quia vero A N N B sunt (per 36 primi) æqualia. Si eis æqualibus æqualia N S & P Z (per 43 primi) addas, totum A P, gnomoni N S S Z æquum erit, per 2 commun. sententiam. Et proinde ipsi F, eidem gnomoni æquo ostenso. AEquum igitur erit A P ipsi F. Quoniam autem à parallelogrammo E Z parallelogrammum S R aufertur, circum eundem dimetientem. Simile erit S R ipsi E Z, per 24 huius. Et proinde ipsi D eidem E Z simili positóque similiter. Ad datam igitur rectam A B parallelogrammum A P applicauimus, deficiens specie ipso S R simili dato D. AEquale autem (ipsum A P) dato F rectilineo, non maiori eo (scilicet A I) quod ad dimidiam A E sic applicatur, ut id (scilicet D) cui expedit simile deficere S R.

Corollarium.

Colligemus, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens specie quadrata, ipsum applicatum æquum erit, ei quod sub segmentis per applicationem factis propositæ rectæ cõtinetur. *Nam reliquum lineæ segmentum æquum est, reliquo parallelogrammi applicati lateri. Cùm sint latera eiusdem quadrati, ut A G constat ex A D, D B, vel D G.*

MONITVM.

Diximus parallelogrammum applicandum non maius optari, eò quòd ad dimidiam sic applicatur, ut id cui expedit simile deficere, ut Campani & Theonis dicta clarius resonemus, atque ad dimidiam applicatum E Z, similiter applicandum fuisse, ut id D cui expedit simile deficere scilicet S R, similiter ipsi D positum intelligentes, ne possit defectus S R transponi, manẽte F maiore applicato E Z, ipsum vero F eodem E Z non maius, nam si tantùm simile non autem similiter positum proponeremus. Quandoque ob situum differentiam, non superesset locus inter A & dimetientem I B, ad applicandum ipsi F æquum, specie deficiens simile ipsi D dato, quod minimè intelligentes quidam dixerunt hanc in errorem posse inducere, etiam bene exercitatos, licet nihil admirandæ difficultatis extet geometriæ rudimenta intelligentibus. Insuper, liberiora sunt problemata theorematis, necessariam hypothesim sequentibus.

Propositio vigesimanona. Problema 9.

Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale, parallelogrammum comparare, excedens specie parallelogrammo simili dato.

Esto data recta A B quæ bifariam in E secetur, datum verò rectilineum cui æquale comparandum est, sit G: cui verò simili excedet sit D. Ad rectam E B simile (per 18 huius) ipsi D ponatur E B Z L. binis autem E L & G æquale, ipsi verò D vel E L simile, ad angulum Z ponatur (per 25 huius) Z M O N, & ducta L B in in P, ac E B in C, dimetiẽtique Z B O perficiatur N A parallelogrammum, quoniam æquale est totum M N binis E L & G, communi ablato E L, reliquum G reliquo gnomoni E P M æquum erit. sed quia (per 43 primi) M B ipsi B N supplemẽto, & (per primam huius) B N ipsi A N sunt æqualia, erit B M ipsi A N æquale, & proinde totum A O gnomoni E P M æquum erit. Atqui eidem gnomoni æquale ostensum est rectilineum G, æquum igitur erit A O eidem G rectilineo. cum autem similia sint E L & N M parallelogramma, circa eandem erunt dimetientem, per 26 huius, reliquum igitur P C quod circa eandem dimetientem est toti N M, eidem simile erit, per 24 huius, & proinde ipsis E L vel D simile erit P C. Ad datam itaque rectam A B, dato rectilineo G, æquale parallelogrammum comparauimus A O, excedens specie rectam A B parallelogrammo P C simili dato D.

Propositio trigesima. *Problema* 10.

Datam rectam lineam terminatam, extrema & media ratione secare.

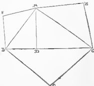
Seccetur recta linea A B *(per* 11 *secundi) in* C, *erit quod sub* A B B C *aequum ei quod ex* A C. *Tres igitur* A B A C *&* B C *sunt (per secundam partem* 17 *huius) sicut tota* A B *ad maius segmentum* A C, *sic maius* A C *ad minus* B C. *Recta itaque* A B *extrema & media ratione secta est in* C, *per* 3 *diffinitionem huius.*



Poterat haec admiranda sectio prolixius demonstrari, applicato ad rectam A B *excedente quadrata specie, quadrato suspsium aequali, per* 29 *huius. supererit in quadrato ex* A B *rectangulum sub tota* A B *& minori segmento* C B, *aequum quadrato excedenti, scilicet ei quod ex maiori segmento* A C, *quorum latera reciprocè (per* 14 *huius) totam ad maius, vt maius ad minus segmentum proportionales efficiunt. Hanc sic ostenderunt plurimi.*

Propositio trigesimaprima.

In triangulis rectangulis quę à rectum angulum subtendēte latere species, ęqualis est eis quæ à rectum angulum comprehendentibus lateribus speciebus similibus similitérque descriptis.



Esto triangulum rectangulum A B G, *cuius angulus sit rectus: Dico quę eius polygona similia similitérque descripta, à lateribus* A B, A G, *rectum continentibus angulum, aequalia esse ei, quod simile similitérque describetur, à latere* B G *rectum angulum subtendente. Demittatur ab angulo* A *recto in basim perpendicularis* A D, *quoniam (per* 8 *huius) similia sunt triangula* A B G, A D G *&* A D B, *erit* B G *ad* B A *vt* B A *ad* B D. *Quod igitur à prima* B G *similiter descriptum, ad id quod a secunda* B A, *erit (per coroll.* 20 *huius) sicut prima* B G *ad tertiam* B D, *simili argumēto quod ex eadem* B G, *erit* A D *quod ex* G A, *sicut* B G *ad* G D. *Nam* G A *est media inter* B G G D, *per coroll.* 8 *huius. Conuertendo igitur (per coroll.* 4 *quinti) erit quod ex* B A *ad quod ex* B G, *sicut* B D *ad* B G, *& sicut insuper quod ex* A G *ad quod ex* B G, *sic* G D *ad* B G. *Sex igitur sunt magnitudines, quod ex* B A *prima, ex* B G *secunda,* B D *tertia,* B G *quarta, quod ex* A G *quinta, &* G D *sexta: composita itaque prima & quinta scilicet quae ex* A B *&* A G, *ad secundam ex* B G, *erunt vt tertia & sexta* B D G D *recta, ad quartam* B G, *per* 24 *quinti, sed* B D G D *sunt ipsi* B G *aequales, cùm sint partes totius, quae igitur ex* A B *&* A G *ei quod ex* B G *species similiter descripta, aequales erunt species. In triangulis itaque rectangulis, quae à rectum angulum, &c.*

Aliter.

Vt autem noscamus hanc originem à 47 *primi duxisse, per eam hanc demonstrabimus compēdio. Cùm enim ex* A B A G *quadrata, ei quod ex* B G *quadrato, sint aequalia, per* 47 *primi. Sed ab ipsis rectis similes descriptae species, quadratorum habent rationem, per* 20 *sexti: nempe duplam similis rationis laterum. Ergo ab ipsis* A B A G *similes species ei, quae ex* B G *simili aequales sunt species, per* 11 *quinti.*

Propositio trigesimasecunda.

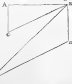
Si inter duo triangula eorum bina latera angulum cōponāt, eáque binis reciproca fuerint & parallela, reliqua triangulorum bina latera, in rectā lineam erunt.



Triãgulorum A B G *&* D G E *bina latera* A G G D *angulum* A G D *componant, Sintque ea latera binis alijs lateribus reciproca & parallela, scilicet ipsis* A B, D G, *sicut quidem* D G *ad* A B, *sic* D E *ad* A G, *parallela vero* A G D E *inuicem, &* G D, A B *adinuicem. Dico reliqua triangulorum* A B G, D E G *latera scilicet* B G, G E *in rectam esse lineam. Cum parallela sint* A B, D G *in eas cadens* A G *angulos* B A G A G D *efficit æquales, per 29 primi. Quia vero parallelæ sunt* A G D E *in eas cadens* D G *angulos* A G D G D E, *similiter æquos efficit, per eandem. Aequales igitur erunt* B A G G D E *adinuicem, eidem namque* A G D, *æquales. Circum autem æquales angulos latera proportionalia* D G *ad* A B, *vt* D E *ad* A G *ostensa sunt. Aequiangula itaque erunt* A B G, D G E *triãgula, per 6 huius, & angulum* D G E, *ipsi* A B G, *æquum habebunt. Quare & totum* A G E *angulum binis* A *&* B *angulis æquum, & proinde binos* A G E *&* A G B *duobus rectis æquales, per 32 primi, cùm sint æquales tribus trianguli* A B G *angulis. quia igitur ad rectam aliquam* A G, *duæ rectæ* B G G E, *duobus rectis æquales efficiunt angulos, ipsæ* B G G E *in rectam lineam erunt per 14 primi. Si igitur duorum triangulorum bina latera, &c.*

MONITVM.

Hoc theorema reperimus velut confusum, cuius licet ponantur à Theone sumptæ hypotheses, non semper sequetur haberi necessariam conclusionem, supponit quidem triangula componi ad vnum angulum, cùm debeat tantùm duo triangulorum latera, inter quæ nullum aliud cadit latus angulum componentia proferre. Bina etenim triangula A B G *&* D B E *(siquidem Theonem insequamur) ad vnum angulum absque angulorum communitate componi non possunt: si verò ad signum concurrere intelligat, nec id subsistet. Duo nanque triangula* A B G D B E *cõponuntur ad vnũ angulum* B, *duo latera* A G G B *duobus* B D D E *proportionalia habentia, vtq; eiusdẽ rationis latera sint parallela, scilicet* A G *ad* B D *&* G B *ad* D E. *Huc vsque seruata hypothesi incorrupta, nihilominus abest conclusio, scilicet reliqua latera* A B B E *esse in rectum posita. Cãpanus autem nulla supponit in hypothesi triangula, & tamen postmodum triangula concludit, super eandem rectam constitui, quæ confusiones eos hanc quodammodo intellexisse fatetur, posteris autem tradidisse minimè.*



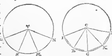
Qua de re, quod Geometriæ plus conducere arbitrati sumus Euclidem sensisse diximus. Duo quippe triangula duobus singulorum lateribus vnicum angulum componere, & insuper ea angulum componentia latera singula, singulis alijs parallela esse, eáque eadem ad sibi parallela latera rationes habere reciprocas. Nam id cogit triangula tandem æquiangula fieri: si etenim angulum constituentia, ad parallelas similes haberent rationes, reliquæ in rectam non caderent lineam. Ea quippe de causa videmus Theonem sua demonstratione tacuisse angulum, ex hypothesi memoratum, scilicet A G D, *cùm eius anguli latera similem non habeãt ad parallela, sed reciprocam rationem. Assumitur autem hoc theorema demonstrandis post vndecimum librum propositis maximè decimoseptimo decimi tertij ac alijs plerisque.*

Propositio trigesimatertia.

In æqualibus circulis anguli, eandem habent rationem ipsis circunferentiis in quibus consistunt, etsi ad centra, etsi ad circunferentias fuerint constituti, tum etiam sectores ad centra constituti.



Sint in æqualibus circulis A B G *&* D E Z *anguli* B A G *&* E D Z *ad circunferentias. Sint autem ad centra* B K G *&* E T Z. *Dico esse vt* B G *arcum ad* E Z *arcum, sic angulum* B K G *ad* E T Z, *sicq;* B A G *ad* E D Z. *Ponantur ipsi* B G *æquales* G I *&* I L. *Ipsi verò* E Z *æquales sint quotuis* Z M M N N O *per 28 tertij, coniunctis* K I K L T M T N T O. *Quoniam æquales sunt arcus, æquales erunt qui eis insistũt anguli, per 26 tertij. Quotuplex itaque est totus* B K L *angulus, ipsius* B K G *anguli, totuplex erit totus* B L *arcus ipsius* B G. *Similiter quotuplex erit* O T E *anguli* E T Z, *totuplex erit* E O *ipsius* E Z *arcus. Quare si* B L *arcus excedat* E O *arcum,* B K L *angulus, excedet* E T O *angulum, si deficiat, deficiet, & si æquetur æquabitur. Quatuor igitur sunt magnitudines, scilicet* B K G *&* E T Z *anguli,* B G *&* E Z *arcus. Quarum primæ & tertiæ æquemultiplicia, scilicet* B K L *angulus, &* B G L *arcus, simul excedunt, æquantur, vel deficiunt à multiplicibus secundæ & quartæ,* E T O *angulo &* E M O *arcu. Eorum igitur simplices* B K G *angulus ad* E T Z *angulum, sunt vt* B G *arcus ad* E Z *arcum, per quintam diffinit. quinti. Quia verò qui ad circunferentias anguli* B A G *&* E D Z *dimidij sunt ipsorum* B K G *&* E T Z, *per 20 tertij, illi eandem ipsis habebunt rationem, per 15 quinti, & ideo eam quam arcus. Dico insuper sectorem* I C B *ad sectorem* E T Z *sic esse, vt arcum* I B *ad arcum* E Z, *ducantur æquales rectæ* I B B G G K K L, *quæ æquales subtendant arcus, per 28 tertij, & æquales angulos ad* C *centrum, per 27 eiusdem. Æqualia igitur erunt triangula* I C B C B G C G K *&* C K L *per 4 primi. Æquales item erunt sectiones* I B B G G K K L *æqualibus rectis subtensæ, cùm sint similes per 24 tertij. Quæ æqualibus additæ triangulis, efficient sectores,* I C B B C G G C K K C L *ex ipsis compositos æquales, per 2 commun. sentent. Similiter & adinuicem æquales erunt reliqui* E T Z Z T M M T N *sectores. Quotuplex igitur erit arcus* L G I *ipsius* I B *arcus, totuplex sector* I C L *sectoris* I C B *erit. Similiter quotuplex* E Z N *arcus ipsius* E Z *arcus, totuplex erit* E T N *sector ipsius* E T Z *sectoris. Quatuor itaque magnitudinum* I B E Z *arcuum, &* I C B E T Z *sectorum sumuntur æquemultiplicia primæ & tertiæ, scilicet* L G I *arcus &* I C L *sector. Secundæ item & quartæ æquemultiplicia,* E Z N *arcus &* E T N *sector. Si igitur multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex tertiæ excedet multiplex quartæ, si deficiat, deficiet, si æquetur, æquabitur. Earum itaque simplices magnitudines* I B *arcus, ad* E Z *arcum erunt vt* I C B *sector ad* E T Z *sectorem, per quintam diffinitionem quinti. In æqualibus itaque circulis, &c.*



MONITVM.

Hoc theorema planè demonstrat quod diximus nos exhibituros duodecima diffinitione primi, & octaua diffinitione tertij, magnitudinem scilicet anguli (quæ sola est linearum inclinationis varietas) vnicum habere mensorem, arcum illi subtensum, æqualibus quidem rectis contentum. Videmus namque angulorum & eos subtendentium arcuum, easdem esse rationes, quæ quantitatum sunt maximè affinitates.

Cæterùm, primi libri quadragesimam septimam & quadragesimam octauam exponentes, à quibus originem duxit 31 huius, multa earum obsequia data opera reliquimus, eò quòd illuc vsque nihil de rationibus seu proportionibus discussum erat, ne id quod eadem facilitas compendio potest edocere, fastuosa potius quàm vtili theorematum numerositate tradamus, eorum, quæ ab eadem 47 primi nata sunt, pauca exponentes.

Propositio trigesimaquarta. *Problema 11.*

Dato rectilineo bina æqualia rectilinea similia similitérque descripta, datam rationem habentia, exhibere.

Esto

Esto datum rectilineum A B H, data verò ratio sit rectarum G C C D. Secetur A B similiter ipsi G D in E, per 10 huius, Super A B autem fiat semicirculus A F B. A signo vero E rectæ A B perpendicularis excitetur E F. Coniunctis A F F B, ex singulis earum similia similitérque describantur rectilinea ipsi A H B, sintque A K F & F I B per 18 huius. Dico rectilinea A K F & F I B rationem habere datam quam G C ad C D, æqualia autem esse, E I quod ex A B simili similitérque descripto. Quoniam semicirculus est A F B rectus erit A F B angulus, per 31 tertij, perpendicularis autem est F E. Triangula igitur A F E F B E, similia sunt toti A F B & adinuicem, per 8 huius. Sicut igitur A F ad F B sic A E ad E F, & E F ad E B circum æquales angulos, per 4 huius. Sicut igitur quod ex A F ad quod ex F B sic quod ex A E ad id quod fit ex E F simile, per 22 huius. Sed sicut quod ex A E prima ad ex E F secunda, sic prima A E ad tertiam E B per 2 coroll. 20 huius. Quod itaque ex A F ad id quod ex F B, sic A E ad E B. Sed sic fuit ratio data G C ad C D. Sicut itaque G C ad C D sic quod ex A F ad simile ex F B similitérque descriptum. Quæ autem ex A F & ex F B æqualia sunt similiter descripto ex A B, per 31 huius. Dato itaque rectilineo bina æqualia rectilinea, &c.



Corollarium primum.

Datum rectilineum in bina rectilinea similia ex rectis rationem datam habentibus resoluere. *Nam si in ratione proposita dentur tres rectæ & secetur A B in ratione primæ ad tertiam proportionalem, quæ ex A F F B (rationem sectionum A E ad E B habentia) duplam habebunt quam A F ad F B rationem, per primum coroll. 20 huius. Rectæ igitur A F & F B dimidiam eorum rationem habentes, erunt sicut trium prima fuit ad secundam, nam prima ad tertiam (A E ad E B) duplam habet quam ad secundam ex decima diffinitione quinti.*

Corollarium secundum.

Hinc assequimur, A dato rectilineo ordinatam partem auferre, reliquum simile toti relinquentes. *Nam si secetur à recta A B pars ordinata E B, per 9 huius, erit sicut A E ad E B, sic simile ex A F ad quod ex F B, ablato igitur ab eo quod ex A B, eo quòd ex F B, reliquum quod ex A F superest, simile similitérque positum toti quod ex A B data.*

Corollarium tertium.

Bina similia rectilinea in simile ac eisdem æquale rectilineum componere. *Constituantur eorum similia latera ad angulos rectos, vt A F F B, tum quod à subtendente A B simile similitérque positum reliquis (per 18 huius) fiet, æquum erit per 31 huius binis.*

MONITVM.

Cur autem non deduxerit Euclides modum proportionis similium rectilineorum, veluti de lineis dixit decima huius & tribus eam sequentibus. Id equidem absoluit 22 huius. Nam duobus datis rectilineis similibus tertium scrutari proportionale. Item duobus datis medium perquirere. Tribus quoque datis quartum simile similitérque descriptum, & id genus proportionum per linearum proportiones reperiemus. Si binis similis rationis lateribus tertium demus proportionale, per 11 huius. Ex eo rectilineum descriptum tertium erit proportionale, per 22 huius. Siquidem binis lateribus medium proportionale (per 13 huius) detur latus. Ex eo descriptum, medium proportionale rectilineũ similiter erit. Haud secus si tribus datis quartũ latus, per 12 huius, detur proportionale, ex ipso descriptum rectilineum simile, quartum erit proportionale. Nam si rectæ lineæ sint proportionales, ex eis descripta similia (per 22 huius) proportionalia erunt. Licet tamen ea vigesimasecunda quatuor proponat rectas. Idem sentiendum est de tribus, nempe cum bis repetetur media, fient quatuor, quod vnum ac idem est hoc loco, horum vltimum reliquit Euclides, scilicet binis datis, bina media continuè proportionalia scrutandum, discentibus simul ac docentibus, vt ludant eorum ingenia in

huiuscemodi problemate disquirendo, quouis vsu mechanico postposito. Quoniam autem pauca proposuit Euclides de ratione reciproca quam diffinientes Campanus & Theon longè à vero sensu traditam reliquerunt, nos discentium exercitio consulentes, aliqua theoremata huius rationis enunciata selegimus.

Propositio trigesimaquinta.

Si binæ rectæ lineæ sese ad obtusum angulum secuerint, à secantium autem limitibus perpendiculares sibi inuicem demittantur, quæ inter limites & perpendiculares, reciprocè proportionales sectæ sunt.



Sint binæ lineæ A B G D *angulum obtusum in sectione* E *efficientes ab ipsarum autem secantium limitibus* A *&* G *sibi inuicem perpendiculares demittantur, scilicet à signo* A *in rectam* G D, *quæ sit* A D, *& à signo* G *in rectam* A B *quæ sit* G B. *Dico rectas* A B G D *inter* A *limitem &* B *perpendicularem, &* G *limitem &* D *perpendicularem, sese secare in* E *reciprocè,* A E *ad* E D, *sicut* G E *ad* E B: *quoniam recti sunt* A D E G B E *anguli, & igitur æquales. Sed* A E D G E B, *qui ad verticem sunt (per decimam quintā primi) æquales. Reliqui igitur* E A D E G B *(per corollar. 32 primi) erunt æquales. Æquiangula itaque erunt* A E D G E B *triangula, quæ circum æquales igitur angulos latera proportionalia, per 4 sexti,* A E *ad* E D *vt* G E *ad* E B. *Si itaque binæ rectæ lineæ sese ad obtusum angulum, &c.*

Propositio trigesimasexta.

Si duę rectę lineę angulum acutum componant, ab earum autem limitibus in seipsas perpendiculares secantes mittantur, ipsæ vt segmenta quę circa angulum sunt, reciprocè erunt proportionales.



Sint binæ rectæ A B G B, *angulum acutum* A B G *componentes: à signis autem* A *&* G *perpendiculares ipsas secātes, mittantur* A C *&* G E *Dico ipsas* A B *ad* G B *vt segmenta* C B *ad* E B, *quæ circa angulum sunt, reciprocè proportionales esse. Quoniam enim recti* A C B, G E B *anguli sunt æquales, communis autem* A B G, *triāgulorū* A B C, G B E, *reliqui* B A C, E G B *æquales erunt, per corollarium 32 primi. Æquiangula igitur sunt* A B C *&* G B E *triangula circum æquales igitur angulos latera proportionalia* A B *ad* B C, *sicut* G B *ad* B E, *per 4 sexti. Vicissim igitur erit* A B *ad* G B, *sicut* C B *ad* E B, *per 16 quinti. Si duæ itaque lineæ rectæ, &c.*

Propositio trigesimaseptima.

Si binæ rectæ in circulo sese secuerint, vnius sectiones ad alterius sectiones reciprocè proportionales existunt.



In circulo A G B *binæ* A B G D *rectæ sese secent in* E: *Dico esse sicut* A E *ad* E D, *sic reciprocè* G E *ad* E B, *quoniam enim (per 35 tertij) quod sub* A E E B, *æquum est et quod sub* G E E D *rectangulum, sed æqualium parallelogrammorum rectangulorum reciprocæ sunt latera circum æquales angulos, per 14 sexti. Erit igitur* A E *ad* E D, *sicut* G E *ad* E B, *& igitur reciprocè, per secundam diffinitionem sexti. Si itaque binæ, &c.*

Propo-

Propositio trigesimaoctaua.

Si à dato signo in circuli circunferentiam cauam binæ rectę lineę in plano ducãtur, ipsę suis partibus extra circulum sumptis reciproce proportionales existunt, & insuper inter totam & exterius segmentum media proportionalis, à signo ducta, circulum tanget.



Proponatur circulus A B D *signum verò* G, *à quo in circunferentiam cauam cadant binæ rectæ* G B, G D, *circulum secantes in* E *&* C, *sitq́ recta* G A *tãgens circulum in* A. *Dico lineas esse adinuicem* G B, *ad* G D *reciprocè, sicut earum partes extra circulum sumptæ* G C *ad* G E. *Quoniam (per corollarium 36 tertij) rectangulum sub* G B G E *comprehensum, est æquum rectangulo sub* G D G C *comprehenso, erit (per 14 sexti) reciprocè, sicut* G B *ad* G D, *sic* G C *ad* G E, *sunt enim latera circum æquales angulos: Dico insuper inter* G B *&* G E, *vel inter* G D *&* G C *mediam esse proportionalem rectam* G A *tangentem. Cùm enim sub* G B G E *comprehensum, æquum sit ei quod à recta* G A *fit quadrato, per 36 tertij. Sequetur inter extremas* G B G E *mediam esse* G A *tangentem, per secundam partem decimæseptimæ sexti, cùm ipsæ* G B, G A, G E, *sint proportionales. Similiter ostendetur* D E *rectis* G D G C *& quibusuis alijs, per easdem. Si igitur a dato singo in circuli, &c.*

Plures aliæ insuper possunt addi hac methodo demonstrationes, sed de his hactenus sufficiat.

PRAEFATIO.

GEometriam liberarum artium amplissimam & præcipuam edocturus Euclides, eius facultatē in vtrasque dilatari quantitates supponit, in eas scilicet quæ rationem siue habitudinem habent numerorum, quas inter se commensurabiles aliquando vocabimus: & insuper in eas quæ inter se nullo numerorum respectu copulantur, quas incommensurabiles dicemus. Magnitudinum autem commensurabilium siue numerorum respectum habentium intelligentiam præstare cupiens, haud sanius quàm per numerorum obsequia id exequi potuit, vt præcinuimus proximis quinto & sexto, partes scilicet geometricas à suis totis confusè detractas per multiplicationem à numeris subfuratam, qua ratione suis totis copulentur lucidius eum exposuisse. Nimirum per eam multiplicationis arithmeticæ legem geometricis quantitatibus adaptatam, alteram geometriæ partem edocturus, eam scilicet quæ operationes habentes numerorum rationem continet, quarum quidem cognitionem, vt latius discentibus erroget, his tribus sequentibus libris, quæ ex arithmeticis elementis, huic operationum generi deseruire opinatus est, exegit principia, vt tandem cognitis inter se numerorum habitudinibus eosdem quantitatum (numerorum affinitatem seruantium) noscamus adesse respectus, qui quidem ob numerorum discretam & intelligentiæ familiarem naturam, non minus quàm ipsi numeri discentibus familiares sese offerent. Et demum prælibata commensurabilium intelligentia, incommensurabilium notitiam (cùm maximè ad eam ventum sit) facilius adaperiat, illud equidem decimo libro hos tres proximè sequenti efficiet. Quæ igitur his septimo, octauo, & nono præponit elementa, non pura arithmetica esse censeamus, sed quandoque geometrica, quandoque verò arithmetica, geometriæ tamen obsequio desponsa, ea namque de causa sumpsit numerorum leges, tantùm suis quantitatibus commensurandis ac designandis necessarias. Non ideo volumus lectorem arbitrari, nos arithmeticam sub geometria confundere, numerus namque tantùm soli quantitati non accommodatur, sed pluribus aliis existentiis, quas geometria minimè complectitur, & idcirco geometriam cōplecti arithmeticam non dicemus, sed ea duntaxat quæ sibi ex arithmeticis vtilia perspexerit angariare, obsequia fatemur. Reliquas verò geometricæ ditioni nulla arte obnoxias arithmeticæ facultates esse constabit, vt autem quam legem incommensurabilibus quadam arte proportionandis imponat numerorum discretio, dicamus, per commensurabilium methodum, ab ea numeri parte ordiemur, quæ sola geometricam sectatur naturam, ob indiuisibilem suæ magnitudinis compactionem. Hácque via futuræ illæ magnitudines geometrica natura continuæ siue ita compactæ, quòd absque arithmeticarum discretionum subuentu confusionem pariant, & discentibus penitus denegent intelligentiam, facilitate quadam percipientur. Tum maximè cum arithmetica exequia numeris discernentibus in continuas quantitates confusas, proferemus, quas licet numeris significemus, non tamen hi significantes numeri vera numerorum denominatione donari possunt, sed hi tantùm qui in numeros quantitates significantes arithmeticas exercent operationes, verè arithmetici nuncupandi sunt. Cùm itaque quantitates numeris significabimus, inter eos numeros omnes numeri partes recipiemus, eò quòd omnis quantitatis pars sit quantitas, si verò operationes seu arithmetices exequia significemus numeris, tum solos numeros discernentes, numerorum appellatione suscipiemus, vnitatem verò ab his excludemus, eò quòd ea sit continua, nullámque significans discretionem, cuius naturam exponentes sic eam diffiniendam esse rati sumus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber septimus.

Diffinitio prima.



Nitas est qua vnumquodque eorum quæ sunt, vnum dicitur.

Quoniam arithmeticorum numerorum obsequium multis alijs præter geometriam conuenire diximus, quæ tractanda suscipimus, ex arithmeticis elementis sumpta in quantitatum denotandarum auxilium imploramus, vnitatem ergo diffiniemus esse eam significationem, qua siue secundum quam omnium existentium vnumquodque, vnum dicitur. Quia tamen quantitati illud accommodamus significatum, vnum illud idem ita continuum, & compactum intelligemus, vt secundum eam vnitatem nulla in eo concipi possit scissura aut sectio, sed vnica quantitas continua geometriæ legibus obnoxia, scilicet quamdiu aliqua quantitas vnitate denominabitur, eam insolutam haberi existimemus. Quod si ea quantitas vnitate significata (non autem ipsa vnitas) per augmenti vel decrementi multiplicationem alteranda sit, non vnitatem, sed quantitatem vnitate significatam alterari concipiemus. Cum itaque vnitas per se diuidi aut multiplicari non possit, substantiam denotat, nec sectam, nec sibi additis partibus compositam constare, sed ita alterandam vt facta illico ipsius solutione, aut per suipsius additionem multiplicatione, vnitatis nomine priuetur, discretæ quantitatis suscepturæ nomenclaturam, qui quidem numerus dicetur, siue per frequentes significatæ substantiæ sumptiones, siue per plures eiusdem integræ substātiæ factas solutiones productus fuerit. Hac igitur de causa videmus vnitatem frangi non posse. Cum enim significata per eam res frangitur, eo ipso vnitatis nomen illa relinquit, statim numeri suscipiēs denominationem, rursusq; eiusdem numeri pars minima vna dicetur. Similiter nec multiplicem esse, vbi namque multiplicis induit speciem, illico numeri non vnitatis nomine denunciatur, vt exemplo A magnitudo vnitate denominata per suipsius frequentem sumptionem multiplicem efficit B, à ternario numero denominatam, non ab vnitate. Similiter eadem A vnitate denominata, per frequentem eius solutionem producente C discretam magnitudinem, videmus C vnitatis priuari nomine, ac statim numeri nomine denūciari (nempe tribus tertiis) qui rursus minimam partem vnum denominat tertium, ab vnitate dictū, haud secus in reliquis. Si itaque vnitas sit magnitudo omnium magnitudinum minima dici poterit, nulla arte secanda, non igitur vnitatis fractiones dicentes vnitatem, sed per eam significatam quantitatem frangi existimemus: In eas quidem partes quarum qualibet dicetur vna. Hinc patet quod diximus secunda quinti diffinitione, tot posse dari numeros quātitatem vnitate significatam secantes, quot & multiplicantes. Qui licet iidem sint numeri, diuersis tamen functuri muneribus, alij quidem quantitatis augmentum, alij verò eiusdem decrementū proferent, oppositis autem operationibus. Idem ferè in rationum denominationibus dicemus, rationem scilicet æqualitatis ab vnitate denominari. Inæqualitatis verò tam maioris quàm minoris rationes per numeros exprimi: quinetiam æqualitatis rationem vnitati plurimum assimilari. Cùm enim duorum terminorum sit vna & eadem quātitas, ea rationis denominatio per vnitatem exprimitur, componendo, secando, siue multiplicando, quemadmodum vnitas per se multiplicata, vel secta, seipsam producit. Similiter & æqualitatis ratio, per sui denominationem ducta, nihil aliud profert: inæqualitatis verò ratio a numeris expressa scilicet maioris inæqualitatis à numeris augmentū exprimētibus. Minoris verò inæqualitatis a numeris decremētum denotantibus, per multiplicationem aliam generat rationem. veluti & numeri per quos exprimuntur, vt vidimus quinta diffinitione sexti. Rationes quidem extremorum ex compositione rationum mediorum procreari, & decima diffinitione quinti, binas æquales rationes duplam, tres triplam, & quatuor quadruplam, &c. earundem componere rationem. In hoc autem conuenit vnitati æqualitatis ratio, quod secta vel multiplicata, æqualitatis relinquit nomen veluti & vnitas. Quæ cùm sit tantum suæ quantitatis denominatrix, vbi secatur quantitas, ab ea recedit (vt diximus) ipsius vnitatis denominatio, adueniente quidem numero sectiones denominante, aut certe repetitiones. Siquidem à maiori numero denominatur ratio, tum plus ea ab æqualitatis recedit ratione, siue in augmentum, siue in decrementū pergat, sicut & numerus quo maior fit, eò plus ab vnitate recedit, licet in augmē-

tum aut decremētum vnitatis significatum dirigat. Vnitatem igitur nusquam secari fitebimur, sed tantum quantitatem vnitate denominatam: & proinde per antiquum illud soluemus obiectum, omnem quantitatem scilicet infinite secari posse. Nam accedente sectione, quantitas vnitatis illico nomen relinquit, non igitur secatur vnitas, sed tantum per vnitatem significata quantitas.

Cæterum vt qua lege vnitatem suscipiat Geometria (numeros recipiens) enarremus Geometriam (vt sæpius diximus) numeros in elucidandarum suarum magnitudinum quantitatem conuocasse credemus quorum quidem numerorum vsum bino respectu suscipit, alterum quo propositarum magnitudinum quantitates discernant. Reliquum verò quo discretas numeris illis significatas ita alterēt impensa in illas operatione, vt inde facta earum quantitatum comparatione, affinitatis elucescat intelligentia. Quare numeros propositam quantitatem sua discretione significātes, geometricos nempe geometricis quantitatibus coniunctos dicemus. Reliquos vero quātitates numeris significatas, arithmeticis legibus alterantes, augmento quolibet aut decremento, arithmeticos dicemus numeros. Quia verò quamlibet minimam quantitatis partem sub quantitatis nomine suscipit Geometria, sequetur vnitatem (numeri partem minimam) sub numeri nomine, geometricos suscipere numeros, eo quòd quantitatem denotet.

Arithmetici vero numeri quantitatem non respicientes, vnitatem inter numeros minimè suscipiunt, cùm ea non sit vnitatum multitudo. Et hac de causa numeros operationes arithmeticas exercentes, in numeros quantitatem significantes, nusquam numerorum nomine vnitatem suscipere concludemus. Binas illas igitur numerorum acceptiones, quarum prior vnitatem sub numeri denominatione suscipit, posterior autem minimè, considerabimus his tribus numerorum libris, paralogismos euitantes, vt autem qui ex diffinitionibus numeri singulis disciplinis vt plurimum adhæreant excutiamus, hoc est, qui geometriæ adhærentes vnitatem suscipiant. Qui vero arithmeticen sectantes eandem respuant, Dicemus vnitatem, totum, partem, planum, solidum, quadratum, cubum, proportionales, similes planos, aut solidos, geometricos iure vocari numeros, cùm aliquid præ se ferāt quantitatis, vel dimensionis quæ quantitati præcipuè conuenit. Numerum verò, & partes, multiplices, pares, impares, primos, minimos, cōpositos, perfectos, mensores, arithmeticos esse puros, cùm non quātitati propriè adhæreant, sed potius arithmeticas operationes in numeros quantitatem significantes exerceant. Quare in theorematū intelligentia hos veluti agentes, illos vero patientes, vt plurimum comperiemus numeros. Quia verò (vt diximus) vnitas numerorum quantitates significantium nomine venit, Illi etenim non numerū ab vnitatum multitudine sumunt, sed potius numerum quantitatem discernentem, & significantem considerant. Arithmetici verò numeri, puram actionem seu operationem in numeros quantitatum discretores explendam exercentes, vnitatem nulla arte recipere possunt. Cùm hi alterationem eorum in quos operantur exquirant, quod vnitatis naturæ summopere obsistit, ea namque æqualitatem solam, nullum verò augmentum vel decremèntum sua actione prouocat, nec proinde alterationem. Quare inter numeros alterantes eam recipi posse non arbitrabimur, sed tantum inter numeros alterandos siue quantitatem significantes, eius proprium haberi situm, cum quantitas cuius alterationi perpetuo sit obnoxia, augmento scilicet ac decremento. Cum autem dixerimus vnitatem esse numeri materiam, illud animaduertamus oportet, vnitatem eius naturam induere, cui confertur numerus, veluti si per numeros lineæ longitudinem exprimere velimus singulas vnitates naturam longitudinis tantùm habere, & latitudine sublimitatéque priuari, iuxta lineæ naturam, cui adaptatus est numerus, quæ quidem latitudine sublimitatéque priuatur. Si verò superficiem numeris metiri velimus, singulas eius vnitates superficiei more longas & latas esse, profundas verò nequaquam. Siquidem solidum numeris metiamur, eorum vnitates tribus mensuris longitudine, latitudine, ac profunditate (solidorum naturam sectantes) ornari habere credemus, vnitates igitur naturam hypothesis sumptæ cui adaptantur numeri, semper sequi debent. Est enim vnitas discretio partis substantiæ per numerum significatæ. Quia itaque in figuris regularibus vnitates numerorū eas metientium, naturam figuræ sequuntur. non mirum ducemus vnitatem quandoque dici numerum planum, numerum quadratum, numerum solidum, hoc est, figuram planam, quadratam, vel solidam significantem, iuxta quasuis hypotheses sumptas numeris coaptatas quantitates significantibus. Quare ea ad numeros rationem plani ad planum, quadrati ad quadratum, cubi ad cubum, solidi ad solidum habere poterit, cùm singulorum species sibi possit assumere. Et ideo inter numeros inter quos non recipitur vnitas (scilicet arithmeticos seu operātes) nec recipiemus rationem multiplicem in minimis numerorum partibus, nēpe ea ad vnitatem minimas eius partes collocat, quam non recipiunt arithmetici seu operantes numeri. Reliquæ vero cunctæ rationes, in numeris minimas earum partes seu terminos constituunt, nusquam ad vnitatem properantes. Si igitur in theorematum discussione proponantur primorum aut minimorum numerorum

obsequia rationes producentia. Multiplices rationes neutiquam inter eos suscipi arbitrabimur, sed si eundem effectum illis per minimas partes conuenire ostensuri sumus, illud particulari demonstratione modico exequemur negotio. Quæ etenim primis ac minimis conueniunt numeris, non omnia vnitati, & numero conuenire putabimus, & è contra. Qui autem sint primi & minimi posthac dicturi sumus, vt quæ præmisimus faciliori percipiantur intelligentia, cognitis terminorum diffinitionibus.

Diffinitio secunda.

Numerus autem est ex vnitatibus composita multitudo.

Huius expositio à priore deducitur. Quemadmodum enim vnitas substantiam quantam, continuam, insectam (vt diximus) denotat, sic numerus discretionem significatæ substātiæ quam per vnitatum repetionem consequutus est. In tot partium multitudines, quot vnitatum repetitionibus idem componetur numerus sectam esse denotabit. Quarum quidem partium singulæ eam quam diximus circa vnitatem naturam seruabunt. Sicut igitur vnitas, vnitam & continuam denotat suapte natura quantitatem, sic numerus discretam & sectam per vnitatum multitudinem referet eandem, siue quantitati, siue operationi (vt diximus) destinatus fuerit.

Diffinitio tertia.

Pars est numerus minor numeri maioris, quando metitur maiorem.

Diffinitio quarta.

Partes autem, quando non metitur.

Cur diffiniens Euclides partem libro quinto partes non diffinierit, id potissimum causa dicemus esse, quod scilicet librô quinto elementa geometrica præcipuè tractans, partem apud geometras tantum recipiat, non autem partes, sub vnius quantitatis denominatione comprehensas, eo quòd nihil in geometria distributum recipiatur. Quia verò arithmetices ducimus principia (cuius verum obiectum est distributio, seu discretio) partem à partibus segregantes dicemus. Partem in numeris eum esse numerum qui a maiori sumptus ipsum precisè sua repetitione componit, & ad numerum eam seruat rationem quam vnitas. Partem verò eum vocamus numerum minorem à minori sumptum, qui sua frequenti repetitione maiorem præcisè non constituit, sed quandoque ab eo deficit vel eundem excedit. Hic namque numerus ad maiorem semper rationem habet quam numeri inter se, non autem eam quam vnitas ad numerum. Exemplum partis, ponemus tria partem esse quartam quidem numeri 12, & 2 quintam ipsius 10. Partes autem vt 4 numeri 10 duas quintas, & 2 ternary duas tertias esse. Has igitur binas diffinitiones descripsit Euclides, vt sequatur potissimam illam rationum quæ inter numeros concidunt diuisionem. Quæ diuisio in rationem numeri ad numerum & vnitatis ad numerum fit, quarum illa generalior hac semper habetur, geometræ vero binas illas rationum acceptiones sub vnicæ partis ad totum ratione complectuntur, & præter has aliam quam partis ad suum totum incommensurabilis frequenter apponunt, quæ ab arithmeticis discretionibus penitus aliena reperitur. Partis igitur ad totum is erit respectus, qui à continua in discretam quantitatem fertur, hoc est, vnitatis continuè ad numerum qui semper discretus est. Partium vero ad totum respectus quilibet is erit, qui minoris numeri ad maiorem concipietur, siue qui inter binas discretas quantitates cadet.

Diffinitio quinta.

Multiplex est numerus maior minore, quem metitur minor.

Quoniam hæc vox multiplex arithmetico tantùm conuenit significato (vt perfectè docuimus secunda diffinitione quinti) geometras dicemus multiplicium obsequium ab arithmeticis sumpsisse. Quippe qui continuas nulla discretione quātitates signare possunt, ab arithmeticis (quorum proprium est discernere) multiplicandi methodum adepti sunt. Quare cùm soli arithmeticæ conueniat multiplicatio, eandem his arithmeticis principiis obseruari dicemus, quam apud geometrica præce-

pta ab arithmeticis sumptã diffinimus quinto libro. Multiplex itaque numerus erit maior quem metitur ita minor, vt proposita multiplicationis specie inter eos seruata, minor sua repetitione maiorem præcisè restituat. Quæ quidem minoris multiplicatio maiorem restituens, triplex ostensa fuit, scilicet quæ augmentum multiplicat significatæ quantitatis per numeros, quæ insuper decrementum eiusdem multiplicat, & quæ denique vtrumque augmentum & decrementum eiusdem quantitatis per numeros expreßè multiplicat. Id equidem quauis via fit sumpto minore per vnitates numeris multiplicantũ, vt rèstituatur maior, iuxta diffinitionem 16 huius quam exponentes hanc multiplicandi formam exemplis edocebimus. Sed vt quibus notis designentur numeri augmentum vel decrementum multiplicantes, intelligamus. Ab arithmeticis practicis sumemus notas scilicet cum figuræ simplices & absolutæ proponentur vt 3 4 12 37, &c. Illæ augmentum designabunt, cùm vero superposita virgula describantur, vt $\overline{3}$ $\overline{4}$ $\overline{12}$ $\overline{37}$. Illæ decrementum præ se ferent, quæ ab arithmeticis fractiones nuncupantur, scilicet tertium, quartum, duodecimum, trigesimum septimum, &c. Siquidem vtriusque augmenti scilicet & decrementi actionem designare fuerit opus, ab vtroque ordine figuras sumemus, vt 4 & $\frac{1}{3}$ vel 6 & $\frac{2}{5}$, &c. Nam quæ sine virgula aut virgulæ superponitur, augmẽtum denotat, qui verò supponitur, decrementum, vt hac lege mixta absoluatur multiplicatio.

Diffinitio sexta.

Pat numerus, est qui bifariam diuidi potest.

Diffinitio septima.

Impar verò, qui bifariam diuidi non potest, vel qui vnitare differt à pari.

Parem numerũ diffinit Euclides, eum esse qui bifariam secari potest, quo perspicuè ostendit quod diximus prima huius diffinitione, vnitatem scilicet secari non posse. Nam si secaretur vnitas, quilibet numerus per hanc sextam diffinitionem par esset, similiter & nullus impar esset, concessa diuisione vnitatis, quod esset absurdum non igitur vnitatem secari fatebimur. Par igitur numerus is erit qui ex binis vnitatum ordinibus numero æqualibus constabit, impar verò qui in duos vnitatum ordines numero æquales secari nõ potest: isque semper vnitate differt à pari, ablata quidem vel addita vni ordinum vnitate. Hinc sequetur aliam esse numerorum, aliam rerũ significatarum diuisionem. Licet enim impar numerus bifariam secari non poßit, tamen ab impari numero denominata quantitas bifariam secari poterit, ac insuper varijs secandi formis per numeros exprimi non valentibus: quæ autem numeris exprimuntur sectiones, illæ singulæ rursus ab vnitate denominandæ erunt, insecta quidem ac continua.

Diffinitio octaua.

Pariter pat numetus est, quem solus par metitut numerus.

Huius est facilis intellectus, cùm enim nullus alius à pari aliquem numerum metitur, is mensus pariter par dicetur, vt 2 4 8 16, &c. quotlibet post binarium dupli vt ostendemus 33 noni theoremate.

MONITVM.

Non arbitramur Euclidem hanc iuxta Theonis tradita scripsisse, Pariter parem scilicet eum esse, quẽ par per parẽ metitur numerum: nam hæc diffinitio ob nimiam generalitatem conuerti cum suo diffinito nequit. Omnis etenim numerus quẽ par per parem metitur, non erit necessariò pariter par, vt 24, quem 4 per 6 metitur, & infiniti similes, quare mutare cogimur dictiones in eam sententiam, quæ trigesimatertia propositioni noni conueniat. Quæ quidem pariter paris naturam satis supérque explicat.

Diffinitio nona.

Patiter autem impar est, quem impar tantum pet parẽ metitur numerũ.

Idem intelligit Euclides dici pariter imparem, & impariter parem numerũ, eum quidem quẽ par quiuis per imparem, aut impar tãtum per parem metietur numerũ (quæ ad idem redeunt) vt 6, 10, 30, &c. quos pares metientes per imparem numerum repetunt, vel soli impares per parem.

MONI

MONITVM.

Idem huic deficiebat quod & præcedenti octauæ, scilicet exclusiua (tantùm) vt eam efficeret, cum diffinito conuerti. Non omnis enim numerus quem par metiens per imparē metitur, erit pariter impar, aut impariter par, quod idem ac vnum est: nec conuerteretur, si hæ sint voces (cum suo diffinito) sed in sequentem diffinitionem caderent binæ præcedentes. Quare necessariò apponendæ fuerunt hæ voces, in imparem tantum, per parem eum metientem.

Diffinitio decima.

Pariter par & impar est quem par per parē & imparē numerum quandoque metitur.

Numerum pariter parem & imparem dicit eum, quem aliquis par per parem, alius verò per imparem numerum metitur, vt 12, quem 2 per 6 & 4 per 3 metiuntur, & 20, 24, & similes.

MONITVM.

Huic diffinitioni hæsit Theon, quam oblitus suo Græco exemplari, & eam addere volēs Zambertus, à vero eius sensu decidit, & in alterā præcedentis partem incidit. Quod autem eam exquirat vera methodus, ostendetur 35 propositione noni, quæ huius verū intellectum planè demonstrat, quam ideo huic suo loco apponendam esse censuimus.

Diffinitio vndecima.

Impariter verò impar numerus est, quem impar tantùm metitur numerus.

Hæc similiter octauæ diffinitioni opponi videtur, sicut & opponuntur diffinita: nam sicut pariter par à solo pari mensus esse patuit, sic impariter impar is erit, quē solus impar metietur, vt 15, quem 3 per 5 metietur, & 21 25, & reliqui huiusmodi, a nullo pari mensi.

Diffinitio duodecima.

Primus numerus est, quem sola vnitas metitur.

Primum post modum diffinit numerum eum esse, qui nulli quatuor præcedentium diffinitionum subiicitur. omnes enim in alios diuiduntur numeros, hic autē primus in solas secatur vnitates, nullas alias ab vnitatibus habens partes, vt 2, 5, 7, 11, 13. &c.

Diffinitio decimatertia.

Primi adinuicem numeri sunt, quos sola vnitas communi mensura metitur.

Primos adinuicem numeros esse dicit eos, quorum nullus numerus est pars communis, seu qui nullam habent communem mensuram præter vnitatem, vt 11 ad 13. cùm sint primi singuli, fortius adinuicem primi erunt, sed 15 ad 22 & 9 ad 14 licet non sint ex se primi, tamen quia nullus numerus vtrosque metitur, sed tantùm sola vnitas, ipsi ideo primi adinuicem dicentur.

MONITVM.

Memorandum est quod diximus prima & quarta huius diffinitione, scilicet aliam esse vnitatis ad numerum, & numeri ad numerum rationem cum enim vnitas sit pura geometrica magnitudo, ea ad numerum rationem habet, quam quantitas continua ad discretam, numerus vero ad numerum eam habet rationem, quam quantitas discreta ad discretam, & hæc quidem ratio arithmeticis propria est magnitudinibus.

Cùm autem rationem tertia quinti diffinitione in quinque maioris & minoris inæqualitatis species diuiserimus, omnes autem eas rationes (dempta prima & eius conuersa, scilicet multiplici) respectum præ se ferre quem numerus ad numerum, non autem quem vnitas ad numerum diximus. Multiplicem verò ac eius conuersam rationem tantum denunciare, quam vnitas ad numerum, & è conuerso quam numerus ad vnitatem & proinde, vt diximus, eam quam continua ad discretam

eam repetentem quantitatem habet, vel discreta ad continuam, fatebimur in quauis ratione multiplici, ac eius conuersa, vnum terminum semper metiri alterum, & igitur numeros multiplicem rationem habentes, nusquam adinuicem primos esse, cum semper minor maiorem & seipsum metiatur, vtrosque itaque metitur, non igitur primi erunt aliqui numeri rationem habentes multiplicem. Qui verò reliquis rationibus copulantur, omnes rationem numerorum habent, quare appellatione numerorum primi adinuicem esse possunt, nunquam enim ad vnitatem (quæ non est numerus) deueniunt, veluti multiplices semper ad eam tandem concidentes. Ea namque ratio non est pura numerorum cùm alter terminorum sit quantitas continua, quare nec minimi eius rationis numeri dici possunt, eò quòd non sint numeri, sed alter eorum est vnitas, si ad minimas numerorum partes decurrant, veluti in tripla ratione 12 ad 4 reperiemus primos non esse adinuicem. nam 4 metitur seipsum & 12, quare vtrosque metitur. Quod autem ad minimos numeros, hæc ratio non perueniat, patet si suscipiamus 3 ad 1, videmus triplæ rationis minimas esse numerorum partes, non tamen numeros, eo quod alter sit vnitas, in reliquis verò rationibus secus accidet: omnes enim sunt rationes numerorum. Nam semper minor fit maioris partes, non autem pars, quæ vnitatis locum obtinet, sicque minimè eorum partes sunt semper numeri. Cùm itaque de primis adinuicem aut alicuius rationis minimis numeris loquetur Euclides, nos memores esse oportet, numeros rationem multiplicē habentes, in eis non comprehendi, cùm non habeant veram numerorum rationem, hoc est, discretæ quãtitatis ad discretam, sed famius continuæ ad discretam, aut discretæ ad continuam, maximè cū ad minimos peruenient, eo quòd semper vnitatem pro altero terminorum reperiat, quod si de rationibus in genere, non autem primorum, aut minimorum numerorum dixerit, ibi simul rationes multiplices cum reliquis contineri credamus demonstrandas (vt prima huius diximus diffi. in fine) tam discretorum quàm continuorum.

Diffinitio decimaquarta.

Compositus numetus est, quem numerus aliquis metitur.

Diffinitio decimaquinta.

Compositi adinuicem numeti, sunt quos aliquis numerus communi mensura metitur.

Compositum vocat numerum qui ex alicuius numeri frequenti sumptione constat, cùm autem ea sumptio frequens per numerum alium exprimatur, sequetur numerum compositum constare semper ex duorum facta multiplicatione adinuicem. Cõpositos similiter vocat numeros adinuicemeos, qui aliquem numerum pro communi eorum mensura suscipiunt, qui quidem communis mensor, variis suipsius sumptionibus, varios sæpius producet, æqualibus vero æquales compositos, vt 15 est compositus, eò quòd 3 per 5 repetitus eum producat, 8 verò ad 12 adinuicem compositi dicentur, eò quòd communem mensorem habeant 4 numerum, 9 autem ad 15 habent 3, & 10 ad 35 habet 5, communem mensuram. Non tamen sequetur idem in primis numeris quod in compositis: nam si duo sint cõpositi adinuicem, & quisque eorum compositus erit, quòd si duo primi adinuicem fuerint, non sequetur ideo eos esse singulos primos. Nam hi per priuationem, illi verò per habitum qui plus naturæ conuenit suas consequuntur species.

Diffinitio decimasexta.

Numerus numerum multiplicate dicitur, quando quot sunt in ipso vnitates, toties componitur multiplicatus, & gignitur aliquis.

Quoniam analoga prius distinguenda quàm diffinienda esse præcipit Aristoteles, antequam quid sit numerum multiplicare alium numerum dicamus, multiplicandi species distinguemus, eas maximè quæ quantitati (cuius præcipuum agimus negotium) conueniunt. Omnis itaque multiplicatio aut fit ad quantitatem propositæ magnitudinis augendam, aut ad eiusdem magnitudinis quantitatem minuendam, aut equidem ad partim augendam, partímque minuendam. Sed quia hæc multiplicationum distributio, paululum à vulgari distat, eam ex eadem sumere non dedignabimur, quoniam diximus libro quinto multiplex diffinientes, nos hoc septimo ostensuros varias illas multiplicium leges ab Euclide in obsequium quantitatum continuarum elucidandarum imploratas extra communem arithmeticorum vsum. Id animaduertendum obtestamur, Euclidem sola multiplicatione his tribus numerorum libris sua queque prælibare axiomata. Ea namque sola apud arithmeticos

insti-

infinitarum operationum comperta fuit actio. quippe volens non minus Euclides quantitatum decrementa (quæ arithmetici diuisione seu partitione exequuntur) peragere æquè vt incrementa, ab eisdem multiplicatione contracta, vtramque ea sola operationem concipiens, huius species in triplam multiplicandi formam distribuit, in priorem scilicet quæ propositæ quantitatis incrementum multiplicat secundam quæ propositæ decrementum multiplicat, ac postremam quæ eiusdem quantitatis propositæ partim incrementum, partim decrementum multiplicat. Harum trium specierum operationes ab arithmeticorum communi praxi cōmodabimus: conuertentes quæ ab arithmeticis in partitionem, diuisionem, seu fractarum partium vsum, veniunt, in decrementi multiplicationem, quæ vnum idémque resonant, ac præter hæc infinitum operandi exequium soli multiplicationi inter omnes arithmeticas operationes proprium. Numerorum insuper picturam arithmeticorum more sumentes, scilicet numeros quantitatem augentes, simpliciter statuemus, vt 3.4.7.10.25.34, &c. Numeros vero quantitates minuentes, siue decrementum significantes more fractorum in idem opus ab arithmeticis practicis depictorum, scilicet $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{7}$, $\bar{10}$, $\bar{25}$, $\bar{34}$, &c. virgula superposita decremētum significante proponemus. Mixtos verò cum vtraque incrementum scilicet & decrementum petemus, vtraque forma describemus scilicet $3\frac{1}{4}$, $4\frac{2}{5}$, $7\frac{1}{4}$, &c. vt libet expostulatos. Quare vt ostendamus hac arte diffinitionem Euclidis ad futura rectè peragenda, his multiplicationibus niti, cœpta peragamus. Numerus igitur numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso multiplicante vnitates, toties componitur, siue repetitur quantitatis per multiplicatum designatæ, augmentum, vel decrementum, & hac multiplicatione gignitur aliquis, qui scilicet illud augmentum vel decrementum exprimat, vt exemplo aperiamus.

A 4 — B 3 — C 12

Numerus A numerum B multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso A vnitates, scilicet 4, toties componitur siue repetitur numeri B multiplicandi, scilicet 3 augmentum, & & gignitur aliquis C, hoc est, 12, qui quidem toties concipit in se multiplicatum B sumptum pro numero quantitatem B significante quot sunt vnitates in ipso A agentes in vnicam B quantitatem, scilicet quater cum sint quatuor. Quare 12 dicetur æquè ipsius 3 quadruplex incrementum, vt 4 agens quantitatis passiuè B quadrupla actio. Hac de re haud secus refertur numerus 12 productam quantitatem denotans, ad numerum 3 propositam simplicem significantem, quàm numerus 4 agens ad eandem simplicem vnicam ac passiuam per suas vnitates sumptam, vnde sequitur hanc simplicem B pro vnitate à numero agente per suas vnitates repetitam, semper metiri maiorem à numero significatam, nam vnitas numerum quemuis metitur. Hoc equidem exemplum in augmento multiplicando proposuimus, sequens vero in decremento multiplicando supponamus. Numerus similiter A numerum B multiplicare dicitur (scilicet $\bar{3}$ ipsum 6) quando quot sunt in ipso A vnitates, toties componitur siue repetitur ipsius B multiplicandi decrementum, & gignitur aliquis C, qui quidem fit ex triplo ipsius B (hoc est 6) decremento, scilicet 2 qui ipsius 6 est pars tertia $\bar{3}$ siue triplex decrementum per vnitates numeri A agentis detractum.

E 6 — C 2 — A 3

Tertiam multiplicandi speciē ex binis prioribus cōpositam proponere possumus, scilicet eam, qua vtrūque multiplicamus, augmentum quidē propositæ magnitudinis, & decrementū, quod cùm simul ac semel fieri non possint, sed diuersis tantum multiplicationibus, hanc multiplicandi speciem, inter simplices collocare noluimus. Nam hæc binas efficit multiplicationes, quarum productas iungit magnitudines, vt si numerus 12 per 3 & $\bar{4}$, hoc est, per numerum 3 augentem, & per $\bar{4}$ minuentem multiplicari iubeatur, fient binæ multiplicationes, prior quidem 12 per 3 in augmentum producet 36. Idem verò 12 per $\bar{4}$ decrementum producet 3, quæ producta simul iuncta component 39 productum ex multiplicatione 12 per 3 & $\bar{4}$. Quauis igitur multiplicatione productus, componitur ex ea multiplicati sumptione, quæ fit per multiplicantis vnitates, siue in augmentum, siue in decrementum pergat. Cùm autem (vt sæpius diximus) Geometria numeros tātùm accomodet ad discernendas magnitudines, quas postmodum commēsurabiles dicet, numerorum leges exponit, eas maximè quæ suis geometricis quantitatibus proprias fore existimat: quare cùm multiplicandum hic proponit aliquem numerum, illum tanquam vnitatem repetendam in augmentum, vel decrementum sumit. Nam dicit illum sumi per vnitates multiplicantis, eò quòd tanquam quantitas continua sæpius repetatur, cuius intelligentia discretionis, à producto per numerum multiplicātem prodeat. Et igitur multiplex semper producetur maius multiplicato, siue maius efficiat augmentum, siue maius decrementū proposito multiplicando fecerit. Cùm enim multiplicatio nec sit numerus, nec per eum significata magnitudo sed tantùm frequens illa repetitio, perspicuum est omnem frequentiam repetitionis susceptum auge-

re negotium, & repetitum se ipso non repetito semper maius esse, quod idem est quod & multiplex, & simplicis repetitione compositum, & ideo semper maius simplici vel multiplicato, quare multiplicationem non magnitudini attribuemus, sed eiusdem augmento vel decremento.

Animaduertendum est tamen non quosuis numeros se inuicem multiplicare posse, æque in decrementum, ut in augmentum, maxime cum solo arithmetico more nullam quantitatem significantes sumuntur, veluti 4 per 3 in augmentum potest duci ut producat, 12. Sed si 4 per 3 in decrementum ducamus, non reperiemus 4 tertiam habere partem. Quare videretur hæc multiplicandi methodus in quibusdam manca esse numeris. Ad hæc Euclidem numeros pro quantitatibus elucidandis tantum, non ut numerorũ naturam propriam doceat sumpsisse dicemus, idque præcipuum eiusdem fuisse scopum credamus. Quilibet igitur numerus geometriæ obsequio destinatus, quantitatem aliquam denotabit. Si itaque quaternarij magnitudo A per ternarij unitates decrementum petat, ea per numerum tertiam partem habentem significetur. Per ternarium ipsius quaternarij augmento ducto, tum producemus 12 quæ quidem 12 ipsi A magnitudini accommodantes, reperiemus ipsam A magnitudinem ut significantis numeri 12 triplex suscipere decrementum per $\bar{3}$ ipsius 12 signatum scilicet 4, ut tandem dicamus qualium A fuit 12 eorum eiusdem A $\bar{3}$ fuit 4. Sic itaque qualibet magnitudo per quemlibet numerum in decrementum duci poterit, cum cuilibet magnitudini quilibet possit attribui discretor numerus, & qualibet magnitudo in quotuis segmenta sic infinite secabilis, est enim quantitas. Cur autem hac multiplicandi lege, ab arithmetica praxi admodum aliena, qua tantum multiplicandum postulat augmentum utatur Euclides, ea est causa quã iam antea libro quinto diximus quod multiplicium naturam sumpsit, ad quantitatum continuarum & cõfusarum respectus mutuos indicandos. Qui quidem respectus eo more se habent, quo si prior posteriorem multiplicet, posterior priorem diuidit. Ideóque sola multiplicatione utitur Euclides, utrũque absoluens & multiplicandi & diuidendi negotium. multiplicans etenim augmentum multiplicat, multiplicans verò decrementum secat vel diuidit. utrũque tamen productum multiplex vocat, ut ostendimus decima diffinitione quinti, scilicet quemadmodum ratio ab 8 denominata tripla est, eius quæ à 2 denominatur, & maior, sic ea quæ ab $\frac{1}{8}$ denominatur, tripla erit eius quæ ab $\frac{1}{2}$ denominabitur, & minor, cùm hæc decrementum, illa verò augmentum eadem petant multiplicatione facta per 8. quare Geometriæ numeros accõmodantes aspectemus oportet, multiplicantem numerũ nullam præ se ferre quantitatis significationem, sed tantum unitatum frequentiam, multiplicatum verò & productum, semper quantitatẽ denotare, cui elucidandæ attribuuntur numeri. Et licet his tribus libris Euclides solum de numeris disponat, nihilominus concipere nos decet, eum ad quantitatum continuarum obsequium numeros tantum referre. Quæ igitur theoremata suis Geometricis quãtitatibus ex arithmeticis subfurari valuit congruentia, ea his tribus libris proponet, reliqua puris tantùm arithmeticis relinquẽs geometricis documentis non consque necessaria. Sed quia multiplicandum decrementum quibusdam difficilius erit multiplicando augmento proponamus exemplum, ac à multiplicationis exemplo ordiamur, dicamúsque à multiplicatione B producti C multiplex tum C numerus aut quantitas dicetur multiplex numeri aut quantitatis B, sed multiplicandi actio semper numero A designatur, qui quidem semper numerus existet agens autem nunc in incrementum nunc in decrementum in B unicam passiuam & continuam quantitatem quibusuis numeris explicandam, qua A maior erit semper A numerus agens unico B patiente atque perinde B metietur A ut minor simplex maiorem actione multiplicem. Cùm semper eandem habeat A numerus ad B unitatem rationem quam seruat C productus ad B sumptum pro numero siue quam C quantitas in B quantitatem. Quia verò A nullius est quantitatis significator, sed solius actionis, C autem prælibata actionis significat quantitatem, sequetur B binos effectus suscipere, alterum quo tanquam simplex passiuus actiuo A confertur túmque tanquam minor seu unitas maiorem pluralem metitur, alterum quo veluti quantitas aut numerus numero C confertur, qui licet B non semper quantitate metiatur C quãtitatem quia tamen eandem actione aut passione seruat ad C rationem ut numerus quàm idem B simplex unicus ad A agentem, semper B ut quantitas simplex metietur C multiplicem, non minus quàm B idem ut unus metitur A numerum agentem siue per suas unitates eundem B repetentem in augmentum quandoque vel in decrementum. Nam semper multiplex maior est simplice, actione quidem multiplicandi, licet quandoque quantitate vel numero sit minor, quia in multiplicibus actio non quantitas potissimum inspicitur. Insuper exemplum decrecrementi multiplicãdi, aliud a præfatis, maximè si superponatur numero decrementum significãti alius numerus more vulgarium fractorum tertiæ multiplicãdi speciei applicatorum, ut $\frac{1}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$, &c. per quem multiplicandus sit aliquis ut 12. Tertiam speciem sectabimur (cum proponantur bi-

nĩ

ni multiplicantes in his coniunctis numeris $\frac{3}{4}$ scilicet 3 & 4, quorum prior augmentum (cum virgulæ superponatur) posterior autem decrementum (qui virgulæ supponitur) denotat. Multiplicantes igitur ipsius 12 propositi augmentum, per 3 producemus, 36 cuius 36 decrementum per 4 (virgulæ suppositum) ducentes inueniemus 9 ipsius quidem 36 quartam partem, siue propositæ multiplicationis productum, scilicet propositæ 12 tria quarta. Cur autem multiplicato 12 per augmentum in 36, ipsum 36 in decrementum, non autem 12 propositum duxerimus, id causa dicemus esse, quod scilicet hi coniuncti multiplicantes $\frac{3}{4}$ duobus numeris vnicam resonent quantitatem, hoc est, vnius quantitatis relatiuam: tria namque quarta vnius integræ magnitudinis sunt relatiua, quare multiplicato per primum augmento, illico multiplicatur productum in decrementum. Secus si fuerint duæ numerorum naturæ, licet idem sint numeri, scilicet si proponatur idem 12 multiplicādus, per 3 & $\overline{3}$ per primum producet 36 augmentum, quia verò disiuncti sunt multiplicātes, singuli in propositum suas exequentur multiplicationes, $\overline{3}$ igitur ipsius 12 multiplicans decrementum producet 4, harum itaque binarum multiplicationum producta per vnitates multiplicantis repetita producent coniuncta 40, quod erit propositæ multiplicationis nempe ipsius 12 per 3 & $\frac{}{3}$ productum, hac equidem ratione semper multiplex actio simplice proposita maior erit, nam multiplicatio actionem non autem quantitatem denotans, maiorem efficit actionem, licet minorem producat, quandoque multiplicem quantitatem simplice, sed maius semper augmentum ipsius simplicis, vel certe maius eiusdem decrementum, quæ sunt veræ multiplicationis actiones. Id quidem in simplici multiplicatione augmenti tantum vel equidem decrementi tantum iudicabimus. Quòd si mixta offeratur multiplicatio scilicet augmenti & decrementi, semper quidem augentur bini effectus, augmenti ac decrementi. Sed quæ maiori numero proponitur facienda, multiplicatio, maiorem producit effectum, vt $\frac{3}{4}$ aliquem multiplicantia numerum maiorem decrementi effectum quam augmenti efficient (cùm $\overline{4}$ decrescens sit ipso $\underline{3}$ augente maior) Si verò $\frac{4}{3}$ aliquem multiplicent, hi maiorem augmenti producent effectum, cùm $\underline{4}$ augens sit maior ipso $\overline{3}$ minuente. Si quidem per æquales, vt $\frac{3}{3}$ aliquem multiplicemus, æqualem producemus effectum, cum vtrique sint æquales numeri.

Huic autem intelligentiæ non parum conferet hæc sequens formula, qua concipiemus magnitudinem, A, hoc est, quemlibet multiplicandum vtroque modo numerum (vt hic posuimus 12) vnitate foneri, hoc est, vnum esse, ac binis multiplicandi modis obnoxium, scilicet per B C vel D in augmentum, per E F vel G verò in decrementum. Si enim per B augentem scilicet 2, ducatur ille 12. Ipse idem repetetur tanquam ipsius binary vnitates, hoc est, qualium A vnitas est 12, eorum B binarius augens est 24, & C ternarius 36, D verò quaternarius 48. Similiter eorundem E minuens binarius erit 6, F verò ternarius erit 4, G autem erit 3, qui quidem E F G eò quòd decrementum multiplicant, virgulæ supponuntur. Hac equidem methodo videmus multiplicationem efficere multiplex maius multiplicato, scilicet G maiorem ipso A, sicut & D, actione quidem (cum G & D) sint multiplicationis actione æquales, quantitate tamen secus. nam licet 48 ex multiplicatione ipsius A in D productum, sit maior quantitas ipsa A magnitudine, tamen 3 ex multiplicatione, eiusdem A in G productum, minor erit quantitas eadem A quantitate (hoc est, ipso 12) æquali tamen vnitatum agente copia producta. Cùm igitur inspiciuntur quantitates, producta ex augmenti multiplicatione, semper maior erit simplice multiplicata, quæ verò ex decrementi multiplicatione orietur, minor erit eadem multiplicata. Si verò inspiciatur multiplicatio, hoc est, illius actionis denominatio, semper multiplex maius erit multiplicato, nam in ea actione, quilibet multiplicandus numerus, pro vnica magnitudine continua sumitur, quam quidem plures vnitates augentes plus augent, plures verò minuentes plus minuunt. Inde orietur, quemlibet numerum cuiuslibet numeri multiplicem dici posse, diuersis autem aspectibus. Si quidem multiplicetur incrementum, maiores numeri minorum erunt multiplices. Si verò decrementum multiplicemus, è conuerso minores maiorum multiplices erunt. Si rursus mixta fuerit multiplicatio, in ea verò exuberet incrementum, multiplex numerus maior erit simplice. Siquidem in eadem mixta maius fuerit decremētum incremento, minor numerus tum maioris erit multiplex. Hæc ideo suggessimus vt (menti Euclidis concordes) quaslibet antecedentis ad consequens rationes ex multiplicatione qua

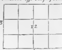
Quadrupla	4	D	o o o o	48
Tripla	3	C	o o o	36
Dupla	2	B	o o	24
Magnitudo	1	A	12 simplex	
Secunda	$\frac{1}{2}$	F	o o	6
Tertia	$\frac{1}{3}$	f	o o o	4
Quarta	$\frac{1}{4}$	G	o o o o	3

antecedens multiplicat consequens oriri doceamus, siue ea fuerit in augmentum, aut in decrementum, vel sanè in mixtam augmenti & decrementi operationem constituta. Cum ideo ratio sit æquè maiorum ad minores vt minorum ad maiores, semperque antecedens sit consequentis multiplex, necessarium duximus omnes & quosuis numeros quorumuis numerorum multiplices quandoque dici posse, æquè minores maiorum, vt maiores minorum, iuxta oblatum exemplar. Multiplex igitur æquè dici poterit, is qui partibus multiplicatis in decrementum minor efficitur, simul ac is qui per sui ipsius repetitionem in augmentum maior fit. Nam vtraque via per vnitatum multitudinem sumitur, siue in augmentum, aut decrementum pergat, hanc quippe multiplicandi legem sibi sumpsit Euclides, vt rationum quantitates sola multiplicatione (quæ earum vera est substantia) exprimeret. Maioris inæqualitatis per multiplicationem augmenti qua antecedens multiplicat consequens. Minoris vero inæqualitatis per multiplicationem decrementi qua idem antecedens multiplicat consequens, cum ratio certa nihil aliud sit quàm antecedentis ad consequens multiplicatio, vt tertia diffinitione quinti satis latè disstulimus. Qua verò de causa sola vsus sit Euclides multiplicatione, nulla autem diuidendi methodo, sed diuisionem simul multiplicatione absoluisse visus est, id potissimum causæ esse arbitramur, quod rationes magnitudinum inter se inuestigandas præcipue curet negotio. Duarum autem magnitudinum rationem (vt diximus) nihil aliud esse ostensum est, quàm respectus antecedentis ad consequens, non autem consequentis ad antecedens, & proinde ea multiplicatio qua antecedens multiplicat consequens (hoc est, continet) vt rationis quantitas sola multiplicantis quantitate exprimatur, & idcirco facilius multiplicatio multiplicationi quam diuisioni comparabitur, vt inde rationum oriantur conferentia, vt exemplo. Sit ratio 12 ad 4, cuius differentiam quantitatis cum ratione 4 ad 12 eius conuersa, inuestigemus. Comperiemus antecedens primæ 12 multiplicare consequens 4 per 3 denominatorem multiplicationis triplæ. Rationis verò 4 ad 12 reperiemus antecedens 4 sui consequentis decrementum per eadem $\frac{1}{3}$ multiplicare, cuius denominatio erit $\frac{1}{3}$ (hoc est tertia) Patet igitur facilius horum multiplicantium 3 & $\frac{1}{3}$ differentia has rationes denominantium, quàm si primæ rationis antecedens suum multiplicaret consequens per 3. Secundæ verò antecedens diuideret suum consequens, per eundem 3. Trium enim ad tria nullam concipimus esse distantiam. Operandi tamen modum diuersum, diuersaque producta efficere, sub eadem itaque denominatione, binas illas rationes conuersas opprimentes, absurdissimum proferemus methodi defectum. In quem plures lapsi sunt denominantes rationes conuersas sub eodem numero, quanto autem differant, cuilibet relinquimus iudicandum. Et insuper multiplicationem sumpsit Euclides, relicta diuisione, eò quod omnis numerus per quemlibet multiplicari potest, non autem per quemlibet diuidi, &c. vt iam quinto diximus. Quia itaque infinitas operandi libertates (in augmentum, scilicet & sectionem) appetit geometria, solam multiplicandi legem ab arithmetica (quæ illi vnica infinita existit) non autem diuisionem (cuius terminata per vnitatem reprimitur facultas) sibi asciscendam arbitrata est, vt latius posthac monebimus.

Diffinitio decimaseptima.

Planus numerus est, qui ex duobus se inuicem multiplicantibus producitur, latera verò illius sunt seinuicem multiplicantes numeri.

Quoniam omnis numerus numerum multiplicans progenitum metitur, idem numerus planus & compositus erit (vt diffi. 14 huius.) Sed quia huius effectus diuersa videntur esse causæ, voluit Geometria binis denominationibus has exornare species. Planus etenim superficiei rectãgulæ capacitatem dicit, sub binis lateribus quantitatem denotantibus contentam, vt prima diffi. secundi. Compositum vero producti ex numero eum metiente per aliquem numerum, generationem profert, vt 3 per 4 multiplicata latera rectangulum planum efficiunt 12. Compositum vero non eò quòd contineatur binis lateribus, sed eò quòd aliquis numerus per numerũ eum metiatur, scilicet 3 per 4, vel 4 per 3, aut 2 per 6, &c. producent compositum 12, numerorum operationes tantum non autem significatas quantitates aspectantes, vt prima diffinitione planè docuimus, secus in plano qui significatas quantitates aspectat tantùm.

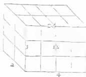


Diffinit

Diffinitio decimaoctaua.

Solidus verò qui ex tribus sese multiplicantibus producitur, latera autem illius, sunt multiplicantes se inuicem numeri.

Solidum ea de causa vocat, quòd tribus foueatur dimensionibus, longitudine, latitudine, & sublimitate, quia planum duabus tantū contineri dixit, vt ordinem numerorum iuxta quantitatum continuarum dimensiones disponat, scilicet numerum primum qui vnicam habet longitudinem, cum nullus eum metiatur numerus instar lineæ. Planum vero longitudine & latitudine (veluti superficies) constantem, solidum autem tribus, longa, lata, ac sublimi, comprehensum (solidi corporis instar) dimensionibus, vt 4 per 3 latera ducentes, planum efficimus 12. Ipsum rursus 12 planum per tertiam dimensionem, scilicet 2 multiplicantes, solidum 24 effecimus, tribus dimensionibus 4 3 2 se inuicem multiplicantibus compositum, quarum quælibet quantitatem indicat.



Diffinitio decimanona.

Quadratus numerus, est qui æquè æqualis, vel sub duobus æqualibus numeris continetur.

Diffinitio vigesima.

Cubus numerus, est qui æquè æqualis ęquę, vel sub tribus ęqualibus numeris continetur.

Quia omnis quadratus planus est, sicuti omnis cubus numerus solidus est, quadratus verò solus sub duobus æqualibus numeris inter omnes planos continetur, cubus verò sub tribus æqualibus inter omnes solidos. Tamen seorsum diffinire dignatus est Euclides propter eorum regularitatē, infinitis geometriæ obsequiis vtilem. Dicit autem æquè æqualem esse quadratum, vt dimensionem geometricam laterum exprimat, sub duobus vero numeris æqualibus contineri, vt arithmeticam componēdi speciem designent. Cubum similiter æquè æqualem æquæ, vt tribus eum geometricis æqualibus mensuris contineri doceat, sub tribus verò æqualibus numeris, vt arithmeticam componendi methodum insinuet, veluti in quadrato. Ex his facile percipimus Euclidem numeros ad geometriæ auxilium connocasse, cùm eos ad geometriæ sæpius dimensiones reducat.

Diffinitio vigesimaprima.

Numeri proportionales, sunt quorum primus secundi, & tertius quarti, æquè fuerit multiplex, siue eadem pars, siue eædem partes fuerint

Proportionem (vt diximus tertia diffinitione quinti) magnitudinum sub æqua earum multiplicatione foueri docet. Nam proportionales dicit numeros (hoc est eandem rationem habentes) eos quorum primus æquè secundi, vt tertius quarti fuerit multiplex, siue fuerit eiusdem pars, siue partes, hoc est idem decrementum, quonis modo æquè multiplices dicit, & idcirco in eadem ratione seu proportionales quauis multiplicatione augmenti siue decrementi, aut equidem vtrinsque ducti fuerint, vt 6 ad 3 sicut 4 ad 2, & 3 ad 6 vt 2 ad 4 pars, & 2 ad 5 vt 4 ad 10, ac 8 ad 6 vt 12 ad 9 partes, semper quauis arte primus secundi æquè vt tertius quarti dicetur multiplex, & igitur proportionales erunt.

MONITVM.

Vertens Zambertus græcum Theonis exemplum, super hac diffinitione, vltimam reliquit dictionem nostro negotio vtiliorem (scilicet ἴσοι. Cum enim dicit Euclides numeros proportionales esse, quorum primus secundi & tertius quarti æquè fuerit multiplex hic finis est substantiæ diffinitionis, nam æqualitas multiplicationis, vt sæpius diximus, æqualitatem rationum & proinde propor-

ionem necessario producit. Quod autem postmodum addit (vel eadem pars [illegible] rint) illud simile subiungit, ut ostendatur quantitate, sive ut pars continua [illegible] discretæ discreti (quæ sunt omnes rationes cognitæ) æquè fuerit multiplex primus secundi, et tertius quarti, ipsos eandem habere rationẽ, & ideo proportionales esse. quare dixit Græcum exẽplar, sive eadem pars sive eadẽ partes fuerint, id est quoquo modo æquè multiplices, ut decrementi ac incrementi multiplicationẽ exprimat, quod si relinquamus ultimam dictionem (fuerint) intelligemus proportionales esse eos tantum qui sunt æquè multiplices, vel eos qui sunt eadem pars vel partes. Quid igitur in hoc subsurato verbo depereat, quisque iudicabit nam a multiplicibus omnes excluderentur ferè quantitatum rationes (ut diximus diffinitionibus quinti) hoc late prædixit Euclides decima diffinitione quinti, cùm ostendit in rationibus minoris inæqualitatis, minores esse maiorum multiplices, eo quod decrementum ipsæ multiplicent maius, sicq́ multiplicationem actioni, non autem quantitati convenire docuit. Præterea patet hinc rationem nihil aliud quam antecedẽtium ad consequentia multiplicationem esse. dicit enim primum antecedens æquè multiplicare secundum consequens, ut tertium antecedens quartum multiplicat conseq̃uẽs. Variata igitur multiplicationis specie, variatur & rationis quantitas, insuper si nulli proportionales essent exceptis æquè multiplicibus, & eadem parte, sive partibus. Quid in his accidet, sicut 8 ad 6 sic 4 ad 3, quorum primus & tertius secũdi & quarti, neque multiplices, neque pars aut partes, à Cãpano & Theone dicuntur, ac ideo proportionales non essent, si cum diffinito (ut moris est) diffinitionem convertamus, quod planè absurdum constat. Non itaque postremam hanc orationem, ut disiunctivam, sed ut interpretem legemus.

Diffinitio vigesimasecunda.

Similes plani, & similes solidi numeri, sunt qui proportionalia habent latera.

Quoniam plani numeri duo tantùm habent latera, eos producentia sua multiplicatione, solidi verò tria habent, similitudinem planorum inter se ac solidorum inter se, ponit in rationis laterum similitudine. Si enim duo latera unius plani numeri, eam habeant inter se rationem, quam duo latera alterius plani, ipsi similes erunt plani, haud secus in similibus solidis, cùm enim tria unius latera inter se, eam quam tria alterius observãt latera rationem, ipsi similes erunt solidi. Quia vero latera similes habent rationes, proportionalia dicuntur, & similium planorum ac solidorum numerorum latera erunt, ut exemplo, quia 2 & 3 sunt in eadem ratione qua 4 & 6 numeri ab his lateribus cõpositi, similes plani erunt, scilicet 6 & 24, in solidis verò 2 3 4 sunt in ratione horum 4 6 8, quare ab eis compositi solidi, scilicet 24 & 1 9 2, similes erunt solidi.

Diffinitio vigesimatertia.

Numerus partem cognominans, est is pet quem pars repetita totum constituit.

Ut 4 est tertia pars 12 eò quòd ter repetitus totum 12 componat, quare repetitionis frequentia partem à ternario cognominat.

Diffinitio vigesimaquarta.

Perfectus numerus, est qui suarum sectionum singulis partibus simul sumptis est æqualis.

Quoniam eidem numero plures inesse possunt partium quotarum diversæ sectiones, diximus perfectum eum esse numerum, qui ex singulis suarum sectionum partibus constat, ut in senario qui quidem habet secundas, tertias & sextas partes. Sumantur itaque earum partium singulæ, scilicet secunda 3 tertia 2 & sexta 1, quæ 3 2 & 1 simul sumpta, componunt senarium, perfectum igitur numerum. Similiter 28 qui suis constat partibus scilicet 14 7 4 2 1 singulis eum simul componentibus, ut latius trigesimaseptima noni.

MONITVM.

Huic addidimus hanc vocem (singulis) ne hac Theonis diffinitione ambigeremus circa partium quæstum,

questum, videmus etenim omne totum suis partibus æquum esse, omnes igitur numeros perfectos crederemus quare si ex singulis suarum partium eum componamus, intelligemus singulas tantùm à sectionibus sumendas esse partes, quæ coniunctæ ipsum componant.

Communes sententiæ. *Prima.*

Si numerus metiatur partem, metietur & totum.

Cum pars sit ea quæ totum suiipsius præcisa repetitione constituit, perspicuum est, si aliquis numerus præcisa sua repetitione partem constituat, & eundem ampliori repetitione totum constituere, vt A sua repetitione generans B partem ipsius C, perspicuum est A ampliore facta repetitione, quaquidem producit singulas ipsius C partes æquales ipsi B tandem totum C metiri.

Secunda.

Si numerus metitur totum & ablatum, metitur & reliquum.

Si numerus A sua repetitione producat numerum B D totum, & præterea sua repetitione constituat ablatum B C, perspicuum erit: si A præcisis repetitionibus ipsius A in toto B D, tollantur præcisæ repetitiones eiusdem A in B C, quæ supererunt in C D repetitiones ipsius A, ipsum C D reliquum metientur, cùm eundem repetant.

MONITVM.

Licet præcipui, quorum sudore potissimum Euclidis intellectum adepti sumus, fuerint Campanus & Theon, & inter eos plus videatur veræ interpretationi acquirendæ incubuisse Campanus, nihilominus qua de re sæpius pugnantias quasdam Mathematicam veritatem maculantes, pluribus locis (maximè quinto & his tribus numerorum libris) passi sint, admirari non desino: in tantùm illud præcipuum fuerit, quod scilicet arithmeticarum magnitudinum naturam, cum geometricarum magnitudinum natura confundentes, earum documenta iisdem præceptis tradi posse, sæpe existimauerunt, quasi discretum & continuum eisdem vallari posset legibus. Partem etenim geometricam prima quinti diffinitione, non aliàs quam tertia septimi antea difinierunt, licet illa generalior ob confusorum naturam, hæc verò minus fuerit generalis ob discretorum facilitatem. Partem insuper multiplicis relatiuam esse dixerunt quod videtur quodammodo absurdum, partem scilicet quæ verè geometrica confusa & indiscreta quantitas est, multiplicis quæ pura arithmetica & discretionem præ se fert, relatiuam esse indecens admodum appareret: nam quam magnitudinem Geometræ partem dicunt (à toto quauis arte abstractam) non semper suscipit Arithmetica, sed tantùm hac generali acceptione eas magnitudines à toto abstractas, quæ ipsi toti commensurabiles existunt, eò quòd numerorum natura semper magnitudinum commensurationem præ se ferat. Quare eam in binas distribuit Arithmetica sumptiones, partem nempe & partes, vt diximus tertia & quarta huius diffin. reliquas (ie toti incommensurabiles geometricæ amplitudini reseruans. Partem itaque toti relatiuam posuimus, generali apud Geometras & Arithmeticos sumptione, quæ semper proposita magnitudinis decrementum profert, nusquam verò augmentum multiplicat: multiplicis vero relatiuam, simplicem esse diximus magnitudinem. Cùm enim magnitudo simplex (quæ scilicet augmento æquè vt decremento obnoxia esse reperitur) æquè per frequentes additiones alterari possit, vt per frequẽtes detractiones, actiones illas quibus proposita magnitudo in augmentum vel decrementum alteratur, multiplicationes diximus, à multitudine vnitatum numeros componentium, denotatas quare illæ multiplicationes solis adhærent arithmeticis legibus ob earum discretionẽ. Hac de causa cum multiplicem maiorem minore dicimus, non quantitatem vel eius magnitudinem maiorem dici credemus, sed tantùm actionem illam multiplicãdi maiorem denominationem multiplici numero designatam producere, denominatione simplicis quam semper multiplex (simplicis relatiua) sub vnitatis nomine contineri cogit. Ac ideo numerus (semper vnitate maior existẽs) multiplicem actionem (numero significatam) simplice passiua maiorem esse, siue ea actio in augmentum, siue in decrementũ pergat, asseremus, hinc suscipiemus à proposita simplice magnitudine posse educi per multiplicatum eius decrementum, partem aliquam eiusdem quæ quidem ipsius simplicis & maioris multiplex dici

poterit, (scilicet decrementum) & ab eadem simplice posse educi per multiplicatum eius augmētum, aliam maiorem ipsa proposita, quæ eius simplicis & minoris multiplex dicetur (scilicet augmentum) & igitur vtraque via altera alterius multiplex dici poterit, siue pars eius fuerit siue eandem repetat, & tamen multiplex semper maior erit simplice, cum multiplicatio non quantitatem, sed actionē respiciat tantum. Id equidem ea de re dicimus, vt ostendamus Euclidem non omisisse rationes superparticulares, superpartientes, necnon omnes minoris inæqualitatis rationes, quas omittere videretur, si multiplex numerorum in sola ratione multiplici sumeret, scilicet circa solum ac præcise repetitum augmentum. Cùm autem apponit & decrementum, ea duplex multiplicatio omnes comprehendit habitudines, & maioris & minoris inæqualitatis (vt optat Euclides) qui solam multiplicationē suis theorematibus tradit, nullam autem diuisionem, eò quod vnitas soli multiplicationi non diuisioni sit obnoxia. Quare omnimodas rationum compositiones, sola multiplicatione præcipit Euclides fieri (quinta sexti diffinitione) non autem diuisione, quam nescio qua arte omisit Campanus, Theon verò penultimo exemplo eam exponere conatus, rationem 1 ad 2 dimidiam, non autem sub duplam vocauit, rationem vero 3 ad 1 triplam, vt ostenderet triplam per dimidiam ductam rationem sesquialteram producere, ex his compositam quod illum potius casu quam ex voto offendisse ac 1 ex antiquioribus subfurasse arbitramur, eò quòd nullas rationum minoris inæqualitatis denominationes, per decrementi multiplicationem productas ostenderit, vt verè ostendere debuisset, ne in illud caderet offendiculum modernorum quorundam, qui ex binis maioris, & minoris inæqualitatis rationibus (vt præfato Theonis exemplo) rationem componere volentes, maiorem denominationem, per minorem diuidendam iubent: Euclides verò multiplicandam (vt exposuit Theon) quod fieri non potest, si rationem maioris & eius conuersam minoris inæqualitatis sub eadem denominatione (vt docent moderni) concludamus: nunquam enim ex his duabus consurgentem rationem generabimus vt si ex tripla & subdupla aliquam componere velimus (3 per 2 multiplicantes) sextuplam producemus, longè à sesquialtera (quæ verè ab his producitur) alienam. Quare autem Theonem id potius offendisse quàm ex voto fecisse diximus, ea est causa. In vltimo sequenti namque exemplo ad quantitatum comparationem, non autem ad denominationum multiplicationem (qua facile negotium illud exequeretur) recurrit, vt qualium ait A B *est duorum, talium est* G D *quatuor, qualium autem* G D *quatuor, talium* E Z *trium, & qualium igitur* A B *duorum, talium* E Z *trium. Illud tandem nulla ab his denominata ratione quæ ex dimidia & sesquitertia constaret, quod leuius absoluisset ductis inuicem,* $\frac{1}{2}$ *per* $1\frac{1}{3}$ *denominatoribus, iuxta Euclidis mentem producens bipartientem tertias ipsius* A B *ad* E Z. *Quare quod priori exemplo dixit, sorte non arte offendisse Theonem arbitrati sumus, licet in eo veram Euclidis mentem sequutus fuerit.*



Cùm insuper qui Euclidem interpretati sunt, geometricarum magnitudinum ab arithmeticis differentiam non satis docuerint, à primorum numerorum ac datæ rationis minimorum intelligentia, discentes maxime auertere visi sunt nam primos numeros sola metitur vnitas, vnica quidem ac continua magnitudo geometrica, quæ nullo numerorum nomine comprehenditur, sed tantū numeri pars dicitur. Vnde quamlibet rationis speciē primos numeros (dēpta multiplici) recipere videmus. Nā in multiplici ac eius cōuersa, minor numerus semper vtrumque (contra primorum diffinitionem) metitur. Similiter quamlibet rationis speciem (dempta multiplici) minimos numeros suscipere videmus. Nam ratio multiplex & eius conuersa semper cadit inter continuam ac discretam quātitatem, cùm minor sit semper maioris pars vnica, non autem partes, non igitur est pura ac simplex numerorum ratio. Cum itaque ad minimas numerorum partes, ea ratio multiplex ducitur, alterum terminorū semper efficit vnitatem, quæ cùm non sit numerus, inter numerorum rationes, minimorum multiplicis rationis numerorum comprehendere rationes vitabimus. Reliquarum autem rationum species cùm semper minor sit maioris partes, in numeris minimas eorum partes collocare censebimus. Cùm igitur de minimis datæ rationis ac primis loquemur posthoc numeris, Euclidem rationem multiplicem ac eius conuersam, his comprehendere non putemus, vt latius diximus decimatertia diffinitione huius.

Campanus autem sibi futuras has difficultates cernens, multitudine principiorum huic septimo (nescio si ab Euclide) præpositorum, ab his liberari conatur: præsentit enim difficile negotium, scilicet quandoque vnitatem non esse numerum, vt ex diffinitione secunda huius, & pluribus alijs locis. Quandoque verò esse, vt quoties eam inter numeros proportionales collocat, cùm de rationibus in genere agit, eò quod ibi multiplex contineatur, inter cæteras quæ secum ducit vnitatē. Quandoque insuper vnitatem non secari, vt 4 petitione & 15 diffinitione dicit simplicem numeri partem

tem vnitatem ac nullum posse infinitè secari numerum, quandoque verò eam secari, cum
tem ab illa denominatam, 5 communi sententia in partium denominationes distr buit
partem diffiniens non autem partes, huius discrete ab illa continua differentiam reliquit, ac c-
mitatis naturam a significata per eam quantitate non satis distare docuit (vt prima huius diffinitio-
ne diximus) & quamplura alii, quæ ideo principiorum superflua admodum multitudine imitare vo
luit, vt obscura quaque tollere conaretur, quod frustra videtur fecisse. Non enim prædixit qua ra-
tione numeros sibi sumpsit Euclides, vt confusam geometricarum magnitudinum propallaret habitu
dinem, non autem vt arithmeticam artem tantum edoceret, maius eterim ea exquirit opus. Quare
non indignum arbitratur Euclides, in demõstrandis futuris, horum trium librorum theorematis ar-
gumenta geometricis principiis prioribus sex libris edoctis fulciri, cum numeros ad quantitates geo
metricas illustrandas tantum sumpserit, non autem ad arithmeticam edocendam.

Aliud insuper monendum curabimus, cum susceperimus Eucl dem numeros in Geometriæ sub-
sidium, non in arithmetices eruditionem tantum acommodasse intelligendum est Euclidem hac vti
solertia, qua potissimũ pura Arithmetices doctrinæ theoremata interponit, his quæ geometricas ma-
gnitudines numeris designant, vt subsequentia quæque prælibatis edoceat. Quare cùm verus theo-
rematum excutiendus erit intellectus, illud maximè curandum est, an scilicet theoremata solas com
plectantur numerorum leges, ac eorum sequantur simplicem naturam, an vero numeris illis quanti-
tates significent, lineam scilicet planum aut solidum. Tum demum vbi proposita theoremata numero-
rum tantùm discretiones, nullæ dimentioni coaptatas proponent, sed tantum Arithmeticæ operatio-
ni, & iuxta pura arithmeticorum principiorum elemẽta Euclidem intellexisse arbitremur siquidem
theoremata numeris areas lineas, aut solida quandoque designent. Ea (iuxta Geometriæ naturam)
quantitatibus numeros adaptatos, pro significatis ab ipsis numeris quãtitatibus sumpsisse credamus.
Tunc igitur numerorum particularem relinquentes naturam, eorum discretiorem in quantitatis
per eos significata deuoluemus proprium cùm enim dixerimus (vnitatem diffinientes) numeros ex
se nullam quantitatem producere, sed plurium subiectorum discretioni adaptabiles esse quæ si quan-
titates fuerint, quælibet numeri vnitas naturam subiecti cui applicanda est, informat, vt si nume-
ris lineam significare velimus, quælibet vnitas longitudinem tantùm præ se fert. Si planum, longitu
dinem ac latitudinem, siquidem solidum, tres dimẽsiones eadem suscipiet vnitas, quæquidem dimen-
siones infinitè secari possunt, vnitas verò eas significans minimè secari potest, ab arithmeticis. Cum
igitur ab vnitate denotata quantitas secta fuerit, per numeros rursus quorum minima pars est vni-
tas, eadem quantitas referetur. Quare hi numeri respectum numerorum ad alios habẽtes numeros,
huius quantitatis (quæ antea vnitate significabatur) habitudinem, ad quãtitatem alio numero signi
ficatam, in rationem numerorum haberi edocent. Cum igitur sub generali alicuius theorematis tra-
ditione qua numeri dicuntur numeris comparari, vt linea plani vel equidem solidi explicent na-
turam, intelligemus simul & numeris vnitatem comparari sub numerorum nomine posse, non equi-
dem apud arithmeticos, qui vnitatem pro numero non sumunt, sed apud geometras, qui vnitate si-
gnificatam quantitatem infinitè secantes vnitatis denominationem in numeri denominationem con
uertunt, eandem quantitatem quam vnitas antea denotabat referentem. Quare eorum theorema-
tum sententias (licet ab arithmeticis tradita sint qui non infinitè, sed ad vnitatem vsque secant) in-
finitè secare quantitates existimemus, ac vnitate significatam quantitatem, inter quantitates nume-
ris significatas haberi, eo quòd ea distributa in numerum conuertatur eam significantem, vt exem-
plo, Sumatur, 20 proposit. octaui, quæ dicet similes planos esse eos, quorum vnus est medius proportio-
nalis. Ab hoc orietur primo aspectu difficile, nam inter septem & viginti octo medius datur 14 &
igitur similes plani erunt 7 & 28, & proinde 7 planus qui primus est, quod fieri non potest. nam ex
binis sese multiplicantibus, non fit (cùm nullus eum metiatur) sed sola vnitas ex diffinitione primi
numeri. Ad hac dicemus hoc theorema purum arithmeticum non esse, nam similitudo hæc plano-
rum, proportionem laterum areas continentium præ se fert, quòd ab arithmetica recedit, vt vidi-
mus vigesima secunda diffinitione huius & prima diffinitione sexti. Nam hoc theorema numeros
tantùm non concipit, sed ab eis significatas areas, atque ab eorum lateribus lineas, vt intelligat late-
ra sive lineas, vnitate ac septenario significatas, eandem concludere plani similitudinem, quam lineæ
binario & denario quarto significatæ, eò quòd ad numeros (vt arithmeticam subeant) reduci pos-
sunt, scilicet per multiplicationem qua sola vtitur Euclides. Si enim per eundem numerum scilicet 3
ducantur 1 & 7, fient 3 & 21 ac insuper 2 & 14 per eundem 3 fient 6 & 42. Reperiemus vnitate
denotatã lineã trifariam sectam, numero ternario denotari, qui quidem ad 21 eandem habẽs quam
6 ad 42 rationem, similem aream sub 3 & 21 area sub 6 & 42 contenta, cõcludit & eandem quam
concluserant, vnitas & septenarius ipsius septem primi numeri latera, quod hac lege ab arithmeticis

non rec[illegible] primus numerus planus esse non possit propter vnitatis [illegible]tem [illegible]lem, sed per multiplicationem in eiusdem rationis numeros reductis planos [illegible] suum lateribus, [illegible]periemus hoc theoremate semper extremos similes esse planos, non etenim ipsos numeros, sed semper a numeris denotatas superficies. Huius prolixam animaduersionem dare cogimur, ne qui numeros pro significatis quantitatibus quandoque sumptos, quandoque vero arithmeticis operationibus sumendos esse non præuidissent, disciplinas fœdatas esse opinentur. Et insuper vt hoc exemplo, plures aliæ Euclidis propositiores his tribus proximis libris appositæ (quæ quantitates præcipuè respiciunt) interpretandæ sunt. Quare Euclidem his tribus libris arithmetica principia, se traditurum non expectemus, sed præcipuè geometricarum quantitatum arithmeticis subsidiis discretarum affinitates, comparationes, ceu collationes, numeris significantibus expressas, posimodum autem arithmeticas operationes, seu in numeros (quantitates exprimentes) collatas actiones, per numeros arithmeticis præceptis vallatos se docturũ arbitremur. Vnde præcipuũ numerorum vsum in binas acceptiones his tribus libris Euclidem distribuisse dicemus, in actiuos scilicet, & passiuos numeros quorum differentias antequam ad demonstrationes vẽtum sit, explanare volumus, ne qui hæc numerorum præcepta arithmeticis tantùm legibus obnoxia esse existimarent, plures horũ trium librorũ demonstrationes sibiipsis pugnare arbitrarentur, ac proinde in earum veras intelligentias impingerent. modos quibus Euclides geometricis quantitatibus edocendis, numeros adoptauit ignorantes.

Actiui numeri sunt hi, qui arithmeticas operationes in numeros quantitatem significantes exercent.

Passiui autem sunt hi, qui quantitates significantes, vel quantitatum rationes suscipientes, per actiuorum numerorum operationem alterantur.

Vt confusas edoceat Geometria quantitates, numerorum obsequia in binas discernit Euclides (vt iam diximus) acceptiones quarum priorem actiuos suscipere dicemus numeros, qui sunt hi per quos arithmeticas operationes exequimur in numeros quantitatem significantes, vt his operationibus vnitate, ac numeris significatas quantitates (quæ suapte natura alias confusæ sunt) propalemus. Ac earundem affinitates occultæ numerorum opera clarius elucescant, vt exemplo discutiamus, qui numeri vt plurimum actiones, siue arithmeticas operationes exerceant. Multiplicantes siue producti multiplices numeri, nullam ex se quantitatem demonstrant geometricam tanquam multiplices, sed tantum multitudinem repetitionum, qua numerum passiuum multiplicatũ quantitatem significantem sibi sæpius sumunt. Partes insuper quæ discretionẽ abstractis à toto (quantitatem significante passiuo) præ se ferunt, quandoque sua multitudine totum excedentes, quandoque verò a toto deficientes pro negotij opera, & compositi quorum natura multiplex est, constãs ex duorum multiplicatione, huius autem præcipua operatio 7 noni patefiet, vt solidum quantitatem significantem producat. Præterea pares ac impares, qui significatam à parte vel vnitate quantitatẽ, iuxta numerorum discretiones distribuunt, cùm vnitatem suis operationibus secare non valeant. Primi vero numeri vnioe tantùm discretionis capaces, qui per vnitates diuisi, hãc solam patiuntur distributionem, nullam autem subdiuisionem, nam per insecabiles partes sunt diuisi. Minimi demum alicuius rationis numeri, qui quantitatum numeris significatarum affinitatem, tali terminorum exhibent discretione, quæ vltima existens posteriorem his terminis fieri non patitur (hac permanente affinitate) discretionem. Perfecti denique qui necessariis partibus coassumptis constantur.

Hi omnes necessariam suæ substantiæ diffinitionem, absque discretione siue multitudine patefacere non possunt, qua operationes arithmeticæ exercendæ sunt, in quantitates geometricas siue numeris distributas, siue insecta vnitate significatas, præfatorũ numerorum actiones (quæ in se operãtur) patientes. Quas quidem actiones ab his numeris innatam ac necessariam in se discretionem accipere videmus, nam cuiuslibet horum pura substantiæ diffinitio, discretionem eidem conferre cogitur. Quare hi omnes actiui, cùm discretionem præ se ferant, suis operationibus necessariam, numerorum particulari lege vallandi erunt, ac præceptis purè arithmeticis subiiciendi.

Quod secus in passiuis accidit, quantitates significantibus, hi namque ab Euclide suscepti sunt, vt quantitatem alterandam siue in incrementum, siue in decrementum actiuorum opera significent. Substantiæ etenim eorum diffinitio, nullã in se necessario discretionem requirit, sed tantùm alterandam actiuorum operatione quantitatem, ea de causa numeris expressam, quod agentibus numeris, numeri tantùm ceu eorũ vnitates correspõdeant, vt productas (numerorũ actione) passiuorũ alterationes indicent quorũ exempla veluti in actiuis proferemus. Primùm ab vnitate inchoãtes, cuius naturã integrã ac insolutam profert substantiam. Totum pariter nullam ex se denotat distributionem,

vt

vt totum dici possit, sed potius integritatem pars simulac substãtiam insec[illegible]us numerus non discretionem respicit, sed binas (instar rectanguli) dimensiones (longum scilicet & latum) numeris aut vnitate significatas, solidus verò ternas. Quadratus autem & cubus, laterum siue dimensionum æqualitatem, non discretionem intuẽtur. Proportionales affinitatum similitudinem, non autem discretionum numerũ, siue multitudinem conspiciunt. Multiplicandus tandem simplicem ac vere vnicã integram magnitudinẽ a numer s operantibus alterandam demonstrat. Quare licet per numeros hæ significentur quantitates, non ideo in se aliquid optant discretionis, sed tantùm numeris significantur, vt facilius numerorum actiuorum in se operantium suscipiãt actionem, ac in cognitum incrementum, seu decrementum, aut æqualitatem (passiuis numeris significatam) transferantur. Passiuos itaque numeros vnitatem recipere non ducemus absurdum, eo quòd vnitas quantitatem æquè vt illi significet, ac præcipuum eorum negotium non numeros, sed significatas quantitates aspectet actiuorum numerorum arithmeticis operationibus seu actionibus obnoxias, vnde orietur multiplicem rationem inter numerorum puras ac particulares rationes censeri nõ posse, cum ea sit ratio partis ad totum, siue simplicis ad multiplex, ac eius conuersa ratio multiplicis ad simplex. Nam alter terminorum huius rationis, semper integram ac irsolutam denotat quãtitatem, vt iam antea d x. mas. Ac insuper ea est tantùm ratio vnitatis, siue continui ad numerum, licet per binos quandoque exprimatur numeros, quorum alterius necessariò pars vnica (totum metiens veluti vnitas numerum reperietur non igitur discreti ad discretum erit ratio, sed discreti ad continuum, seu continui ad discretum. Reliquæ verò rationes qualibet (dempta multiplici & eius conuersa) puræ sunt arithmeticæ, quarum semper vterque terminus erit numerus, nusquam autem vnitas. Quæ de re eas rationes numerorum esse dicemus, eò quod alter harum rationum terminus, alterius sit partes, quod discretionem arithmeticam, necessario his rationibus confert. Si itaque his tribus numerorum libris de rationibus numerorum actiuorum loquatur Euclides, rationem multiplicem inter eas rationes comprehendi non patiemur (cum hæc sit continui ad discretum, illæ vero discretarum sunt rationes) quod si de numerorũ rationibus in genere discutiat, quaslibet rationes intelligi putabimus, æquè continui ad discretum, vt discreti ad discretum nam (vt frequentius diximus) Geometria multo genaralior euadit ipsa arithmetica qualibet enim numerorum rationes inter quantitates continuas reperiri possunt, continuorum verò qualibet inter numeros reperiri n immè fas est. Cùm igitur numerorum actiuorum (qui puri sunt arithmetici) rationem narrabit Euclides, non necessariò multiplicem his legibus arctari putabimus, sed inter numeros passiuos seu quantitatis denunciatores eam haberi credemus. Numeros itaque in binas acceptiones Euclidem exposuisse concludemus, in actiuos scilicet exequium alterandarum quantitatum adimplentes ac inpassiuos alterandas siue discernendas (actiuorum opera) quantitates denotantes quod si quandoque numeros actiuos pati, aut è contra passiuos agere videbimus, illud est animaduertendum, non tanquam quantitates numeris significatas agere passiuos credemus, sed eundem numerum quandoque actioni, quandoque verò passioni deputari posse non admirabimur, diuersis tamen respectibus. Nam simul & semel eũdem numerum actionem & passionem ferre posse negabimus, sed eundem nunc actiuum, nunc vero passiuum esse non vetari.

Si itaque alicuius theorematis hypothesis numeros arithmeticos, seu actiuos poposcerit, huius conclusioni rationem multiplicem aut vnitatem non subiici dicemus siquidem passiuos poscat eadem hypothesis his vnitatem ac perinde rationem multiplicem contineri fatebimur. Quod si de numeris in genere fiat theorema quoslibet subiiciemus, hac tamen solertia qua actiuos actiuis, & passiuos passiuis, dedicemus operibus.

NVMERORVM GEOMETRIÆ OBSEQVIO imploratorum alij sunt actiui, discreti seu Arithmeticarum operationum actores, alij verò passiui, continui, seu Geometricarum quantitatum significatores.

Arithmetici, seu actiui	Geometrici siue passiui
numeri,	numeri,
Multiplicantes	Vnitas
Multiplices	Totum
Partes	Pars
Compositi	Planus
Pares	Solidus
Impares	Quadratus
Primi	Cubus
Minimi	Proportionales
Perfecti,	Multiplicandus vel simplex.

Propositio prima.

Si duobus numeris expositis, sublato semper minore à maiori, reliquus minimè metiatur præcedentem quoad assumpta fuerit vnitas, qui à principio numeri primi adinuicem erunt.

Exponantur duo numeri A B *maior &* G D, *à maiore autem* A B *auferatur* G D *relinquens* Z B, *ab ipso autem* G D *tollatur* Z B *relinquens* I D *numerum. à* Z B *verò dematur* I D, *sicq; semper quoad supersit tantùm vnitas quæ sit* T B: *Dico nullum numerum ipsos* A B *&* G D *metiri, quòd si credatur aliquis eos metiri sit* E, *quoniam* E *metitur* A B *totum &* G D *ablatum, metitur idem* E, *reliquum* Z B (*per secundam communem sententiam huius*) *quia similiter idem* E *metitur totum* G D *& ablatũ* Z B *metietur & reliquum* I D (*per eandem*) *Et tandem cùm metiatur totum* Z B *& ablatum* I D *metietur idem* E *numerus reliquum, vnitatem scilicet* T B, *quod esset absurdum, cum maior sit* E *numerus vnitate. Nullus igitur numeros* A B, G D *numerus metietur, sed sola vnitas & proinde expositi primi erunt* (*per* 13 *diffinitionem huius*) *Si itaque duobus numeris, &c.*

Propositio secunda. *Problema* 1.

Duobus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Denturbini numeri A B G D *non adinuicem primi, à quibus auferatur minor à maiore, donec reliquus metiatur præcedentẽ, quod necessario reperietur, nam si ad vnitatem venirent, ipsi* (*per præcedentẽ*) *essent primi, quod esset contra hypothesim, non igitur ad vnitatẽ veniunt, sed ad numerum, qui sit* G Z *ablato quidem* G D, *ab ipso* A B (*qui sit* E B) *&* A E *ex* G D (*qui sit* Z D) *Dico maiorem reliquo* G Z *nullum vtrosque* A B *&* G D *metiri. si itaque aliquis fuerit, sit* H *numerus maior ipso* G Z *metiens datos* A B *&* G D, *quoniam* H *metitur totum* A B *& ablatum* G D, *metietur & reliquum* A E *quia verò metitur totum* G D *& ablatum* A E *metietur reliquum* G Z, *per secundam cõmunem sententiam huius. Igitur* H *maior, minorem* G Z *metietur, quod fieri non potest. non itaque maior ipso* G Z *alius dari potest, maximam igitur mensuram ipsorum* A B *&* G D *inuenimus.*

Coroll.

Corollarium.

Si numerus duos numeros metiatur, & maximam communē eorum mensuram metietur. *Nam si metiatur totum & ablatum, semper metietur & reliquum, qui tandem est maxima mensura duorum.*

Propositio tertia. *Problema 2.*

Tribus numeris datis non primis adinuicem, maximam eorum communem mensuram inuenire.

Tres sint dati numeri A B G *non adinuicem primi, quorum inuestiganda sit communis & maxima mensura, sumatur (per præcedentem) duorum* A *&* B *maxima mensura* D *quæ aut metietur reliquū* G *aut nō, siquidem tertium* G *metiatur numerus* D, *is erit trium maxima mensura, cùm per hypothesim sit maxima binorum* A *&* B, *sicq́; optatum consequimur. Si verò* D *non metiatur* G, *ostendamus* G *&* D *non esse primos adinuicem. Cum enim tres* A B G *ex hypothesi non sint primi, aliquis eos metietur, is itaque binos* A *&* B *metietur, & proinde (per corollarium præcedentis) idem metietur numerorū* A *&* B *maximam mensuram* D, *sed metitur &* G: *igitur* G *&* D *non sunt primi. Metiatur ergo eos* G *&* D, *per præcedentem, numerus* E *maxima mensura: Dico* E *maximam esse trium* A B *&* G *mensuram, quoniam enim* E *metitur* D *metietur ipsos* A *&* B, *per primam communem sententiam, est enim* D *ipsorum* A *&* B *pars, per hypothesim. Igitur* E *metitur tres* A B G, *& vt maximus metiens, si enim maior alius credatur, sit* Z. *cùm* Z *metiatur* A *&* B, *metietur &* D *maximam eorum mensuram, per coroll. præceden. sed metitur &* G *ex hypothesi, itaque* Z *metitur binos* G *&* D, *& igitur maximam eorum metietur mensuram* E, *maior quidem minorem, quod est absurdum: nullus igitur maior ipso* E, *tres* A B G *metietur numeros. Tribus igitur datis non primis adinuicem numeris* A B G, *maximam eorum communem mensuram* E *inuenimus.*

A	18
B	12
G	8
D	6
E	2
Z	3

Corollarium.

Si numerus quotuis metiatur numeros, & maximam eorum communem metietur mensuram. *Metitur enim maximam duorum, & tandem maximam maximæ & tertij, scilicet ipsorum* G *&* D *quæ est* E *maxima quidem trium, & insuper simili argumento plurium numerorum communis reperietur mensura, inuenta enim mensura trium, reperietur mensura quarti, & maximæ mensuræ trium, &c.*

Propositio quarta.

Omnis numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.

Sint duo numeri A *&* B, *quorum minor sit* B: *Dico* B *partem esse maioris* A *aut partes, sunt enim* A *&* B *primi aut compositi. Si primi vnitates minoris sunt maioris partes, cùm vnitates sint omnis numeri partes. Si verò compositi sint* A *&* B, *aut* B *metitur* A *aut non. Si metiatur, pars erit,* B *maioris* A. *Siquidem non metiatur* B *numerum* A. *Detur per secundam huius, maximus eos metiens (cùm sint compositi) sicq́;* D. *Quia* D *vtrosque* A *&* B *metitur. Quot igitur sunt numeri* D *in* B, *totidem efficiet partes totus* B *maioris* A. *Minor igitur* B *maioris* A *partes erit. Omnis itaque numerus minor, omnis numeri maioris, aut pars est, aut partes.*

MONITVM.

Idem ait Euclides ac si dixisset, Omnis minor numerus ad maiorem, habet aut rationem quantitatis continuæ ad discretam, aut discretæ ad discretam quantitatem: omnis enim partis ad numerum ratio, in rationem vnitatis ad numerum cadit. Reliqua verò ratio partium ad numerum, cadit semper in rationes numeri ad numerum, non autem vnitatis ad numerū. Præsentiendum est tamen inter quosuis numeros non cadere veram & simplicem numerorum (hoc est, discretarum quantita-

[illegible] inter eas duntaxat, quorum minor partes est maioris. Nam int[illegible], quorum scilicet minor est maioris pars, non cadit omnis numeri ad numerum ratio, siue discreti ad discretam quantitatem, sed sola vnitatis ad numerum (hac est continua ad discretam) vt exemplo, ratio 4 ad 12 non est simplex numerorum ratio, eo quod reducatur ad rationem, vnitatis ad numerum 3, & sit eadem ratio vero 4 ad 14 & reliquæ partium ad totum, sunt tantum inter numeros, nec vsquam cadere possunt, in rationem vnitatis ad numerum, sed semper inter discretas quantitates comperiuntur, eo quod sint rationes partium ad totum, reliquæ vero partis ad totum licet numeris quandoque exprimantur, tamen semper reducentur ad rationem vnitatis ad numerum aliquem, siue continui ad discretum ceu illis peculiaris.

Propositio 5.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & vterque vtriusque eidem pars erit, quæ vnus vnius.

Idem in continuis ostendit prima quinti, quod hæc in discretis cum sequente. Sit numerus A numeri B ea pars, quotta numerus D est alterius G: Dico vtrumque A & D eandem esse partem vtriusque B & G, quæ est A vnius B. Cum autem A eadem sit pars ipsius B quota D ipsius G, quot numeri A sunt in B, tot numeri D sunt in G. Quot itaque numeri A sunt in B, totidem numeri A & D sunt in B & G. Si igitur numerus A ea pars fuerit numeri B, & D alterius G, vterque A & D eadem pars erit numerorum B & G quæ fuit A vnius B. Si itaque numerus, &c.

Propositio sexta.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vterque vtriusque eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

Si numerus A fuerit eæ partes numeri B quotæ G est alterius D. Dico vtrumque A & G vtriusque B & D easdem esse partes, quæ A totius B. Quoniam eædem sunt partes A ipsius B quæ G numeri D, singularum ipsius A in B æqualis erit multitudo multitudini singularum G in D. Quæ igitur pars est vna partium numeri, A ipsius B, ea pars erit vtraque ex A & G sumpta, vtriusq. B & D, per præcedentem similiter & reliqui ex A & G sumptæ cum sint prioribus æquales. Vterque igitur A G ipsorum B D eædem partes erit, quæ vnus A fuit vnius B. Si itaque numerus numeri partes fuerit, & alter alterius, &c.

Propositio septima.

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati, & reliquus reliqui pars erit, qualis totus totius.

Sit A B numerus, numeri G D ea pars, qualis ablatus A E ablati G Z. Dico reliquum E B reliqui Z D partem esse, qualis est totus A B totius G D. Qualis est A B numeri G D vel A E ipsius G Z, talis esto E B alicuius I G. Si igitur A E ipsius G Z pars fuerit qualis E B numeri G I, totus A B totius Z I ea pars erit quæ vnus A E vnius G Z, per quintam huius. Sed qualis est A E ablati G Z, talis est per (hypothesim) A B ipsius G D. Qualis itaque A B est ipsius G D, talis erit eadem A B numeri Z I. æquales erunt igitur G D & Z I numeri communis autem tollatur G Z, reliquus Z D reliquo G I æquus erit. Qualis itaque pars est E B positi I G, talis erit idem E B ipsius Z D. Sed qualis est A B totius G D, talis positus est E B ipsius G I. Qualis igitur pars erit A B totus totius G D, talis erit E B reliquus reliqui Z D. Si itaque numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati, &c.

Proposi.

Propositio octaua.

Si numerus numeri partes fuerit, quæ ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.

Esto numerus A B *numeri* G D *partes quæ ablatus* A E *ablati* G Z. *Dico reliquum* E B *reliqui* Z D *easdem esse partes quæ totus* A B *totius* G D *numeri. Ponatur* E B *eædem partes numeri* G I *quæ ab ipsius* G D *vel* A E *numeri* G Z. *Si autem* E B *numeri* G I *partes fuerit quæ* A E *ipsius* G Z, *& vterque* A E, E B *vtriusque* G Z, G I (*hoc est, totus* A B *totius* Z I) *eædem partes erit, quæ vnius* A E *vnius* G Z, *per sextam huius, sed quales sunt* A E *ipsius* G Z *tales sunt* A B *numeri* G D, *per hypothesim. Quales igitur sunt* A B *numeri* Z I, *tales sunt idem* A B *ipsius* G D. *Æquales igitur sunt* Z I *&* G D *numeri. Communis auferatur* G Z *reliqui* G I *&* Z D *æquales erunt. Quales igitur partes est* E B *numeri* G I, *tales erit idem* E B *ipsius* Z D, *sed quales* E B *ipsius* G I *tales positus est* A B *ipsius* G D. *Quales itaque reliquus* E B *reliqui* Z D, *tales erit totus* A B *totius* G D. *Si itaque numerus numeri partes fuerit, &c.*

Propositio nona.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & vicissim qualis pars vel partes erit primus tertij, eadem pars erit, vel partes, secundus quarti.

Sit numerus A *numeri* B G *ea pars quæ* D *ipsius* E Z: *Dico vicissim eam partem vel partes esse* A *primum numeri* D *tertij, quam* B G *secundum ipsius* E Z *quarti. Secetur* B G *in numeros æquales ipsi* A *qui sint* B I, I G. *Similiter numerus* E Z *in numeros æquales ipsi* D (*cùm sint eorum partes*) *qui sint* E T, T Z. *Quoniam ea pars est* A *numeri* B G *quæ* D *ipsius* E Z, *æqua erit multitudo* A *in* B G *quæ* D *in* E Z, *scilicet* B I, I G *&* E T, T Z. *Cæterum cùm* B I, I G *sint æquales ac* E T, T Z *æquales, singuli* B I *&* I G *singulorum* E T *vel* T Z *eadem pars vel partes erunt. Si autem numerus* B I *numeri* E T *& alter* I G *alterius* T Z *eadem pars vel partes fuerit, & vterque (totus scilicet* B G) *vtriusque (totius* E Z) *eadem pars erit, quæ vnus* B I *vnius* E T, *per quintam & sextam huius. Atqui numerus* B I *ipsius* E T *eadem pars vel partes est, quæ* A *numeri* D, *cùm* A *&* D *sint ipsis* B I, E T *æquales. Qualis itaque pars vel partes est* A *tertij* D, *ea pars vel partes erit* B G *secundus numeri* E Z *quarti. Si igitur numerus numeri pars fuerit, & alter, &c.*

Propositio decima.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vicissim, quæ partes est primus tertij, vel pars eædem partes erit, & secundus quarti, vel eadem pars.

Sit numerus A B *numeri* G *eædem partes, quæ* D E *numeri* Z. *Dico vicissim primum* A B *easdem esse partes tertij* D E *& secundum* G *quarti* Z, *vel eandem partem. Sint in* A B *partes ipsius* G *hæ* A I, I B. *In* D E *verò partes numeri* Z *sint totidem* D T, T E: *sunt enim eædem partes. Quia quæ pars est* A I *secundi* G, *ea pars est* D T *quarti* Z. *Erit* A I *primus tertij* D T *eadem pars vel partes, quæ secundus* G *quarti* Z (*per nonam huius*) *sed cum* A I *ipsi* I B *&* D T *ipsi* T E *sint æquales, qualis est* A I *ipsius* D T *talis est* I B *ipsius* T E. *Quæ itaque pars vel partes est, vtraque* A I, I B *vtriusque* D T, T E *eadem pars vel partes erit, vna* A I *vnius* D T (*per quintam & sextam huius.*) *Et proinde quæ* G *quarti* Z (*cum ostensa sit eadem esse* A I *ipsius* D T *quæ* G *ipsius* Z) *si igitur numerus* A B *numeri* G

partes fuerit, & alter D E alterius Z eadem partes, & vicißim qua partes est primus A B terty D E vel pars, eadem partes erit secundus G quarti Z vel eadem pars.

MONITVM.

Hæc cum præfata æquè de partibus totum superantibus vt de parte & partibus toto minoribus intelligitur, vt exemplo, si numerus A numeri B fuerit pars vel partes, quæ numerus C numeri D, Erit vicißim primus A eadem pars vel partes terty C, quæ secundus B quarti D scilicet quatuor tertiæ, tanta namque adhiberi potest partium copia, quæ totum excedet, nempe quatuor quartæ tres quartas excedunt.

A
B
C
D

Propositio vndecima.

Si fuerit ſicut totus ad totum ſic ablatus ad ablatum & reliquus ad reliquum erit ſicut totus ad totum.

Esto totus numerus A B ad totum G D sic ablatus A E ad ablatum G Z: Dico esse reliquum E B ad reliquum Z D sicut fuit totus A B ad totum G D. Quoniam numeri proportionales sunt A B ad G D vt A E ad G Z, per hypothesim. Primus igitur A B secundi G D vt tertius A E quarti G Z æquè est multiplex siue eadem pars vel partes fuerint, per 21 diffinitionem huius. Sed si A B totius G D pars vel partes fuerit, quæ A E ablatus G Z ablati, & reliquus E B reliqui Z D eadem pars vel partes erit, qua totus A B totius G D per 7 & 8 huius. Numerus igitur A B primus ad secundum G D erit vt tertius B E reliquus, ad quartum Z D reliquum, per eandem diffinitionem. Si igitur fuerit sicut totus ad totum sic ablatus ad ablatum, &c.

D 5
E

Propositio duodecima.

Si fuerint quotcunque numeri proportionales, erit ſicut vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ſic omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

Sit numerus A ad numerum B, sic G ad D: Dico sicut vnam antecedẽtium A ad vnum consequentium B, vel G ad D, sic esse omnes antecedentes A & G ad omnes consequentes B & D. quoniam proportionales sunt (per hypothesim) A ad B, vt G ad D, quotuplex est A numeri B tam multiplex est G ipsius D, vel eadem pars vel partes (per 21 diffinitionẽ huius) Et ideo primus A terty G eadem erit pars vel partes, vt secundus B quarti D (per 9 & 10 huius.) Vterque igitur A & G, vtriusque B & D, eadem pars erit vel partes, per quintam & sextam huius, quæ vnus A vnius B. Et igitur (per 21 diffinitionem huius) proportionales erunt omnes, scilicet A & G ad omnes B & D, sicut vnus A ad vnum B. Si itaque fuerint quotcunque numeri proportionales, erit sicut vnus, &c.

9 A
6 B
x G
2 D

MONITVM.

Huius theorematis figura quam ab antiquis exemplaribus sumpsit Theon, perspicuè sequitur multiplicium legem à nobis expositam, scilicet augmenti ac decrementi. cùm autem existimet Theon partem aut partes multiplicis esse relatiuas, similiter & Campanus, satis tamen impropriè, cum ad totum solum referãtur Nihilominus A maiorem B minoris, partem vel partes in demonstrando theoremate dixit, similiter vt G maiorem ipsius D minoris: quare fateri cogẽtur eorum relatiuos scilicet B & D, quæquidem ad ipsos A & G eandem habẽt rationem, eorum multiplices dici, licet minores. Multiplicatione igitur decrementi, dicemus B & D numerorum A & G esse æquè multiplices, scilicet $\frac{2}{3}$ duorum tertiorum denominatione multiplicationis expressos, hac & 3 præcedentes sequuntur 21 diffinitionem huius, quoslibet scilicet æquemultiplices ad simplices (siue pars siue partes fuerint illi multiplices) eandẽ habere rationem, & ideo proportionales vocari & proinde duarũ magnitudinũ discretarum rationem, sola multiplicationis (qua antecedens est consequentis multiplex) quantitate exprimi posse, vt diximus sæpiuscule. Idem sequeretur in continuis, si illa multiplicationẽ reciperent, quare rationum lex quippe eadem inter eas erit, sed non expressa, cum absque discretione, rationis denominatio fieri non poßit, apud continuas ac confusas geometriæ magnitudines. Veluti fit circa eas qua

numeris

numeris ac arithmeticis discretionibus elucidantur. Idcirco videmus partes aquè sumi totum excedentes, vt a toto deficiētes, hoc veluti Theonis exemplo, partem verè semper toto minorem, haud secus quàm simplex actio multiplicè minor existit.

Propositio decimatertia

Si quatuor numeri proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

4 B 12 A
3 D 9 G

Sint quatuor numeri A *ad* B, *vt* G *ad* D *proportionales: Dico eos vicissim* A *ad* G, *vt* B *ad* D *proportionales esse, quoniam proportionales sunt* A *ad* B, *vt* G *ad* D, *aquemultiplex erit* A *minoris* B, *vt* G *ipsius* D, *siue eadē pars vel partes fuerint, per* 21 *diffinitionem huius. Si autem* A *ipsius* B *pars fuerit, & alter* G, *alterius* D *eadem pars vel partes, & vicissim (per 9 & 10 huius) qualis pars vel partes est* A *primus* G *tertij, eadem pars vel partes erit secūdus* B *quarti* D. *Et proinde (per* 21 *diffinitionem huius) proportionales erunt* A *ad* G, *vt* B *ad* D. *Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt, &c.*

Propositio decimaquarta.

Si fuerint quotcūque numeri, & alij eisdem æquales numero, bini sumpti in eadem ratione, & æqua ratione proportionales erunt.

8 D 12 A
6 E 9 B
4 Z 6 G

Sint quotcunque numeri A B G, *& alij* D E Z *ipsis æquales numero, qui quidem sint bini in eadem ratione* A *scilicet ad* B, *vt* D *ad* E, *&* B *ad* G, *vt* E *ad* Z: *Dico eos æqua ratione (id est subtractis medijs) proportionales esse,* A *ad* G, *vt* D *ad* Z, *quoniam (per hypothesim) proportionales sunt, qualis est* A *ipsius* B, *talis est* D *numeri* E, *cùm sint in eadem ratione. Et vicissim qualis est* A *numeri* D, *talis erit (per nonam & decimam huius)* B *ipsius* E. *Cæterum cùm sint (per hipothesim)* B *ad* G, *vt* E *ad* Z: *qualis erit* B *numeri* G *talis erit* E *ipsius* Z, *per* 21 *diffinitionē. Vicissim itaque qualis erit* B *numeri* E, *talis erit* G *ipsius* Z, *per eandem 9 & 10 huius. Sed qualis fuit* B *ipsius* E, *talis fuit* A *numeri* D *ostensus. qualis itaque est* A *numeri* D *talis est* G *ipsius* Z. *Et vicissim igitur qualis est* A *ipsius* G, *talis est* D *numeri* Z. *Et proinde (per vigesimam primam diffinitionem huius)* A *ad* G, *erunt vt* D *ad* Z, *æqua ratione proportionales. Si igitur fuerint quotcunque numeri, &c.*

MONITVM

Iam antea sæpius diximus quascunque discretarum magnitudinum rationes, inter continuas cadere posse, non autem è conuerso, quasuis scilicet continuarum rationes, inter discretas cadere. Quare Euclides his prioribus theorematis eas rationes quas inter discretas quantitates oriri depromit, à multiplicatione, qua antecedēs sumit consequens, deduci iubet. Nam 21 *diffinitione, numeros proportionales æquè multiplices esse dixit. Quarto verò theoremate & sex illud sequentibus, idem inter similes partes quod & inter similes rationes accidere profert. Vndecimo autem & tribus sequentibus, numerorū inter se rationum, à partium similitudine (per* 21 *diffinitionem) nasci exponit: quæ quidem partes similes ab æqua multiplicationis denominatione producta, numerorum proportionem producunt, licet per augmentum multiplicatæ maius multiplex, vel per decrementum minus multiplex (quod partes vocant) educant: quare affinitas illa quæ ratio inter magnitudines dicitur, nihil aliud erit, quàm ea multiplicationis denominatio, qua antecedens multoties sumit consequentis augmentum vel decrementum. Id equidem voluit numeris exponere Euclides, cùm per continuas discernere non potuerit quantitates, eò quòd continua vel geometricæ multiplicationem, velut discreta & arithmeticæ non suscipiunt.*

Propositio decimaquinta.

Si vnitas aliquem numerum metiatur, pariter autem alter numerus alium metiatur, & vicissim pariter vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

Metiatur vnitas A aliquem numerum B G, pariter autem alter numerus D metiatur alium E Z: Dico vnitatem A metiri vicißim tertium D pariter vt secundus B G metitur quartum E Z, quoniam vnitas aquè metitur B G, vt numerus D ipsum E Z. Quot sunt in B G vnitates, tot erunt in E Z numeri, ipsi D aquales, scilicet in B G erunt B I, I T, T G, in E Z verò E K, K L, L Z. Sicut igitur vnitas A metitur D numerum, sic singula partes ipsius B G, ipsi A aquales, singulas ipsius E Z (ipsi D aquales) metiuntur, vtraeque igitur secundi B G vtrasque quarti E Z similiter metiuntur, vt singulae singulas (per quintam huius) sed vt singulae singulas metiuntur, sic ostensa est vnitas A metiri numerum D. Vnitas igitur tertium D pariter metitur numerum, vt secundus B G quartum E Z. Si vnitas igitur aliquem, &c.

MONITVM.

Idem hoc theoremate concludit Euclides in numeris paßiuis, quod 9 & 13 huius praemisit in actiuis, seu arithmeticis numeris, vt ostendat quosuis numeros, siue actiuos discretos, siue paßiuos cõtinuos, aut qui semper ad vnitatem reducuntur proportionales, proportionis vicißitudinem producere: quia verò idem esse existimat Euclides, pariter metiri, vel eandem esse partem, aequè multiplicem esse, & eandem rationem habere, tria theoremata idem ex his tribus assumptis referentia proposuit, scilicet 5 huius primam quinti, & 12 huius, quaquidem binas illas decrementi vel augmenti aequas multiplicationes, rationum similitudinem irrefragabili methodo generare cogunt.

Propositio decimasexta.

Si duo numeri multiplicantes se inuicem fecerint aliquos, geniti ex eis ad inuicem aequales erunt.

Exponantur duo numeri A & B se inuicem multiplicantes, scilicet A multiplicans B efficiat G & B multiplicãs A efficiat D. Dico G & D genitos aequales esse. Sumatur vnitas E, cùm enim A repetens B per suas vnitates producat G, sequetur numerum B metiri ipsum G per vnitates ipsius A, ac per easdem vnitates E metiri eũdem A. Qualis itaque pars est E numeri A, talis est B numeri G, & vicißim, per praefatam, qualis est pars E numeri B, talis est A ipsius G. Rursus quoniam B multiplicans A producit D, sequetur A metiri D per vnitates numeri B, & per easdem E vnitas metitur eundem B. Qualis itaque pars est E ipsius B talis est A pars numeri D: sed qualis est E numeri B, talis ostensa est esse A ipsius G. Qualis igitur est pars A ipsius G, talis est idem A pars numeri D aequales itaque sunt G & D adinuicem. Si igitur duo numeri multiplicantes, &c.

Propositio decimaseptima.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos, geniti ex eis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

Multiplicet numerus A duos numeros B & G, & producat duos D & E, Dico D ad E sic esse vt B ad G. esto vnitas Z, quoniam A multiplicans B ipsum D facit. Igitur B metitur D per vnitates numeri A, & per easdem Z metitur ipsum A. quae itaque pars Z ipsius A talis est B numeri D. Eodem argumento A multiplicans G ipsum E efficit, quare G metitur E per vnitates ipsius A & Z, metitur numerum A per easdem vnitates. Qualis itaque pars est Z numeri A, talis est G ipsius E, sed qualis Z fuit numeri A, talis fuit B ipsius D. Qualis igitur B erit ipsius D, talis erit G numeri E, & vicißim per nonam huius, qualis erit B ipsius G, talis erit D ipsius E, sicut igitur B ad G sic erit (per 21 diffinitionem huius) D ad E. Si itaque numerus duos numeros, &c.

Corollarium.

Si duo numeri duos eandem eis habentes rationem, conuersim multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis aequales adinuicem erunt.

Sint duo numeri A & B, insuper duo C & D, eandem ipsis A ad B rationem habentes, quos mutuè multiplicent, hoc est, A multiplicans D faciat F, & B multiplicans C faciat E. Dico genitos E & F æquales esse, multiplicent se inuicem A & B, hac via ut A multiplicans B faciat G, necnon B multiplicans A faciat H, erunt ideo G & H æquales ex 16 huius. Rursus quia A multiplicans binos B & D duos fecit G & F, erunt G ad F ut B ad D ex hoc theoremate haud secus quoniam B multiplicans binos A & C, duos fecit H & E. erunt ex eodem H ad E, ut A ad C. Est autem A ad C ut B ad D, ex 13 huius: fuit autem similis ratio numeri A ad C, quæ H ad E similisque numeri B ad D quæ G ad F. Erit igitur H ad E ut G ad F, ac vicißim H ad G ut E ad F, per 13 huius. Fuerunt autem G & H æquales. Erunt igitur E & F æquales, eandem ipsis H ad G rationem habentes. Si itaque duo numeri duos, &c.

Propositio decimaoctaua.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex eis eandem habebunt rationem quam multiplicantes.

Duo numeri A & B multiplicent numerum G, & producant D & E. Dico D ad E sic esse ut A ad B quoniã A & B ipsum G multiplicãtes idem producunt, quod producet G duos A & B multiplicans (per 16 huius) ipsos quidem D & E. si itaque G duos A & B multiplicans ipsos fecerit D & E, eandem rationem habebũt quam A ad B multiplicati (per 17 huius) & igitur quam ipsi iidem A & B multiplicantes. Si itaque duo numeri numerum, &c.

Propositio decimanona.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo & quarto fit, æqualis est ei qui ex secundo & tertio: Et si qui ex primo & quarto fit, æqualis fuerit ei, qui ex secundo & tertio, ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

Sint quatuor proportionales numeri A ad B ut G ad D, ex primo autem & quarto A & D fiat E: ex secundo vero & tertio B & G fiat Z. Dico E & Z æquales esse. Multiplicãs A numerum G faciat I. Et quoniam idem A multiplicans D fecit E, erit (per 17 huius) G ad D ut I ad E: sed fuit A ad B ut G ad D, ex hypothesi, erit igitur A ad B ut I ad E. Rursus cum A multiplicãs G fecerit I, at B eundem G multiplicans fecerit Z: erunt (per 18 huius) A ad B, sicut I ad Z, sed fuit A ad B sicut I ad E, sicut itaque I ad Z, sic erit I ad E ipsi itaque E & Z sunt æquales, per 9 quinti. Ad secundam autem partem supponamus E & Z æquales esse: Dico quatuor A ad B ut G ad D esse proportionales, eisdem dispositis, quoniam A ipsos G & D multiplicans facit I & E erit (ex 17 huius) G ad D, sicut I ad E. Quoniam autem æquales ponuntur Z & E, erit (per septimam quinti) G ad D sicut I ad Z sed cùm A & B multiplicantes G fecerint I & Z, erit (per 18 huius) A ad B ut I ad Z, sed fuit G ad D ut I ad Z erunt igitur sicut A ad B sic G ad D, proportionales. Si itaque quatuor numeri proportionales fuerint, &c.

Propositio vigesima.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis æqualis est ei qui à medio, & si qui sub extremis æqualis fuerit ei qui à medio, ipsi tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri A B G *proportionales* A *ad* B *vt* B *ad* G. *Dico sub extremis* A *&* G *cõprehensum æquũ esse ei, qui a medio* B *fit, ponatur medio* B *æqualis* D *erit igitur* D *ad* G *vt* B *ad* G (*per 7 quinti*) *& proinde* A *ad* B *vt* D *ad* G. *Qui itaque sub* A *&* G *extremis, æquus est ei, qui sub* B *&* D *medÿs, per precedẽtem atqui sub* B *&* D *æquus est ei qui ex* B, *cùm sint* B *&* D *æquales: qui igitur sub extremis* A *&* G *æquus erit ei, qui a medio* B. *Ad secundum autem, supponamus* (*eisdem dispositis*) *eum qui sub extremis* A *&* G *æquum esse, ei qui à medio* B: *Dico ipsos* A *ad* B *vt* B *ad* G, *esse proportionales. Si qui sub* A *&* G *æquetur ei qui ex* B *fit, æquabitur & ei qui sub* B *&* D *æqualibus, erit itaque* (*per secundam partem præcedentis*) *sicut* A *ad* B, *sic* D *ad* G *sed sicut* D *ad* G, *sic est* (*per septimam quinti*) B *ad idem* G *sicut igitur* A *ad* B, *sic erit* B *ad* G. *Si igitur tres numeri proportionales, &c.*

Propositio vigesimaprima.

Minimi numeri eandem rationem habentium eis, metiuntur eandem rationem habentes æqualiter, antecedens antecedentem, & consequens consequentem.

Sint minimi numeri G D *&* E Z *in data numerorum* A *ad* B *ratione. Dico* G D *metiri numerum* A *æque vt* E Z *numerum* B. *Cùm ex hypothesi sint proportionales* G D *ad* E Z *vt* A *ad* B. *Ipsi* G D *ad* E Z *minores, sunt maiorum* A *&* B *pars aut partes, per 4 huius & eadem, per 21 diffinitionem huius. Sed non sunt eadem partes. nam si* G D *&* E Z *secarentur in easdem partes, scilicet* G D *in* G I, I D, *&* E Z *in* E T, T Z, *eorum rursus partes,* G I *ad* E T *eandem rationem haberent quam* G D *ad* E Z, *per 15 quinti. Non itaque essent minimi huius rationis* G D *ad* E Z *Nimirum minores essent eorum partes* G I *ad* E T. *Sunt itaque* G D *&* E Z, *per 4 huius, ipsorum* A *&* B *pars. Quare, per tertiam diffinitionem huius, metiuntur numeros* A *ac* B. *Et æqualiter* G D *antecedens ipsum* A *consequens, vt* E Z *ipsum* B, *per 21 diffinitionem huius, cùm sint proportionales, ex hypothesi. Minimi itaque numeri eandem rationem habentium eis, metiuntur, &c.*

MONITVM.

Huius theorematis demonstratio per numeros fieri non potest in ratione multiplici, quæ semper vnitatem in minimis partibus eius producit. Quare prosequitur Euclides quod diximus super 13 diffinitione huius, & monito post principia huius apposito, scilicet numeros multiplicem habentes rationem, non posse in minimos huius rationis numeros cadere, licet aliàs quasuis proportionalium leges generales subeant, non tamen minimi datæ rationis numeri, nec inter se primi aliquando dici possunt. Ait enim Euclides minimos semper metiri maiores eandem rationem habentes, tamen hoc exemplo videmus A *&* B *minimos numeros esse triplicis rationis, qui tamen non metiuntur maiores scilicet* G *&* D, *sed sunt eorum partes, cõtra id quod demonstratum est. Hoc argumentum soluitur per ea quæ iam diximus, hoc quidem exemplum in ratione multiplici propositum esse, cuius nusquam minimæ partes numeri esse possunt, cùm non sit pura numerorum ratio. Quare licet* A *&* B *sint minimi huius rationis numeri, non tamẽ sunt minima numerorum partes in his multiplicibus rationibus velut in reliquis, quæ minimas numerorum partes in data ratione numeris depromunt. Multiplices verò vnitate & numero minimas suæ rationis partes exhibent, non autem numeris, eò quòd ratio multiplex non sit pura arithmeticorum numerorum siue discretarum tantùm quantitatum, sed cadit inter continuam & discretam quantitates, ac eius conuersa. Reliqua vero tantùm inter discretas, per rationis denominationem, sectas quantitates non igitur in ratione multiplici minimos haberi numeros dicemus, sed tantùm in rationibus numerorum. Cæterum huius theorematis aliquas voces transtulimus, scilicet antecedentes & consequentes. Nam vera quantitatum proportionalium relatio, non à magnitudine dependet, sed à situ. Siquidem antecedens alium metitur antecedentem, non eò quod sit maior vel minor quãtitas, sed tantum eo quod similem sibi in proportione habeat situm. Idem de cõsequentibus. Campanus verò id insequi voluit cum dixit Quisque suum correlarium* (*pro relatiuo*) *secundo exemplo.*

Proposi-

Propositio vigesimasecunda.

Si fuerint tres numeri & alij eisdem æquales numero, bini sumpti in eadem ratione, fuerit autem eorum perturbata proportio, & æqua ratione proportionales erunt.

Sint tres numeri A B G *& alij tres* D E Z *bini sumpti in eadem ratione, ordine verò perturbato, scilicet* A *ad* B *sicut* E *ad* Z, *sicut vero* B *consequens ad rem aliam* G, *sic sit res alia* D *ad* E *antecedens. Dico æqua ratione esse* A *ad* G *vt* D *ad* Z. *Quoniam est* A *ad* B *sicut* E *ad* Z *qui sub* A *&* Z *æquus est ei qui sub* B *&* E *per 19 huius. Quia verò est vt* B *ad* G *sic (per hypothesim)* D *ad* E, *qui sub* G *&* D *æquus erit, ei qui sub* B *&* E, *per eandem 19 huius. Qui igitur sub* G D *æquus erit ei qui sub* A *&* Z, *per primam communem sententiam. Erit igitur (per secundam partem decimæ nonæ huius)* A *ad* G *sicut* D *ad* Z. *Si fuerint igitur tres numeri, & alij eisdem æquales numero, bini, &c.*



Propositio vigesimatertia.

Primi adinuicem numeri, minimi sunt eandem rationem habentiũ eis.

Sint primi A *&* B *numeri: Dico eos esse minimos suæ rationis, quòd si non sint, dētur (si fas sit) minores in eadem ratione qui sint* G *&* D, *quoniã* G *&* D *sunt minimi ipsi metiuntur ipsos* A *&* B *eandem rationem habentes æqualiter, scilicet* G *antecedens* A, *&* D *consequens reliquum* B *per 21 huius. Sequetur itaque* G *metiri* A *per tot vnitates, per quot* D *metitur ipsum* B, *sint illæ vnitates* E. *cùm autem* G *&* D *metiantur* A *&* B *per vnitates* E, *metietur* E *ipsos* A *&* B *per vnitates ipsorum* G *&* D *(per 16 huius) Nam* E *per* G *idem efficit quod* G *per* E. *Nō igitur erunt* A *&* B *primi, cùm ipsos metiatur idem* E *numerus, contra hypothesim, quod fieri non potest. ipsis itaque* A *&* B *primis non possunt dari minores in eadem ratione. Primi igitur numeri, &c.*

MONITVM.

Idem testatur Euclides hoc theoremate quod vigesimoprimo huius monuimus, scilicet rationem multiplicem, nec primos subire nec minimos suæ rationis numeros, quod si in multiplicibus primi adinuicem dicerentur minimi, falsum esset (cum semper minor vtrosque metiatur) in quauis ratione multiplici simpliciter vt 2 & 6. Si vero credamus minores numeros in hac ratione dari 1 & 3, vnitatem pro numero (discretionem, non autem quantitatem significante) sumentes, contra secundã huius diffinitionem, in fœdiorem laberemur maculam, vnitas autem non est vnitatum multitudo. Multiplex igitur ratio primos nusquam suscipit numeros, cum vnus eorũ semper alium metiatur. Præterea grauiores apparerēt lapsus si huic indulgeremus culpæ, posthac scilicet 31 huius, cùm enim vnitas seipsam sola metiatur, si ea inter numeros quosuis ponatur, dicetur esse primus, sed omnis primus ad omnes tantum quos non metitur (per 31 huius) primus erit, igitur vnitas ad nullũ primus erit (cùm ea omnes metiatur.) Ratio itaque multiplex vnitatē semper in minimis recipiens, primos non suscipiet numeros, nec vnitas inter numeros collocabitur, vt diximus, insuper fœdarētur multa subsequentia theoremata, scilicet 25, 27, 28, 29, 30, 31 huius 11, 15, 16, 17, noni. Nam omnes numeros metiens vnitas ad eosdem primus esset. Præterea 20 octaui reperiretur vnitas primus simul & planus numerus quod excedit possibile, nisi per nostram distinctionem numerorum quorum alij quantitati, alij verò operationi destinati sunt, vt prima huius diffinitione diximus, & proinde vniuersa numerorum traditio eousque fluctuaret, vt demum præ confusione demergeretur. quare vnitatem non esse operantem numerum, & idcirco rationes multiplices (in minimis partibus vnitatem semper recipientes) nec minimos nec quidem primos suscipere suæ rationis numeros intelligamus, cùm ea non sit discretorum pura ratio, sed continui ad discretum, & inter eos recipi tantũ quæ quantitatem denotant, non autem discretionem, quod si circa vnitatis quantitatem eò quod is semper sit minimus rationis multiplicis terminus, aliquid demonstrandum sit. Ex quinti ac sexti theorematibus sumi debet, quæ numeros continuas quantitates (veluti vnitatis natura concipit) significantes complectuntur, quòd si per numerorum leges idem efficere velimus, per respectum partis ad numerum id perfici debet. Vnitas etenim pars est cuiuslibet numeri.

Propositio vigesimaquarta.

Minimi numeri eandem rationem habentium eis, primi adinuicē sunt.

Sint minimi datæ rationis numeri A B. Dico ipsos A & B, esse adinuicem primos, quod si non sint, detur (si fieri poßit) numerus eos metiens, sitq; G. Quoties autē G metitur A tot sint vnitates in D quoties verò idem G metitur B tot sint vnitates in E, igitur G multiplicans D faciet A, multiplicans verò E faciet B. Si itaque G duos D & E multiplicans fecerit A & B, erit A ad B sicut D ad E, per 17 huius, qui quidem sunt minores ipsis A & B, cùm sint multiplicati, & in eadem ratione (contra hypothesim) quod non potest esse. Non datur itaque numerus ipsos A & B metiens, & ideo primi erunt numeri A & B adinuicem. Minimi igitur numeri eandem, &c.

Propositio vigesimaquinta.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, vnum eorum metiens, ad reliquum primus erit.

Sint bini numeri A & B adinuicem primi, quorum vnum B metiatur G. Dico eundem G ad reliquum A primū esse, quòd si non sint primi G & A, metiatur eos aliquis D. Quoniā autem (per hypothesim) D metitur G, sed G metitur B, igitur D (per primam communē sententiam huius) metietur B. Metitur autē idem D & numerum A, vtrosque itaque A & B idem D metitur, non igitur essent ipsi A & B primi, vt positū fuit, quod fieri non potest. Vnum idcirco eorum A & B metiens aliquis numerus D, ad reliquū A primus erit. Si igitur bini numeri primi, &c.

Propositio vigesimasexta.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & ex eis genitus ad eundem primus erit.

Sint duo numeri A & B ad aliquem G primi eorum singuli, ex ipsis autem A & B fiat D. Dico ipsum D ad eundem G primum esse. Quod si non sint, metietur eos D & G aliquis numerus. Sit ille E (si fieri poßit) Quia autem E metitur G vnum primorum A & G, ipse E ad reliquum A primus erit, per præcedentem. Tot sint vnitates in Z quoties E metitur D. Itaque E multiplicans Z efficit ipsum D. Per constructionem autem A & B faciunt D. Si igitur qui ex primo A & quarto B æquetur ei qui ex secundo E & tertio Z, erit (per 19 huius) A ad E sicut Z ad B. Insuper cùm E & A ostensi sint primi, erunt & minimi datæ rationis numeri per 23 huius. Metietur ergo A numerum Z sicut E ipsum B, per 21 huius. Sed idem E metitur ipsum G qui primus ad B positus est, metiretur igitur E duos G & B qui positi sunt primi, quòd fieri non potest. Nullus itaque ipsos G & D metitur, quare ipsi G ad D sunt primi. Si ergo duo numeri ad aliquem numerum, &c.

Propositio vigesimaseptima.

Si duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno eorum fit ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri adinuicem primi A & B ex vno autem eorum A fiat G: Dico G ad reliquum B primum esse. Ponatur ipsi A æqualis D. Quoniam autem A primus est ad B, Primus erit ad eundem B similiter & D ipsi A æqualis. Duo igitur numeri A & D ad aliquem B primi faciunt G. Igitur (per 26 huius) genitus G ex eis, ad eundem B primus erit, fit etenim G ex A & D æqualibus, qui idem est ei qui ex vno eorum scilicet A in se. Si itaque duo numeri primi adinuicem fuerint, qui ex vno, &c.

Propositio vigesimaoctaua.

Si duo numeri ad duos numeros ambo ad vtrumque primi adinuicem fuerint, qui ex prioribus ad eum qui ex posterioribus fiet, primus erit.

Sint bini numeri A & B ad binos numeros G & D, vterque ad vtrumque, scilicet A & B ad G, & A & B ad D primi adinuicem, Ex A autem & B fiat E, ex G verò & D fiat Z: Dico E ad Z esse primos adinuicem. Quoniam enim bini A & B ad aliquem G primi sunt, genitus ex eis E (per 26 huius) ad eundem G primus erit. Similiter quia idem A & B sunt primi ad D, & E ad D primus erit, per eandem. Bini itaque G & D ad aliquem E primi, efficiunt compositum ex ipsis, scilicet Z, ad eundem E primum, per eandem 26 huius. Si igitur duo numeri ad duos numeros vterque ad vtrunque, &c.

MONITVM.

Mutauimus propositionis quædam dicta, eò quòd confusè satis præbuerit Theon, cùm ait (quæ ex eis fient) absque vlla distributione, Ideo Campani sententiam saniorem hoc loco sequemur. Duo etenim tantùm consurgunt, vnus quidem ex prioribus, alter verò ex posterioribus.

Propositio vigesimanona.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & multiplicans vterque seipsum fecerint aliquos, qui ex eis fiunt primi adinuicem erunt. Et si qui in principio numeri, genitos multiplicantes fecerint aliquos, & illi quoque primi adinuicem erunt, & semper circa extremos hoc continget.

Sint bini A & B primi numeri qui seipsos multiplicantes faciant, G & D factos autem rursus multiplicantes efficiant, E & Z: Dico G ad D primos esse, necnon E ad Z. Quoniam G fit, ex A vno primorũ A & B, is erit ad reliquum B primus, per 27 huius. Haud secus quia D fit ex B, ipse erit primus ad A. Cùm autem B sit primus ad G, qui ex B fit, scilicet D ad eundẽ G primus erit per eandem. Erunt igitur bini A G ad binos B & D vterque ad vtrumque primi. Qui igitur fit ex A G prioribus scilicet E, ad ipsum Z factum ex posterioribus, primus erit, per præcedentem. Et semper si A & B multiplicantes ipsos E & Z aliquos fecerint, facti eiusdem præcedentis argumento primi ostendentur. Si itaque bini numeri adinuicem, &c.

Propositio trigesima.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & vterque simul ad quemuis ipsorum primus erit. Et si vterque simul ad quemlibet ipsorum primus fuerit, & qui in principio numeri primi adinuicem erunt.

Sint A B ad B G primi adinuicem numeri. Dico totum A G ad alterum quemuis ipsorum, scilicet A B primum esse, quod si A G ad A B non sit primus, metietur eos aliquis numerus, qui sit D quoniã D metitur totum A G & ablatum A B metietur & reliquum B G, per secundam communem sententiam, non igitur essent A B & B G primi (contra hypothesim) quod fieri nequit. Ad secundum autem ponamus totum A G ipsi A B primum esse: dico A B ad B G primos esse: quod si non sint, metiatur eos D, eisdem dispositis. Si igitur D metiatur, binos A B & B G,

vel eos sua repetitione componat, ipse D metietur totum A G, cũ ipsum multiplic[illegible], sed metitur & A B igitur A B & A G non essent primi, cõtra positum, nam eos metire[illegible] ab-surdum non igitur metitur aliquis numerus A G & A B, qui sunt igitur primi. S[illegible] me-ri primi, &c.

Corollarium.

Si numerus metitur duos numeros, & compositum ab ipsis metietur. *Quoniam D metitur A B, & B G sequitur eum metiri totum A G compositum ex ipsis A B & B G.*

Propositio trigesimaprima.

Omnis primus numerus, ad omnem numerum quem non metitur primus est.

A —— 7
B —— 12
G —— 3

Si numerus A sit primus, & non metiatur B. Dico, quod primi sunt A ad B si enim non essent primi, metiretur eos aliquis G. Primum igitur numerum A metietur aliquis G, quod fieri non potest, per duodecimam diffinitionem huius Si enim G fuerit æqualis ipsi A, non metietur ipsum B quem A non metitur, ex hypothesi, nullus igitur eos metitur, primi erunt itaque A ad B. Omnis igitur primus numerus ad omnem, &c.

MONITVM.

Prosequitur Euclides hoc theoremate, quod antea 20 & 23 huius monuimus, scilicet rationẽ multiplicem à minimis numeris excludi, eo quod à primis (qui semper sunt minimi eius rationis) excludatur hac igitur de causa dixit omnem primum ad numerum quem non metitur, primum esse. Nam si is primus alium metiatur, vt inter habentes rationem multiplicem, non erit ad eum primus, cum alium ac seipsum metiatur, quod tantum multiplici conuenit rationi, vel eius conuersæ, quarum numeri (cùm semper vnus metiatur alterum) nunquam in primos, seu datæ rationis minimos numeros incidunt.

Propositio trigesimasecunda.

Si duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquem, factum autem ex eis metiatur aliquis primus numerus, & vnũ eorum qui in principio metietur.

A —— 2
B —— 6
G —— 12
D —— 3
E —— 4

Sint bini numeri A & B, ex quorum multiplicatione productũ G metiatur primus numerus D. Dico D metiri vnum eorum A vel B, si autem non metiatur vnum eorum, scilicet A, erunt D & A primi, per præcedentẽ. Quoties autem D metitur G, tot sint in E vnitates igitur D multiplicãs E, facit G, veluti A multiplicans B eundem fecit G ex hypothesi. Proportionales itaque sunt ipsi A ad D, vt E ad B numeri, per 19 huius: qui enim ex primo A & quarto B æqualis est ei qui ex secundo D & tertio E, sed cùm A D ostensi sint primi, ipsi erũt minimi suæ rationis, per 23 huius, & proinde metiẽtur ipsos B E æqualiter, per 21 huius, antecedens A antecedentem E, & consequens D consequentem B, qui quidem B est vnus eorum A vel B, quem igitur metitur D. Si itaque duo numeri sese multiplicantes, &c.

Corollarium.

Si numerus ad aliquem factum ex duobus sese multiplicantibus primus non fuerit, & ad vnum eorum qui in principio primus non erit. *Nam metiens numerum & factum, & repetẽs metientem in facto, semper sunt cum sese multiplicantibus reciprocè proportionales, per secundam partem 19 huius: nam qui ex primo & quarto æquatur ei qui ex secundo & tertio.*

Propositio trigesimatertia.

Omnis compositus numerus, sub alicuius primi numeri dimensionem cadit.

Sit

Sit compositus numerus A. Dico ipsum A ab aliquo primo mensum esse, quoniam compositus est A aliquis eum metitur, per 14 diffinitionem, qui sit B quod si primus sit, habemus optatum: si verò B non sit primus, metiatur eum aliquis G, qui quidem G primus erit, vel aliquis eum metietur, quem tandem metietur sola vnitas, & hic primus erit. Non enim infinita fit numerorum sectio, licet infinita sit multiplicatio, vt iam antea diximus, ex prima itaque communi sententia, ille primus metietur A. Omnis igitur compositus numerus, &c.

MONITVM.

Quia omnes primi numeri impares sunt dempto vnico binario, pares tandem ad binarium, impares vero compositi tandem ad imparem primum aliquem eos metientem deducũtur: & proinde ad primum, quæ est vltima & minima cuiuslibet mensi mensura, vt sequitur.

Propositio trigesimaquarta.

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

Quoniam omnis numerus aut primus est aut compositus, sed compositum aliquis primus metitur, per præcedentem, Igitur omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur cum sit compositus.

Propositio trigesimaquinta. *Problema 3.*

Numeris quotcunque datis inuenire minimos easdem rationes habentium eis.

Proponantur quotcunque numeri A B G in quorum rationibus minimos inueniamus, si quidem ipsi A B G fuerint primi, exequimur optatum, per 21 huius, si autem primi non fuerint sit eorum maxima dimensio D, per coroll. 3 huius. quoties porro D metitur ipsos A B G tot sint vnitates in numeris E Z I ordine seruato, quoniam D metitur singulos A B G per vnitates ipsorum E Z I singulorum, sequitur (ex 18 huius) A B G genitos, eandem habere rationem quam E Z I multiplicantes. Dico insuper ipsos E Z I numerorũ A B G rationis, minimos esse. Si autẽ in ea ratione minores ipsis E Z I aliqui dari possint, sint T K L, qui quidem metientur ipsos A B G æqualiter, per 21 huius. Metiantur itaque per vnitates ipsius M, metietur & è conuerso M ipsos A B G per vnitates ipsorum T K L, per 16 huius, sed cùm T multiplicans M ipsum A faciat, similiter E multiplicans D eũdem A faciat, erit (per 19 huius) qui ex primo E & quarto D æqualis ei qui ex secundo T & tertio M, & ideo proportionales erunt E ad T sicut M ad D, sed E maior ponitur ipso T, maior igitur erit M ipso D erit ideo M ipsorum A B G communis mensura maior ipsa D maxima posita, quod est absurdum. Non itaque possunt in ratione propositorum A B G minores dari ipsis E Z I numeris, qui ea de causa minimi eius rationis numeri, merito dicentur. Numeris igitur quotcunque, &c.

Propositio trigesimasexta. *Problema 4.*

Duobus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

Sint dati duo numeri A & B, inueniamus autem quẽ minimum metiãtur numerum, ipsi A B aut sunt primi, aut non primi, sumantur prius primi, & A multiplicãs B ipsum efficiat G, itaque B multiplicans A eundem G (per 16 huius) faciet, metientur ergo A & B ipsum G. Dico quod & minimum, quod si non, metiantur aliquem minorem ipso G qui sit D, quoties autem A metitur D, tot sint vnitates in E quoties vero B eundem D metitur, tot sint vnitates in Z. Multiplicans igitur A ipsum E fecit D, & multiplicans B ipsum Z fecit eundem D, Erit itaque A ad B sicut Z ad E, per secundam partem 19 huius, ipsi autem A B sunt ex hypothesi primi, & (per 23 huius) minimi

suæ rationis, si vero A & B sint minimi, ipsi metientur Z E eandem rationem habentes æqualiter, per 21 huius. Metietur ergo Z consequens ipsum B consequentem, præterea quia A multiplicans duos E & E ipsos G & D fecit, erit (per 17 huius) sicut E ad E sic G ad D, sed metitur B ipsum E, metietur ergo G ipsum D, maior minorem, quod fieri non potest. Si igitur A & B sunt primi, nullum metiuntur minorem ipso G, si vero ipsi A & B supponantur non primi, aut minor metitur maiorem, & sic maior est, minimus quem ipsi metiuntur, aut non metitur, tunc inueniantur (per 35 huius) minimi rationis A ad B qui sint Z & E, & A multiplicans E faciat G sequetur (per 19 huius) E multiplicante Z idem G effici. Ipsi itaque A & B productum G metiuntur. Dico quod & minimum, quòd si non, metiantur (si fieri possit) minorem ipso G qui sit D, quoties porrò A metitur D tot sint unitates in I, quoties verò B eundē D metitur, tot sint in T. igitur A multiplicans I & B ipsum T eundem efficiunt D. Est itaque, ex 19 huius, vt A ad B sic T ad I. Sed sicut A ad B sic fuit Z ad E. Vt igitur T ad I, sic Z ad E, qui Z & E cùm minimi sint, per constructionem, metiuntur ipsos T & I, per 21 huius. Sequetur igitur E metiri ipsum I, rursus quoniam A multiplicans E & I ipsos G & D fecit. erunt per 17 huius, G ad D sicut E ad I, sed E metitur I, metietur ergo G maior ipsum D minorem quod est nefas. Non igitur metitur numeros A & B aliquis numerus minor ipso G, quare datus est G minimus, quem metiuntur ipsi A & B numerus. Duobus igitur datis inuenimus, &c.

Propositio trigesimaseptima.

Si duo numeri numerum aliquem mēsi fuerint, & minimus qui sub eorum dimensionem cadit eundem metietur,

Duo numeri A & B aliquem numerum G D metiantur. Et insuper metiantur minimum E ab ipsis mēsum: Dico E metiri etiam G D, quòd si E non metiatur G D siue sit eius pars, saltem erit eius partes, per 4 huius, metiatur E ex ipso G D maximum numerum Z D, relinquens seipso minorem G Z numerum. Quoniam autem bini A & B metiuntur E, metiuntur & Z D, quem E metitur, per primam communem sentētiam, metiuntur autem & totum G D, per hypothesim, metientur itaque & reliquum G Z, per secundam communem sententiam, minorem quidem ipso E minimo posito, quod fieri non potest. Metitur itaque E numerum G D. Si igitur duo numeri numerum aliquem, &c.

Propositio trigesimaoctaua. Problema 5.

Pluribus numeris datis, inuenire quem minimum metiantur numerum.

Proponantur tres numeri A B G oportet iam inuenire quem minimum metiantur numerum. Suscipiamus (per 36 huius) minimum quem metiantur duo A & B qui sit D. Siquidem tertius G susceptum D metitur, optatum consequimur nam tres eundem D metiuntur. Dico quod & minimum. Quod si non, detur aliquis minor ipso D quem metiantur omnes A B G, sitq; E. Quoniam tres A B G datum E metiuntur. Duo A B eundem metientur E. Atqui E minor ponitur minimo D A B ipsis A & B menso, quod fieri non potest. Non est igitur E minor ipso D. Si verò tertius G susceptum D non metitur, detur minimus quem G & D metiuntur, per 36 huius, qui sit E. Quoniam A & B metiūtur D, metientur & E quem D metitur, per primam commu. sententiam. Tres igitur A B & G metientur E, quem dico esse minimum. Quòd si non, ponatur alius Z dato E minor Quoniam A B & G metiuntur Z, duo A & B eundem Z metiuntur. Et proinde (per 37 huius) minimus D quem ipsi A & B metiuntur eundem Z metitur. Quia vero G & D eundem Z metiuntur, & per eandem, minimus ab ipsis G & D mensus eundem Z metitur, qui est E, maior quidem minorem Z, quod fieri

[illegible] igitur ipsos A B G metiens erit E. Similis progressu in quotcunque proposi- tis numeris [illegible]. Nam si tribus A B & G quartus aliquis poneretur, siquidem is quartus datum E metiatur, [illegible] quem ipsi quatuor propositi metientur. Si vero non metiatur E, inueniendus est, ex 37 h[illegible], minimus quem E & quartus metiuntur. Is denique erit optatus, haud secus si quinque sex, vel quotlibet propositi fuerint. Pluribus itaque numeris datis, &c.

Propositio trigesimanona.

Si numerum aliquis numerus metiatur, mensus cognominatam partem habebit à metiente.

Metiatur numerum A aliquis numerus B. Dico A habere partem denominatam ab ipso B. Quoties enim B metitur A tot sint vnitates in G, Sit verò D vnitas. Quoniam B metitur A per vnitates numeri G, idem G metietur A per vnitates ipsius B per 16 huius. Igitur D vnitas toties metitur B quoties G ipsum A. Sed vnitas metitur B per partem A numero B denominatam, per 23 diffinitionem huius. Sequetur itaque G metiri A per partem ab ipso B denominatam, habet igitur A partem denominatam à metiente B. Si itaque numerum aliquis numerus, &c.

A 12
B 4
G 3
D 1

Propositio quadragesima.

Si numerus partem habuerit quamlibet, numerus cognominans partem eum metietur.

Sit pars numeri A numerus B, eam verò partem cognominans, sit numerus G. Dico G metiri A. Esto D vnitas. Quoniam G denominat ipsius A partem B. Idem B metitur A per vnitates numeri G, per 23 diffinitionem. Sed per easdem D G vnitas restituit eundem G, vicissim igitur, per 15 huius, si- cut vnitas metitur B tertium, sic G metitur A quartum. Quia verò vnitas ipsum B metitur, & G ipsum A metietur. Si itaque numerus partem habuerit, &c.

A 12
B 4
G 3
D 1

Propositio quadragesimaprima. *Problema 6.*

Numerum inuenire qui minimus existens habeat datarum denominationum partes.

Sint datæ partes A secunda, B tertia, & G quarta. Inueniendus sit numerus minimus habens partes harum denominationum. Sint denominantes illas partes A B G, numeri D E Z. Minimus autem numerus quem D E Z metiuntur, sit per 38 huius I: Dico I esse minimum habentem datas partes A B G. Quod si non sit, esto (si fieri possit) minor eas partes habens numerus T. Cum T habeat partes A B G metientur eum numeri D E Z partium A B G denominatores, per 40 huius. Minorem quidem minimo I quem metiuntur, quod fieri non potest. Non igitur metiuntur D E Z numeri, minorem suscepto I. Quod autem numerus I habeat partes A B G, patet (per 39 huius) nam metiuntur eum denominatores, partium A B G scilicet D E Z. Numerum igitur inuenimus, qui minimus existens, &c.

D 2 — A secunda
E 3 — B tertia
Z 4 — G quarta
I 12
T

Corollarium.

Si numerum quotcunque numeri metiantur minimum, is minimus erit, habens partes ab ipsis denominatas. *Nam cum inuenimus* I *(per 38 huius) minimum quem metiuntur* D E Z, *statim conclusimus esse* I *minimum habentem partes* A B G, *ab ipsis* D E Z *numeris denominatas.*

Additio.

Campanus huic addit post inuentionem prioris minimi, secundum inuenire, hoc est eum, qui dempto minimo minor est, & tertium & quartum, &c. Secundum quidem duplato I *nam numeri metientes* I *metiuntur eius duplū, per primam cōmunem sententiam huius. Maior, autem ipso* I *& minor duplo, dari non potest (per secundam communem sententiam) nam quia partes datæ metiuntur totum, scilicet duplo minorem, & ablatum scilicet* I *sequetur ergo quod metirētur & reliquum, minimo* I *minorem, quod fieri non potest. Necesse est igitur excedentem* I *vsque ad duplum venire secundum, ad triplum autem tertium, ad quadruplum similiter quartum, cum nunquam partes illæ minorem suscepto* I *aliquem metiri possint.*

Postmodum addit idem Campanus, inueniendum esse minimum habentem datas partium partes, quas facilius in vnicum fractionis genus reducentes, per hanc propositionem absque tam prolixa ingeniorum tortura, nostro iudicio reperiemus, vt si tertiam dimidiæ & quartam tertiæ partium partes minimum habentes optaremus, reducenda esset tertia dimidiæ in sextam, quarta verò tertiæ in duodecimam tum demum numerum perquiremus, habētem sextam & duodecimam partes, per hoc problema.

MONITVM.

Numerum qui minimus existens datas partes habeat, Euclidem optare dicit Theon, Campanus verò datarum denominationum partes habentem optat, quod verius Euclidem insequi arbitramur. Nam partes (absque denominatione) etiam propositas numerum habentem, dare per hanc possumus, veluti damus eum qui proposita sola denominatione, non autem partium quantitate, postulatur. Sed eum numerum qui vtraque proposita scilicet partium denominatione & earum quantitate, per numeros expressa inueniri iubetur, non dabimus, vt numerū cuius tertia pars sit 4 quinta verò 3 non dabimus, eo quod vtrumque & denominationem, & partis quantitatem proponamus. Quare cùm semper cuiuslibet numeri partem & eius partis denominatorem eundem numerum semper metiri (per quadragesimam huius) intelleximus, eadem methodo facile propositas tantum partes vel propositas tantum partium denominationes minimum numerum habentem, facilè assequemur. Cuiuslibet enim numeri vnica denominatio vnicam quantitatem partis pronunciat, sicuti & vnica partis quantitas, vnicam denominationem tantum profitetur in toto, aliàs sequeretur quemuis numerum per quemlibet posse multiplicari, quod longè abest.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber octauus.

Propositio prima.

SI fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, extremi verò ipsorum primi adinuicē fuerint, omnes minimi sunt eandem rationem habentium eis.

Sint quotcūque cōtinuè proportionales numeri A B G D, *quorum extremi* A *&* D *sint primi. Dico ipsos* A B G D *esse tot minimos datæ rationis: quod si minus, dentur minores ipsis* A B G D, *hi* E Z I T. *Qui cùm supponantur in eadem esse ratione, ipsis* A B G D *ex æquali erunt (per 14 septimi) sicut* A *ad* D, *sic* E *ad* T *sed* A *ad* D *primi sunt, per hypothesim, & minimi, per 23 septimi. Ipsi igitur metiūtur* E T *eandem rationem habentes æqualiter, per 21 septimi. maiores igitur metirentur minores, quod fieri non potest, ipsi itaque* A B G D *minimi erunt, suæ rationis in hac multitudine. Si fuerint igitur quotcunque, &c.*

A 8
B 12
G 18
D 27
E
Z
X
T

Propositio secunda. *Problema 1.*

Numeros quotlibet continuè proportionales in data ratione minimos inuenire.

Sit data ratio A *ad* B *(per 35 septimi) in minimis numeris, et multiplicans* A *seipsum faciat* G. *multiplicās verò* B *seipsum faciat* E, *ipsi autem* A *&* B *seinuicem multiplicantes efficiant* D. *Dico* G D E *tres minimos esse datæ rationis. Si vero optemus quatuor* A *multiplicans* G D E *ipsos faciat* Z I T, B *verò multiplicās* E *reliquum efficiat* K. *Dico* Z I T K *esse quatuor minimos rationis* A *ad* B *quoniam autem* A *duos numeros* A *&* B *multiplicans, fecit* G *&* D, *erit (per decimam septimā septimi) sicut* A *ad* B, *sic* G *ad* D*· quia vero duo* A *&* B, *numerū* B *multiplicantes ipsos efficiūt* D *&* E, *erit sicut* A *ad* B, *sic* D *ad* E *per 18 septimi sed sicut* A *ad* B, *sic fuit* G *ad* D*· sicut igitur* G *ad* D, *sic erit* D *ad* E *sicutq;* A *ad* B. *Præterea dico tres* G D E *minimos esse, cum* A *&* B *sint minimi, ipsi (per 24 septimi) primi erūt quia vero seipsos multiplicātes efficiunt* G *&* E, *& hi quoque (per 29 septimi) primi erunt sed & extremi ipsorum* G D E, *ipsi itaque* G D E *minimi sunt eandem rationem habentium, eis (per præfatam) Secundo quoniam* A *ipsos* G D E *multiplicans efficit* Z I T, *erunt (per 17 septimi)* Z *ad* I, *&* I *ad* T, *sicut* G *ad* D, *&* D *ad* E. *Cæterùm quoniam* A *&* B *ipsum* E *multiplicantes, fecerunt* T *&* K, *erit* A *ad* B *(per 18 septimi) sicut* T *ad* K *sed sicut* A *ad* B, *sic fuit* Z *ad* I, *&* I *ad* T. *sicut igitur* A *ad* B *sic est* Z *ad* I, *&* I *ad* T, *ac* T *ad* K, *quos etiam minimos dico rationis,* A *ad* B *totidem. Cum* A *&* B *primi qui in principio numeri genitos* G *&* E *multiplicantes fecerunt aliquos* Z *&* K, *& illi quoque (per secundam partem 29 septimi) primi erunt, sed & extremi horum quatuor* Z I T K, *ipsi igitur* Z I T K *omnes minimi sunt eandem quam* A *ad* B *rationem habentium, per primam huius. Quia verò (per 29 septimi) semper circa extremos illud contingit,* A *&* B *genitos* Z *&* K *multiplicantes, alios primos efficient, extremos quidem quinque proportionalium, & proinde (per primam huius) omnes quinque minimos huius rationis, & sic infinitè. Numeros igitur quotcunque inuenimus minimos in data ratione, continuè proportionales.*

A 3
B 4
G 9
D 12
E 16
Z 27
I 36
T 48
K 64

Corollarium.

Si fuerint tres numeri continue proportionales minimi eiusdem rationis, extremi quadrati erunt. Si autem fuerint quatuor, extremi cubi erunt. *nā extremi trium fiunt ex ductu ipsorum*

A & B in se. Extremi verò ipsorum quatuor, fiunt ex ductu radicum A & B in quadratos C & E, vt fiant cubi Z & K.

Propositio tertia.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimi eandem rationem habentium eis, eorum extremi primi adinuicem erunt.

Sint quotcunque numeri continuè proportionales minimi suæ rationis A B G D. Dico eorum extremos A & D primos esse adinuicem. Sumantur duo minimi huius rationis E & F, per 35 septimi, qui primi erunt, per 24 septimi, ex his porrò (per præcedentem) totidem ipsis A B G D, in eadem ratione producãtur K L M N, quoniam E & F sese multiplicantes gignunt C & I, genitos verò multiplicantes, idem E & F faciunt K & N. Ipsi igitur K & N primi sunt (per 29 septimi) quia verò K & N (extremi) sunt primi, omnes K L M N sunt minimi huius rationis, per primam huius. sed & minimi sunt (ex hypothesi) A B G D eiusdem rationis, propositi A B G D. igitur ipsis K L M N sunt æquales, non aliàs vtrique minimi essent, numeri itaque A D extremi (ipsis K N, extremis æquales) veluti K & N primi erunt. Si fuerint itaque quotcunque numeri continuè, &c.

Propositio quarta. *Problema 2.*

Rationibus quibuscumque datis in minimis numeris, numeros inuenire continuè proportionales minimos in totidem, & datis rationibus.

Proponantur in minimis numeris qualibet ac quotcunque rationes, scilicet A ad B, G ad D, & E ad Z, sumatur autem minimus quem metiantur B & G, per 36 septimi, sitq́; I. quoties verò B metitur I toties A metiatur T, quoties autem G metitur I toties D metiatur K, sed quoniam E ipsum K metitur vel non. Metiatur primum E ipsum K, toties verò Z ipsum L metiatur, cùm autem A & B æquè multiplicati, fecerint T & I. At G & D eodem item ducti, fecerunt I & K, ipsi verò E & Z rursus eodem fecerint K & L. Erunt (ex decimaseptima septimi) A ad B sicut T ad I, ac G ad D vt I ad K, & E ad Z sicut K ad L: quatuor itaque T I K L in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z positi sunt continuè proportionales. Dico quòd & minimi sunt aliorum totidem harum rationum, sin minus, inueniãtur, si fieri posßit, aliqui minores, sintq́; N S O M singuli singulis T I K L minores, cùm sit A ad B vt N ad S, metietur B (minimus positus) ipsum S, per vigesimamprimam septimi, similiter cùm sit G ad D vt S ad O metietur G ipsum S. Metiuntur igitur B & G ipsum S, minorem quidem ipso I qui positus fuit minimus, quem ipsi B G metiuntur, quod est absurdum. Non igitur possunt dari minores ipsis T I K L alij in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z.

Ad secundum autem, non metiatur E ipsum K, sed sit eius partes quantumuis repetita, Sumatur (ex trigesimasexta septimi) minimus mensus ab ipsis E & K qui sit M. Qualis est autem K ipsius M, talis sit pars I numeri S, & T ipsius N. Quoties verò E metitur M toties Z metiatur O, quoniam K I T ipsos M S N æquè metiuntur, erit (per decimamoctauam septimi) T ad I, vt N ad S, & I ad K sicut S ad M, sed sicut T ad I & I ad K, sic fuit A ad B & G ad D. sicut igitur A ad B & G ad D, sic erit N ad S & S ad M. Et (per eandem) sicut E ad Z sic M ad O, æquè etenim metiuntur E & Z ipsos M & O ex hypothesi. Sunt igitur N S M & O continuè proportionati in rationibus ipsorum A ad B, G ad D, & E ad Z. Dico quòd & minimi sunt earum rationum numeri, quòd si non, Dẽtur, si fieri posßit, ipsis N S, M O minores, qui sint P R, C F. Cùm autem P R, R C & C F sint in rationibus ipsorum A B, G D, & D Z, & ipsi A B, G D & E Z sint (ab hypothesi) minimi. sequetur B metiri

ipsum

ipsum B, vt A ipsum F, ac G eundem R vt D ipsum C, per vigesimamprimam septimi. Itaque E & G metientur R. Quare eundem R metietur, minimus quem E & G metiuntur, scilicet I, per trigesimamseptimam septimi. Cùm autem sit I ad K sicut R ad C, scilicet vtrique sicut G ad D, erit vicißim (per decimamtertiam septimi) I ad R vt K ad C. Metitur autem I ipsum R, metietur & K ipsum C. Eundem C porro metitur E, cum E & Z sint minimi rationis ipsorum C ad F, per vigesimamprimam septimi. Igitur K & E eundem C metientur. Et proinde eundem C metietur M minimus ab ipsis K & E mensus, per trigesimamseptimam septimi, maior minorem, cum minores sint positi P R, C F, ipsis N S M O, quod inconuenit. Minimi itaque erunt N S, S M, M O in continuis ipsorum A B, G D & E Z rationibus dati. Rationibus itaque quibuscunque datis, &c.

MONITVM.

Figurarum numeros transferre cogimur, eò quòd Theon in paralogismum deciderit, numeros potius secundæ partis destinatos primæ deputans. Nam qui compertendi erant vbi E numerum K non metitur, eosdem vbi E eundem K prius metitur, comperit. Nimirum incipiens à sumptione minimi quem metiuntur E & G hi scilicet 4 & 2 quem posuit octonarium loco quaternary, qui est minimus ab ipsis 2 & 4 mensus, vt trigesimasexta septimi præter Theonem diximus. Quare prima huius parte numerus E numerum K metiri non poterat, quod vt fieret, numeros T I K (maiores iure debito) protulit indebitè.

Propositio quinta.

Plani numeri adinuicem rationem habent compositam ex lateribus.

Sint plani numeri A & B, ipsius autem A latera sint G & D: Numeri verò B latera sint E & Z, at D multiplicans E faciat I: Dico rationem A ad B componi ex rationibus G ad E & D ad Z, hoc est, laterum A ad latera B planorum. Quoniam D multiplicans E fecit I multiplicans vero G reliquum latus facit A, per decimamseptimam diffinitionem septimi. Erit A ad I sicut G ad E, per 17 septimi. Rursus quoniam E multiplicans D idem I facit, per 16 septimi, multiplicans autem Z ipsum B facit, erit similiter I ad B sicut D ad Z. Easdem igitur sequetur esse rationes laterum G ad E & D ad Z, rationibus A ad I & I ad B. Sed (per quintam sexti diffinitionem) ratio extremorum A ad B componitur ex rationibus medys, scilicet A ad I & I ad B, quæ eædem sunt rationibus laterum G ad E & D ad Z ostensæ. Ratio itaque A ad B planorum numerorum, componitur ex rationibus laterum G ad E & D ad Z. Plani igitur numeri rationem habent, &c.

Propositio sexta.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus autem proximum non metiatur, & alius nullus, vllum metietur.

Sint quotlibet numeri A B G D E continuè proportionales, quorum minimus A non metiatur sibi proximum B: Dico nullum alium eorum A B G D E metiri reliquum, cùm sint proportionales continui. Si A non metiatur B, nec B metietur G, nec G ipsum D, nec D reliquum E: nam sunt eædem eorum rationes. Præterea si dicamus intermißis quibusdam, extremos sese metiri, vt A ipsum G, si fieri poßit. Dentur numerorum A B G rationes in minimis numeris, per 35 septimi, qui sint Z I T. Quorum extremi Z & T (per tertiam huius) erunt primi. Igitur Z ipsum T non metietur. Quoniam autem ipsi A B G & Z I T æquales numero, & bini in eadem ratione ponuntur, erit (per 14 septimi) A ad G sicut Z ad T. Sed Z ipsum T non metitur, nec igitur A ipsum G metietur. Eodem argumento patebit inter quosuis sumptis minimis totidem, quorum extremos tertia huius efficit semper primos. Si igitur fuerint, &c.

Corollarium.

Si quotcunque numeri continuè proportionales fuerint in ratione non multiplici, inter extremos quosque eorum nusquam cadet ratio multiplex. *Nam si minimus proximum non metiatur, erit ratio non multiplex, & si proinde nullus alius alium metiatur, nec inter eos erit ratio multiplex.*

MONITVM.

Cùm dixerint Theon & Campanus (primus autem non metiatur secundum) videntur ab hoc Euclidis theoremate, omnes terminos habentes rationes maioris inæqualitatis deijcere (cùm in eis nusquam primus secundum metiatur, maior scilicet minorem) quod non fuisse Euclidis mentem rati, diximus, si minimus proximum non metiatur, vt demonstrationis hypothesim a minimo semper sumendam esse, vt recta oriatur conclusio, doceamus. Quod autem dicit Theon in demonstratione z non esse vnitatem, frustra id probare nititur: nam id sufficienter exprimit hypothesis theorematis, dicens minimus proximum non metiatur, vt excludat omnes rationes multiplices, quæ (cum non sint puræ numerorum rationes) sola in minimis numeris vnitatem adesse patiuntur, ac earum conuersæ, & quarum semper vnus alterum terminorum metitur, scilicet minor maiorem. In reliquis verò rationibus vnus nunquam alterum metitur, &c.

Propositio septima.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, minimus autem metiatur extremum, & proximum quoque metietur.

Sint quotlibet numeri continuè proportionales A B G D. *Quorum minimus* A *metiatur maximum* D, *vel extremum quod idem est. Dico quod & proximum* B *metietur idem* A. *Si autem non metiretur* A *proximum* B *non metiretur & extremum (per præcedentem nullum enim metiretur) quod esset contra positum. Si itaque fuerint quotcunque numeri, &c.*

Propositio octaua.

Si inter duos numeros continuè proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, tot inter eandem rationem habentes, eis continuè proportionales cadent.

Cadant inter duos numeros A *&* B *quotcunque continuè proportionales numeri* G *&* D. *Sitq́;* E *ad* Z *eadẽ ratio quæ* A *ad* B: *Dico tot cadere inter* E *&* Z *cõtinuè proportionales, quot inter* A *&* B *ceciderunt. Ponantur (per secundã huius) ipsis* A G, D B *eandem rationem habentes totidem minimi, qui sint* I T, K L. *Erit itaque* I *ad* L *sicut* A *ad* B *æqua ratione, per decimam quartam septimi. Cum autem* E *ad* Z *sint vt* A *ad* B, *erit* E *ad* Z *vt* I *ad* L, *per vndecimam quinti. Ipsi itaque* I *&* L *metientur ipsos* E *&* Z *(eandem rationem habentes) æqualiter, per vigesimamprimam septimi. Quoties autẽ* I *metitur* E *toties* T *metiatur* M, *&* K *ipsum* N, *& reliqui qui inter* I *&* L *reliquos qui inter* E *&* Z *ponendi sunt, quotquot fuerint. Quoniam enim* I T, K L *æquè metiuntur ipsos* E M, N Z, *vicissim* I *metietur* T *vt* E *ipsum* M, *(vel eadem partes erit) &* T *ipsum* K *vt* M *ipsum* N, *ac* K *ipsum* L *vt* N *ipsum* Z, *per nonam septimi. Proportionales igitur (per vigesimamprimã diffinitionem septimi) & æquales numero sunt* E M, N Z *ipsis* I T, K L, *& proinde ipsis* A G, D B *quibus ipsi* I T, K L *æquales numero, & in eadem ratione positi sunt. Quot igitur proportionales* G *&* D *inter* A *&* B *ceciderunt, tot inter* E *&* Z *proportionales* M *&* N *cadent. Si itaq; inter duos numeros, &c.*

Corollarium.

Inter numeros habentes rationem superparticularem & superbipartientem, non cadit aliquis medius proportionalis. *Quia minimi eius rationis numeri, sola vnitate vel binario distant. Si autem inter maiores caderet medius, & inter minimos (eandem rationem habentes) caderet, per hunc. Sed inter sola vnitate vel binario distantes, nullus cadit. Inter numeros igitur, &c. Quare tonus musicus (sesquioctaua constans) simul atque sesquialtera & sesquitertia bifariam secari non possunt, vt enim ratio bifariam secetur, in duas similes secari debet, & tunc caderet medius proportionalis, quod fieri non potest, sunt enim rationes superparticulares. Praeterea sequitur hinc dimetiētis quadrati ac eiusdem latus numeris non exprimi posse rationem. Nam quod ex dimetiente, ad quod ex latere quadratum est sicut 2 ad 1, quae sola vnitate distant, sed laterum ratio dimidia est, rationis quadratorū, per 20 & coroll. eius sexti. Inter 2 igitur & 1 medius caderet, quod fieri nequit.*

MONITVM.

Quoniam per minimos numeros haec demonstratio fit, in quo saepius ostendimus non cadere, habentes rationem multiplicem, seu particularem eius conuersam, possent fortè obycere quidam, hoc theoremate non posse comprehendi numeros habentes rationem multiplicem vel eius conuersam. Ad haec dicemus hoc theorema de rationibus numerorum proportionalium, in genere loqui, non autem de rationibus tantùm numerorum arithmeticorum, siue actiuorum, inter quos ratio multiplex minimè versatur. Quare cum proportionales sint passiùs rationē multiplicem huic theoremati subyci sentiemus, quod si proprium multiplicibus demonstrationem exhibere velimus, loco minimorum sumemus totidem ab vnitate proportionales I T K L (vt data opera in figura descripsimus) quibus idem conueniet (ex decimaquinta septimi) quod numeris ascripsit 9 eiusdem, vt tandem proportionales, ac totidem ipsis I T K L reperiantur E M N Z. Hanc animaduersionem sufficere in similibus obiectis (si fortè occurrerint) consulimus.

Propositio nona.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, & inter eos proportionales continui ceciderint numeri, quot inter eos cadent, tot inter vtrumque eorum & vnitatem continuè proportionales cadent.

E 1
Z 3 — I 4
T 9 — K 12 — L 16
M 27 — N 36 — S 48 — O 64
G 36 — D 48 — B 64

Bini numeri A & B sint primi. Inter eos vero quotcunque continuè proportionales cadant G & D. Dico inter vtrumque eorum A & B & vnitatem, totidem cadere cōtinuè proportionales. Esto E vnitas, sint què minimi rationis A G, D B duo Z I, per secundam huius, postmodum tres T K L, deinde quatuor, vsque ad multitudinem ipsorum A G, D B, qui sint M N, S O, per secundā huius. Quoniam M N, S O ipsis A G, D B aequales sunt multitudine, & rationis eiusdem minimi. Nam A G, D B, sunt primi, per 23 septimi. Ipsi singuli singulis aequales erunt. Quia verò (per ea quae demonstrata sunt secunda huius) Z metitur T per suipsius vnitates, & T ipsum M per easdem. Sed E vnitas ipsum Z per easdem, sequetur quatuor E Z, T M continuè proportionales esse. Similiter E I, L O. Cum autem aequales sint A ipsi M & B ipsi O, Inter A & E vnitatem cadent, T & Z. Inter B verò & eandem vnitatem E cadent L I. Quia vero inter E & numerum proportionalium A G, D B (scilicet M N, S O) aequalis est numero gradatio proportionalium, ipsis G D inter A & B cadentibus, nempe Z T vel I L eisdem G D, per secundam huius. Sequetur totidem inter vtrumque ipsorum A vel B & vnitatem E cadere proportionales T & Z aut L & I, quot inter ipsos A & B ceciderunt G & D. Si igitur bini numeri primi, &c.

Propositio decima.

Si inter duos numeros & vnitatem, totidem continuè proportionales cadant numeri, Quot inter vtrumque ipsorum & vnitatem continuè proportionales ceciderunt, tot & inter eos continuè proportionales cadent.

Inter duos numeros A *&* B *,& vnitatem* G*, cadant totidem proportionales numeri* A E D G *,&* B I Z G*: Dico quot inter vtrosque* A *scilicet & vnitatem* G*, ac* B*,* G *& vnitatem ceciderint, totidem inter ipsos* A *&* B *cadere. Cùm enim* G D E A *sint continuè proportionales, per quas vnitates* G *metitur* D*, per easdem* E D *metitur, ac* E *ipsum* A*. Similiter per quas* G *metitur* Z*, per easdem* Z *ipsum* I*, ac* I *ipsum* B *metiuntur, sed* G *metitur* D *per vnitates eiusdem* D*, cum* G *sit vnitas. Per easdem igitur* D *ipsum* E *ac* E *reliquum* A *metietur, sicut per* Z *vnitates* G *ipsum* Z *&* Z *proximum* I *ac* I *vltimum* B *metiũtur. Igitur* D *seipsum multiplicans fecit* E*, ipsum* E *verò multiplicans fecit* A*, sic* Z *per seipsum facit* I*, per* I *verò efficit* B*. Sit autem vt* D *multiplicans* Z *faciat* T*, bini verò* D *&* Z *binos* K *&* L *numerum* T *multiplicantes efficiant, quoniam* D *binos* D *&* Z *multiplicans duos fecit* E *&* T*, erit per 17 septimi,* E *ad* T *vt* D *ad* Z*. Quia vero bini* D Z *eundem* T *multiplicantes binos* K *&* L *efficiunt, erit* K *ad* L *vt* D *ad* Z*, per 18 septimi, sed* D *binos* E *&* T *multiplicans ipsos efficit* A K*, erit igitur* A *ad* K *vt* E *ad* T*, & proinde vt* D *ad* Z*. Fuit autem* K *ad* L *vt* D *ad* Z*, erit igitur* A *ad* K *vt* K *ad* L*, per vndecimam quinti. Similiter cum* Z *duos* Z *&* D *multiplicans, ipsos faciat* I *&* T*, erit* T *ad* I *vt* D *ad* Z*, multiplicans autem idem* Z *binos* T *&* I *ipsos fecit* L *&* B*: erunt igitur* L *ad* B *vt* T *ad* I*, per eandem 18 septimi, & proinde vt* D *ad* Z*. Fuit autem* A *ad* K *&* K *ad* L*, vt* D *ad* Z*, id propter* A *ad* K*, &* K *ad* L*, &* L *ad* B*, vt* D *ad* Z *proportionales erunt: inter* A *&* B *igitur positi sunt totidem* K *&* L *continuæ proportionales, quot inter vtrosque* A B *& vnitatem scilicet* E D *vel* I Z *ceciderunt per 2 huius, ea etenim docuit gradationem proportionalium inter vnitatem & propositum numerum proportionalium, eidem proposito semper æqualem esse numero: nempe per vnitatum excessus scilicet* G *vnus,* D Z *duo,* E T I *tres,* A K L B *quatuor. Si itaque inter duos numeros & vnitatem, &c.*

Propositio vndecima.

Duorum quadratorum numerorum, vnus est medius proportionalis numerus, & quadratus ad quadratum, duplam habet rationem quam latus ad latus.

Sint duo quadrati numeri A *&* B*, quorum latus* A *sit* G*, ipsius* B *verò sit* D*: Dico inter* A *&* B *medium cadere proportionalem numerum, ac insuper ipsius* A *ad* B *duplam esse rationem laterum* G *ad* D*: quoniam* G *est quadrati* A *latus. Idem* G *seipsum multiplicans facit* A*, per 19 diffinitionem septimi. Similiter &* D *latus ipsum* B *faciet, ponatur* G *multiplicans* D *ipsum* E *facere, quoniam* G *duos* G *&* D *multiplicans facit* A *&* E*, erit (per 17 septimi)* A *ad* E *vt* G *ad* D*: similiter* D *binos* G D *multiplicans efficit duos* E *&* B*, erit (per eandem)* E *ad* B *vt* G *ad* D*, fuit autem* A *ad* E *vt* G *ad* D*. Erit igitur (per vndecimam quinti)* A *ad* E *ac* E *ad* B *vt* G *ad* D*. Inter* A *&* B *igitur medius cadit proportionalis* E *numerus quia verò est* A *ad* E *vt* G *ad* D*, dupla autem est primi* A *ad* B *ratio, rationis* A *ad* E*, per decimam diffinitionem quinti. Dupla igitur erit* A *quadrati ad* B *quadratum ratio, rationis* G *lateris ad* D *latus. Duorum itaque quadratorum numerorum, &c.*

Propositio duodecima.

Duorum cuborum numerorum bini medij proportionales sunt, numeri & cubus ad cubum triplam rationem habet, quam latus ad latus.

Sint duo cubi numeri A *&* B*, quorum latus vnius* A *sit* G*, ipsius vero* B *latus* D*: Dico inter* A *&* B *binos medios cadere proportionales numeros, &* A *ad* B *rationem triplam habere quam* G *ad* D*. multiplicans se* G *faciat* E*, ipsum verò* D *multiplicans faciat* Z*, at* D *multiplicans se faciat* I*: sed* G *&* D *ipsum* Z *multiplicantes faciant ipsos* T *&* K*. Erit igitur* T *ad* K *vt* G *ad* D*, per 18 septimi, quia verò* G *duos* G D *multiplicans binos efficit* E Z*, erit* E *ad* Z *vt* G *ad* D*, per 17 septimi, & cum* G *binos,* E *scilicet per vigesimam diffinitionem septimi, &* Z *(per constructionem) multiplicans, duos efficiat* A *&* T*, erit* A *ad* T *vt* E *ad* Z*, per 17 eandem & proinde* Z I G *ad* D*, fuit autem* T

ad

ad K *vt* G *ad* D: *igitur* A *ad* T & T *ad* K *erunt vt* G *ad* D. *Quoniam autem* D *binos* G D *multiplicans, duos fecit* Z I, *erit* Z *ad* I *vt* G *ad* D. *Haud secus* D *multiplicans* I *facit* K, *per vigesimam diffinitionem septimi, multiplicans verò ipsum* Z *fecit* K, *per constructionem, erit* K *ad* K *vt* Z *ad* I, *per 17 septimi: & proinde sicut* G *ad* D, *fuerunt autem* A *ad* T, & T *ad* K, *vt* G *ad* D, *Ipsi igitur* A *ad* T, T *ad* K & K *ad* B, *vt* G *ad* D *proportionales erunt. Inter duos igitur* A B *cubos, bini medij proportionales* T & K *ceciderunt in ratione laterum* G *ad* D. *Cùm autem sit* A *ad* T, *vt* G *ad* D *sed* A *ad* B *quartam triplam habeat rationem, quam ad* T *secundam, per 10 diffinitionem quinti: idem* A *cubus ad* B *cubum, triplam rationem habet quam* G *latus ad* D *latus. Duorum itaque cuborum numerorum binimedij, &c.*

Propositio decimatertia.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, & multiplicans vnusquisque seipsum fecerint aliquos, qui ex ipsis fiunt proportionales erunt. Et si qui in principio numeri, genitos multiplicantes fecerint aliquos, & ipsi quoque proportionales erunt, & semper circa extremos hoc eueniet.

Sint quotlibet proportionales numeri A B G, *quorum singuli se multiplicantes faciant singulos* D E Z, *ipsos verò* D E Z *multiplicantes iidem* A B G *faciãt* I T K. *Dico* D E Z *inter se ac* I T K *inter se proportionales esse continuos. Cum* A B G *se multiplicantes faciãt* D E Z, *ipsos verò* D E Z *multiplicantes faciãt* I T K, *ipsi* D E Z *quadrati erũt, per 19 diffinitionẽ septimi, ac duplam ipsis* A B G *rationem habebunt, per 11 huius. Ergo inter se eandem, per sextam communem sententiam, igitur proportionales sunt* D E Z: *ipsi verò* I T K *cubi erunt, per 20 diffinitionem septimi, ac triplam ipsis* A B G *habebunt rationem, per 12 huius, ergo inter se eandem per eandem sextam communem sententiam, eiusdem namque rationis* A *ad* Z *sunt triplæ, inter se igitur sunt proportionales ipsi* I T K. *Cæterùm quoniam* D E Z *sunt quadrati, inter eos sint medij proportionales singuli,* L & S *per 11 huius. Inter singulos verò cubos* I & T *sint bini* M N, *inter* T & K *verò bini* O & P: *quoniam* A *tres* D L E *multiplicans tres efficit* I M N, & B *ipsum* E *multiplicans ipsum* T *fecit: similiter* B & G *ipsos* T O P K *fecerunt, vt ostendimus per octauã huius & sequentes eam. Eadem lege* A *multiplicans ipsos* I M N T & B *multiplicans eũdem* T *genitos, quinque* C F H Q R *efficiẽt, veluti* B & G *alios quinque* R S V X Y *cum* B, *ipsos* T O P K & G *ipsum* K *multiplicabunt, & inter eos eadem erit ratio ipsis* A *ad* B, *per 17 ac 18 septimi. Et igitur æqua ratione erit* C *ad* R, *vt* R *ad* Y, *per 14 septimi. Sicque infinitè (per 17 ac 18 et 14 septimi)* A *et* B *genitos* C R Y *multiplicantes, alios proportionales efficient. Si itaque fuerint quotcunque numeri continuè, &c.*

Propositio decimaquarta.

Si quadratus numerus quadratũ numerum metiatur, & latus latus metietur: & si latus latus metiatur, & quadratus quadratum metietur.

Metiatur A *quadratus numerus* B *quadratum, quadrati* A *latus sit* G, *ipsius* B *verò sit* D. *Dico* G *metiri* D: *et è conuerso si* G *metiatur & et* A *metiri* B, *multiplicans* G *ipsum* D *faciat* E, *sed sese multiplicans facit* A, *per hypothesim igitur (per 17 septimi) erit* A *ad* E *vt* G *ad* D. *Sed* A *metitur* B *(per hypothesim) extremum, metietur igitur* E *proximum, per 7 huius, et* G *itaque ipsum* D *metietur, fuit enim* A *ad* E *vt* G *ad* D. *Secundò metiatur* G *ipsum* D *eisdẽ constructis: Dico* A *metiri* B, *quoniam est* G *ad* D *vt* A *ad* E, *et* E *ad* B, *per 17 septimi: sed* G *metietur* D, *Metietur igitur* A *ipsum* E, *et proinde quadratum* B *quem* E *metitur, per primam communem sentẽtiam septimi. Si itaque quadratus numerus &c.*

Propositio decimaquinta.

Si cubus numerus cubum numerum mensus fuerit, & latus latus metietur, & si latus latus mensum fuerit, & cubus cubum metietur.

A 8 | T 16 | K 32 | B 64
G 2 | D 4
E 4 | Z 8 | I 16

Metiatur A *cubus numerus* B *cubum. Dico* G *latus ipsius* A *metiri* D *latus ipsius* B, *& è conuerso, multiplicantes sese* G *&* D *quadratos efficiãt* E *&* I, *per 19 diffinitionem septimi, inter quos medius sit* Z, *per 11 huius, ipsi vero* G *&* D *multiplicãtes* Z *duos faciant* T *&* K, *inter* A *&* B *cubos medios (per 12 huius) in ratione ipsorum* G D *quoniam* A *metitur* B *extremum, metietur &* T *proximum, per septimam huius, fuit autem* A *ad* T *vt* G *ad* D, *metietur itaque* G *ipsum* D. *Si verò ponamus* G *metiri ipsum* D, *eisdem namque dispositis, quoniam est* A *ad* T *vt* G *ad* D, *sed* G *metietur* D, *metitur igitur* A *ipsum* T, *&* T *ipsum* K, *&* K *ipsum* B *quare* A *(per primam communem sententiam septimi) metietur ipsum* B. *Si itaque cubus numerus cubum numerum mensus, &c.*

Propositio decimasexta.

Si quadratus numerus quadratum numerum mensus non fuerit, neque latus latus metietur, & si latus latus mensum non fuerit, neque quadratus quadratum metietur.

A 9 | G 3
B 16 | D 4

Sint A *&* B *numeri quadrati, latus ipsius* A *sit* G, *reliqui verò* B *sit* D. *Dico si* A *non metiatur* B *neque* G *ipsum* D *metietur. Si enim* G *metiretur* D, *sequeretur (ex 14 huius)* A *metiri ipsum* B, *contra hypothesim. Non itaque metitur* G *quadratum* D. *Similiter si ponamus* G *non metiri* D *nec* A *ipsum* B *metiatur, quoniam si* A *metiretur quadratum* B, *&* G *latus* D *(ex eadem) metiretur, contra suppositum. Non igitur metitur* A *ipsum* B. *Si itaque quadratus numerus quadratum, &c.*

Propositio decimaseptima.

Si cubus numerus cubum numerum nõ metiatur, neque latus latus metietur, & si latus latus non metiatur, neque cubus cubum metietur.

A 8 | G 2
B 27 | D 3

Eadem demonstrandi ratio hanc patefaciet quæ & præcedentem. Si enim A *cubus,* B *cubum nõ metiatur, neque* G *latus* D *latus metietur. Nam si* G *metiatur* D, *& (per 15 huius)* A *metietur* B, *contra hypothesim. Similiter si* G *latus* D *latus non metiatur, neque* A *cubum* B *metietur. Si enim* A *cubum* B *metiatur &* G *latus* D *metiretur, per secundam partem eiusdem, quod obstat hypothesi, & proinde inconuenit. Si igitur cubus numerus cubum numerum non metiatur, neque latus latus metietur, &c.*

Propositio decimaoctaua.

Duorum similium planorum numerorum, vnus medius proportionalis est numerus, & planus ad similem planum duplam habet rationem quam similis rationis latus ad similis rationis latus.

A 12 | I 18 | B 27
G 2 | D 6 | E 3 | Z 9

Sint duo similes plani A *&* B, *latera autem ipsius* A *sint* G *&* D, *ipsius* B *vero sint* E *&* Z. *Dico inter* A *&* B *medium proportionalem cadere, & rationẽ* A *ad* B *duplam esse rationis* G *ad* E *vel* D *ad* Z, *similis rationis laterũ, quoniam* A *&* B *similes sunt plani,* G *multiplicans* D *facit* A, *&* E *multiplicans* Z *facit* B, *per 17 diffinitionem septimi. Est itaque* G *ad* E *vt* D *ad* Z, *per 22 diffinitionem septimi. Deinde* D *multiplicans* E *faciat* I, *quoniam ergo* D *binos* G *&* E *multiplicans, facit duos* A *&* I, *erit (per 17 septimi)* A *ad* I *vt* G *ad* E. *Eadem porro de causa quia* E *multiplicans* D *&* Z *facit* I *&* B, *erit* I *ad* B *vt* D *ad* Z. *Et igi-*

tur

tur A ad I ut I ad B erit. Medius itaque proportionalis erit I inter A & B planos, & quoniam E ad B (per decimam diffinitionem quinti) duplam habet rationem quam ad I, duplam habebit idem A ad B quam G ad E, quæ rationi A ad I similis fuit. Duorum itaq; similium planorum, &c.

Propositio decimanona.

Duorum similium solidorum numerorum, bini medij proportionales sunt numeri, & solidus ad similem solidum, triplam rationem habet quam latus ad similis rationis latus.

G — 2
D — 3
E — 4
Z — 4
I — 6
T — 8
K — 6
M — 32
L — 24
A — 24
N — 48
S — 96
B — 192

Supponantur duo solidi numeri A & B ipsius A latera sint G D E, ipsius B autem Z I T: Dico inter A & B binas cadere medios proportionales numeros, & A ad B triplam habere rationem quam G ad Z similis rationis latera, multiplicans G ipsum D faciat K. Ac Z per ipsum I faciat L, cum G D E & Z I T sint similis rationis latera, per 22 diffinitionem septimi, erunt similes plani ipsi K & L. Inter eas igitur medius cadit, qui sit (per præcedentem) factus ex D in Z ipse M. Similia verò latera E & T multiplicantia M faciunt N & S, cum sit G ad D, & D ad E ut Z ad I & I ad T, erit vicißim, per 13 septimi, G ad Z ut D ad I, & E ad T. Et cùm D multiplicans G & Z faciat K & M, erit K ad M ut G ad Z, per 17 septimi. Similiter quia Z multiplicans D & I facit M & L erit, per eandem, M ad L ut D ad I, sed G ad Z fuit ut D ad I. Igitur K ad M erit ut M ad L, proportionales in ratione laterum G ad Z. Præterea quoniam E multiplicans K, qui ex duobus reliquis lateribus D & G, facit A, per 18 diffinitionem septimi. Multiplicans vero idem E ipsum M fecit N, erit (per 17 septimi) A ad N ut K ad M. Similiter cùm T multiplicans ipsum L (qui ex reliquis lateribus Z I) faciat B, multiplicans verò M fecerit S, per 17 septimi, S ad B ut M ad L, erit itaque A ad N & S ad B ut K ad M & M ad L, in ratione quidem laterum G ad Z. Et quia duo reliqua E & T latera multiplicantia M efficiunt N & S, erit N ad S ut E ad T latera. Inter A & B igitur duo ciciderunt N & S medij in ratione laterum G ad Z, scilicet A ad N, N ad S ut S ad B. Cùm autem A prima ad B quartam triplā habeat rationem quam ad secundam N, per 10 diffinitionem quinti, ipse A solidus ad B similem solidum, triplam habebit quam G latus ad Z vel D ad I aut E ad T, similis rationis latera. Duorum itaque similium solidorum numerorum, &c.

Propositio vigesima.

Si duorum numerorum vnus medius fuerit proportionalis numerus, similes plani erunt ipsi duo numeri.

I — 12
G — 24
B — 36
A — 24
G — 12
A — 6
D — 3
E — 4
Z — 6
T — 8
S — 12
Z — 6
E — 2
D — 12

Sit inter duos numeros A & B medius proportionalis numerus G. Dico A & B similes planos esse. Ostendamus prius in ratione pura numerorum siue non multiplici. Dentur (per 35 septimi) duo minimi in ratione ipsarum A G B qui sint D E. Hi metientur ipsos A G æqualiter, similiter & ipsos G B æqualiter, per 21 septimi. Quoties D E metiuntur ipsos A G, tot sint in Z vnitates, quoties verò metiuntur ipsos G B, tot sint in I vnitates. Quoniam D multiplicans Z facit A, & multiplicans E ipsum I facit B, plani sunt A & B, eorum verò latera D Z & E I. Cùm autem ex D prima & I quarto fiat G, ex secundo verò E & tertia Z fiat idem G, erit (per secundam partem 19 septimi) D ad E ut Z ad I, & (per 13 septimi) vicißim D ad Z ut E ad I proportionalia: igitur D Z & E I latera similes efficiunt planos A & B, per 22 diffinitionem septimi. Secundo in ratione multiplici, quæ est continui ad discretum. Sit inter duos numeros B & A medius proportionalis numerus G: Dico A & B similes esse planos. Quoniam ponitur ratio multiplex, minimus A metitur B extremum, quare (per 7 huius) metietur & proximum G, & G similiter ipsum B: nam sunt proportionales. Quoties A minor metitur G, toties D vnitas metiatur E numerū. Quoties igitur D metitur E, toties

G metietur B, vicißim itaque D metietur A vt E ipsum G, ac insuper D metietur G vt I ipsum B, per 15 septimi. Quoties D E metiuntur A G, tot sint vnitates in Z. Quoties vero similiter metiuntur iidem D E ipsos G B, tot sint vnitates in I. Quoniam sub D & Z comprehenditur A, sub E & I vero continetur B, ipsi A & B plani sunt numeri, per 17 diffinitionem septimi. Eorum verò latera D Z & E I. Quia vero sub D & I extremis fit G, & sub medijs E & Z fit idem G, quatuor magnitudines D ad E vt Z ad I sunt proportionales, per 16 sexti, & 19 septimi. Vicißim igitur, per quindecimam septimi, erunt D ad Z, vt E ad I latera proportionalia. Ipsi igitur A & B similes erunt plani, per 22 diffinitionem septimi. Si duorum itaque numerorum vnus medius fuerit, &c.

MONITVM.

Aliquas seorsum demõstrare volumus propositiones, vt hac secunda parte segregantes rationis multiplicis naturam ab aliarum rationũ natura, cùm ea minimos numeros in minimis eius partibus veluti reliquæ nõ suscipiat, sed loco minimorum semper vnitatem cum numero recepit. Quod itaque per minimos in alijs rationibus ostenderunt Theon & Campanus, illud idem multiplici per vnitatem & numerum conuenire rationi docuimus hoc loco, licet non semper quæ minimis numeris conueniunt, vnitati & numero conuenire recipiamus. Sed cùm rationes puras numerorum per primos & minimos ostendemus aliquid efficere, ididem cùm opus erit facto, rationes multiplices per vnitatem & numerum efficere demonstrabimus: nam illæ sunt eius rationis minimè partes.

Propositio vigesimaprima.

Si duorum numerorum duo fuerint medij proportionales numeri, similes solidi erunt ipsi duo numeri.

T 3 — K 3 — L 4 — M 4

N 3 — E 9 — Z 12 — I 16 — S 4

A 27 — G 36 — D 48 — B 64

Sint duorum A & B bini medij continuè proportionales G & D. Dico A & B similes esse solidos. Ponantur enim (per secundam huius) tres minimi in ipsorum A G D B ratione, sintque E Z I. Ipsorum igitur extremi E & I sunt (per 20 huius) similes plani. Sint autem ipsius E latera T & K, ipsius I verò latera M & L. Et cum (per hypothesim) E Z I sint in ratione ipsorum A G D, erunt æqua ratione E ad I sicut A ad D, per 14 septimi. Insuper cùm E Z I sint minimi, ipsi metientur ipsos A G D æqualiter, per 21 septimi. Quoties autem E I metiuntur ipsos A D, tot sunt vnitates in N. Quoties verò metiuntur ipsi E I reliquos G B, eandem rationem habentes, tot sint vnitates in S. Cum enim T & K sint latera ipsius E, qui sumptus per vnitates numeri N faciat A, sequetur T K N latera esse ipsius A solidi, per decimamoctauam diffinitionem septimi. Similiter L & M faciunt I, qui per vnitates ipsius S sumptus facit B, quare L M S erunt ipsius B solidi latera, per eandem. Solidi itaque erunt A & B. Dico quod similes erunt solidi, quoniam E multiplicans N & S ipsos fecit A & G. Erit, per decimamseptimã septimi, N ad S sicut A ad G. Sed sicut A ad G sic, per hypothesim, E ad Z, & Z ad I. Quia vero E ad I duplam habet rationem quam ad Z, per 10 diffinitionem quinti, & duplam quam T ad L vel K ad M latera, per 18 huius. Eandem igitur habent T ad L & K ad M rationem quam E ad Z vel Z ad I. Et proinde quam A ad G vel N ad S, quæ fuerunt eædem ostensæ. Sicut igitur A ad G sic fuit N ad S, sic T ad L, sicque K ad M, latera scilicet ipsius A solidi, ad latera ipsius B solidi proportionalia: qui igitur (per 22 diffinitionem septimi) similes erunt solidi. Si itaque duorum numerorum duo fuerint, &c.

MONITVM.

Hanc in multiplici ratione noluimus ostendere, prolixitatem vitantes: sufficit enim præcedentem ac alias quasdam ostendisse. Cùm enim his demonstrandis exquiruntur minimi datæ rationis numeri, vt eos eandem rationem habentes alios metiri ostendamus. Scimus perspicuè eos, quorum vnus est vnitas, verè propositæ rationis minimas numerorum partes obtinere, & proinde metiri reliquos necessariò maiores (per 15 septimi) cùm sint multiplices, vt minimi reliquarum rationum, maiores metiuntur, per 21 septimi. Quia vero his demonstrationibus, numerorum generalem naturam docentibus, per minimorum numerorum methodum, facilis fit notitia an his conueniant rationes multiplices, minimos numeros non habentes, an non. Demonstrationem rationum non multiplicium

cum posthac sequemur tantùm. Quod si aliquid occurrat obscurius, monito apposito exponemus illico.

Propositio vigesimasecunda.

Si tres numeri continuè proportionales fuerint, primúsque fuerit quadratus, & tertius quadratus erit.

Sint tres continuè proportionales numeri A B G, *quorum cùm extremorum vnus sit medius, ipsi extremi similes plani erunt, per vigesimam huius. Quare si primus fuerit quadratus, & tertius (sibi similis planus) quadratus erit. Si itaque tres numeri continuè, &c.*

A 4
B 6
G 9

Propositio vigesimatertia.

Si quatuor numeri continuè proportionales fuerint, primúsque cubus fuerit, & quartus cubus erit.

Haud secus hanc ostendet 21 huius. Cùm autem inter A *&* D *duo medij proportionales constituantur, sequetur* A *&* D *similes esse solidos. Atqui* A *cubus est primus, & quartus itaque* D *sibi similis solidus cubus erit. Si igitur quatuor numeri continuè proportionales, &c.*

A 8
B 12
G 18
D 27

Propositio vigesimaquarta.

Si duo numeri rationem habuerint, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem quadratus fuerit, & secundus quadratus erit.

Duo A *&* B *numeri rationem habeant, quam quadrati* G *&* D. *Sit autem* A *quadratus: Dico &* B *quadratum esse. Quoniam duorum* G *&* D *vnus est medius proportionalis numerus per 11 huius. Ipsorum* A *&* B *vnus erit medius, per octauam huius, eandem enim habent rationem. Trium igitur primus* A *est quadratus, & tertius* B *quadratus erit, per 22 huius. Si itaque duo numeri rationem, &c.*

A 4 — G 16
6 — 24
B 9 — D 36

Propositio vigesimaquinta.

Si duo numeri adinuicem rationem habuerint quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem cubus fuerit, & secundus cubus erit.

Duo numeri A *&* B *rationem habeant quam cubus* G *ad cubum* D. *Sit autem* A *cubus: Dico &* B *cubum esse. Quia duorum* G *&* D *bini sunt medij proportionales numeri, cùm sint cubi, per duodecimam huius. Ipsorum* A *&* B *(eandem rationem habentium) totidem erunt medij, per octauam huius. Sed quatuor continuè proportionalium primus* A *est cubus, & quartus* B *cubus erit, per vigesimamtertiam huius. Si igitur duo numeri rationem adinuicem, &c.*

A 8 — G 64
12 — 96
18 — 144
B 27 — D 216

Corollarium.

Inter quadratum & non quadratum, non cadit ratio quadratorum. *Nam si primus quadratus sit & secundus quadratus esset, contra hypothesim. Similiter inter cubum & non cubum, non cadit ratio cuborum. si enim primus cubus esset & secundus (contra suppositum) cubus esset, quod fieri non potest.*

Propositio vigesimasexta.

Similes plani numeri, adinuicem rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

A	18	D	9
G	24	E	12
B	32	Z	16

Sint similes plani A *&* B *numeri: Dico* A *ad* B *rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Cùm autem* A *&* B *sint similes plani, inter eos cadet vnus medius qui sit* G, *per 18 huius. Deinde ponantur in ratione ipsorum* A G B *tres minimi* D E Z *quorum extremi quadrati erunt, per corollarium secundæ huius. Et quoniam (per 14 septimi) est* A *ad* B *æqua ratione vt* D *ad* Z. *Sed* D *&* Z *sunt quadrati: Igitur* A *ad* B *rationem habet quam quadratus numerus* D *ad quadratum* Z. *Similes igitur plani numeri adinuicem rationem, &c.*

Corollarium.

Hinc sequitur quotlibet non similes planos dari numeros. *Habentes enim rationem superparticularem numeri, dissimiles sunt plani, Si autem similes essent plani, inter eos caderet medius, & rationem haberent quadratorum numerorum, per 18 & 26 huius, cuius oppositum patet per coroll. 8 huius. Superparticulares igitur non similes sunt plani, quiquidem sunt numero infiniti (nempe ab vnitate & quauis parte dicti). Præterea habentes rationem superbipartientem, non similes sunt plani, cùm minimi eius rationis numeri sese binario excedant, inter quos nec cadit medius proportionalis. Si enim caderet excessus proportionalium, essent æquales, quod obstaret 19 quinti, quod nec fieri potest, vt exemplo 5 ad 3 non recipit medium. Si enim reciperet is esset 4 cùm nullus alius inter eos cadat. Si enim fieri possit, esto* A C *ad* G E *vt* G E *ad* B *ab ipso* A *æqualis ipsi* G E *secetur* A D, *ab ipso* G E *verò ipsi* B *æqualis* G I. *Est igitur* A C *totum ad* G E *totum, vt* A D *ablatum ad* G I *ablatum, cùm* A D *&* G I *ipsis* G E *&* B *sint æquales. Reliquũ igitur* D C, *vnitas ad reliquum* I E *vnitatem, erit sicut totum* A C *ad totum* G E, *per 19 quinti, quod fieri non potest, cùm vnitates sint æquales. Quia igitur inter minimos huius rationis nullus cadit, nec inter maiores cadet, per 8 huius. Insuper duo quilibet primi numeri dissimiles sunt plani, cùm non habeant latera proportionalia, iuxta 22 diffinitionem septimi. Nam eorum latera sunt vnitas & totus numerus. Sequeretur itaque, contra octauam quinti, eandem vnitatem ad duos inæquales numeros eandem habere rationem, quod fieri non potest.*

Propositio vigesimaseptima.

Similes solidi numeri, adinuicem rationem habent quam cubus ad cubum numerum.

A	16	G	8
E	24	I	12
Z	36	T	18
B	54	D	27

Sint A *&* B *similes solidi. Dico eos habere rationem quam cubus numerus ad cubum numerum. Quoniam* A B *sunt similes solidi, inter eos cadant duo medij* E *&* Z, *per 19 huius. Dētur autem totidem minimi in ipsorum* A E Z B *ratione* G I T D, *per secundam huius, quorum extremi* G D *cubi erunt, per corollarium secundæ huius. Cùm autem sint omnes proportionales, æqua ratione erit* A *ad* B *vt* G *ad* D, *per 14 septimi. ipsi itaque* A *ad* B *rationem habebunt cubi* G *ad cubum* D. *Similes igitur solidi numeri, &c.*

Corollarium primum.

Si duo numeri rationem habuerint quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani erunt ipsi duo numeri. Si vero rationem habuerint quam cubus ad cubum numerum, similes solidi erunt.

Habeant

Habeant prius A ad B numeri rationem quam habent G ad D quadrati numeri: Dico A & B similes esse planos, cùm enim inter G & D quadratos vnus cadat medius, per 11 huius, inter A & B eandem rationem habentes, totidem (per 8 huius) cadent. Ipsi igitur A & B similes sunt plani, per vigesimam huius.

A 18	G 16
B 72	D 64

Ad secundum.

A 16	G 8
B 54	D 27

Si A ad B rationem habeant, quam A ad D cubi G, idem ostẽdetur de solidis, cùm enim inter G & D cubos duo cadant medij, per 12 huius, inter A & B eandem rationem habentes, totidem cadent, per 8 huius, ipsi igitur A & B (per vigesimam primam huius) similes erunt solidi. Si itaque duo numeri rationem habuerint, &c.

Corollarium secundum.

Si aliquis numerus quadratum multiplicans, quadratum non fecerit, ipse quadratus nõ erit. *Nam si quadratus esset, ipsi similes essent plani qui medium haberent, per 18 huius, & ab ipso medio productus aequus esset ei qui sub extremis quadratus, per vigesimam septimi. Ipse igitur ab extremis productus quadratus esset, aequus ei qui a medio, sed quadratus non est is productus. Nec igitur propositus quadratum multiplicans quadratus erit.*

MONITVM.

Haec corollaria addidimus in obsequium decimi, ne circa haec demonstranda haereamus, cùm de rationibus quadratorum numerorum agendum erit, vt latera eorum sint longitudine commensurabilia absque demonstrandi prolixitate.



EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber nonus.

Propositio prima.

SI duo numeri similes plani, se inuicem multiplicantes, aliquem fecerint, factus ex eis quadratus erit.

A 6 — D 36 — E — B 24 — G 144

Sint duo numeri similes plani A *&* B *& multiplicans* A *planum* B *faciat* G*: Dico* G *quadratum esse. Multiplicans* A *seipsum faciat* D *quadratum, per 19 diffinitionem septimi, & quoniam* A *duos* A *&* B *multiplicans, binos fecit* D G*, erit (per 17 septimi)* D *ad* G *vt* A *ad* B*. Quia verò duorum* A B *similium planorum vnus est medius proportionalis, per 18 octaui, & inter* D *&* G *eandem rationem habentes, vnus erit medius, per octauam octaui, qui sit* E*: sed trium* D E G *proportionalium primus* D *quadratus est, & tertius* G *quadratus erit, per 22 octaui. Si itaque duo numeri similes plani, &c.*

Propositio secunda.

Si duo numeri se inuicem multiplicantes quadratum fecerint, ipsi similes plani erunt.

A 2 — D 4 — B 8 — G 16

Sint numeri A *&* B *sese multiplicantes faciant* G *quadratum. Dico ipsos* A *&* B *similes esse planos. Multiplicans* A *seipsum faciet* D *quadratum cùm autem* A *duos* A *&* B *multiplicãs, binos faciat* D G*, erit* D *ad* G *vt* A *ad* B*, per 17 septimi. Et quoniam duorum quadratorum* D G *vnus est medius, per 11 octaui, & inter* A *&* B *eandem rationem habentes, vnus erit medius, per octauam octaui. Sed si duorum* A *&* B *vnus fuerit medius, ipsi* A *&* B *similes plani erunt, per 20 octaui. Si itaque duo numeri se inuicem multiplicantes, &c.*

Corollarium.

Hinc fit, duos quadtatos semper quadratum producere. *Sunt enim similes plani (per primã huius).* Quadratum verò cum non quadrato, non quadratum facere. *Si enim facerent similes essent plani, per hanc, sed non sunt. Non quadratum igitur faciunt.* Si verò quadrarus cum aliquo quadratum fecerit, aliquis ille quadratus erit. *Nam cum quadrato ipsum multiplicante similis planus est, per hanc, ille aliquis.* Si autem quadratus cum aliquo quadratum non fecerit, nec aliquis ille quadratus erit. *Si enim quadratus esset, cum quadrato quadratum efficeret, per primam partem huius corollarij.*

Propositio tertia.

Si cubus numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.

B 64 — 32 — 16 — A 8 — D 4 — G 2 — VNITAS.

Numerus A *cubus seipsum multiplicans faciat aliquem* B*. Dico* B *cubum esse. Sit ipsius* A *cubi latus* G*, quod per se ductum faciat* D*. Idem igitur* G *per* D *ductum faciet ipsum* A*, per 20 diffinitionem septimi: metietur igitur* G *ipsum* D *per vnitates eiusdem* G*, ac per easdem* D *metietur cubum* A*, necnon & vnitas ipsum* G *per easdem ipsius* G *vnitates metietur. Proportionales itaq; sunt* A D G *& vnitas: sunt enim æquemultiplices, similiter cùm* A *metiatur* B *per suas vnitates, vnitas verò per easdẽ metiatur* A*, erit vnitas ad* A *vt* A *ad* B*. Sed inter vnitatem &* A *duo cadunt medij, ac inter æquemultiplices eandem rationem habentes. Inter* A *igitur &* B *duo cadent medij per 8 octaui. Quatuor igitur proportionalium numerorum primus* A *cubus est, per hypothesim, & quartus* B *(per 23 octaui) cubus erit. Si itaque cubus numerus seipsum multiplicans aliquem. &c.*

Propositio quarta.

Si cubus numerus cubum numerum multiplicans aliquem fecerit, factus cubus erit.

Cubus numerus A cubum B multiplicans aliquem G faciat, per seipsum verò idem A faciat D. Dico G cubum esse. Quoniam autem A duos A & B multiplicans aliquos D & G facit, erit (per 17 septimi) D ad G vt A ad B. sed quia duorum A & B cuborum duo sunt medij, per 12 octaui. Inter eandem itaque rationem habentes D & G duo cadent medij, per 8 octaui. Sed D cubus est, per praecedentem, nam ex A cubo factus. Si igitur quatuor proportionalium primus D cubus fuerit, & quartus G cubus erit, per 23 octaui. Si itaque cubus numerus, &c.

A 8 | 12 | 18 | B 27
D 64 | 96 | 144 | G 216

Propositio quinta.

Si cubus numerus numerũ aliquem multiplicans cubum fecerit, & multiplicatus cubus erit.

Cubus numerus A aliquem B multiplicans cubum faciat G. Dico B cubum esse. Multiplicans seipsum A faciat D, quoniam A binos A B multiplicans duos fecit D & G, erit D ad G vt A ad B, per 17 septimi. cum autem D sit cubus (per tertiam huius) nam ex A cubo factus, G vero cubus, per hypothesim, inter D & G duo cadent medij, per 12 huius. Et igitur inter A & B eandem rationem habentes, totidem cadent, per 8 octaui, atqui quatuor proportionalium A primus cubus est, per hypothesim, & quartus B cubus erit, per 23 octaui. Si itaque cubus numerus numerum aliquem multiplicans, &c.

A 8 | B 27
D 64 | G 216

Corollarium.

Hinc sequitur, si cubus non cubum multiplicet, ipse non cubum faciet. *Nam si cubum faceret, & multiplicatus cubus esset, contra hypothesim, quod inconueniret, per hãc supponitur enim non cubus. Si verò cubus aliquem multiplicans non cubum fecerit, nec aliquis ille cubus erit. Nam si ille aliquis cubus esset factus similiter esset cubus, per quartam huius, contra hypothesim, quod fieri non potest.*

Propositio sexta.

Si numerus seipsum multiplicans cubum fecerit, & ipse cubus erit.

Numerus A seipsum multiplicans faciat cubum B. Dico & A cubũ esse, multiplicans A cubum B faciat G. cubus erit ipse G, per 20 diffinitionem septimi, ex tripla ipsius A multiplicatione factus. Quoniam autem A duos A & B multiplicans ipsos B & G fecit, erit G ad B vt B ad A, per 17 septimi. Sed si bini B ad A rationẽ habeant quã cubus ad G cubum B, primus vero B cubus fuerit, & secundus A cubus erit, per 25 octaui. Si igitur numerus, &c.

A 2
B 64
G 512

Propositio septima.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, fecerit aliquem factus solidus erit.

Sit cõpositus A numerus qui ipsum B multiplicans faciat G. Dico G solidum esse. cùm enim A sit cõpositus, metietur eum aliquis, per 14 diffinitionẽ septimi, sit ille D, qui eundem A per vnitates numeri E metiatur: quoniam duo numeri D & E sese multiplicantes faciunt A, qui rursus ipsum B multiplicans reliquum G fecit ipse igitur G ex tribus sese multiplicantibus D E & B, consurgens (per 18 diffinitionem septimi) solidus erit, latera verò eius ipsi D E B numeri. Si itaque compositus numerus, &c.

D 3 | A 6 | G 48
E 2 | B 8

Propositio octaua.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, Tertius ab vnitate quadratus erit, & vnum relinquentes omnes. Quartus autem cubus & binis relictis omnes. Septimus verò cubus simul & quadratus, & quinque relictis omnes.

VNITAS
A 3
B 9
G 27
D 81
E 243
Z 729

Sint ab vnitate continuè proportionales A B G D E Z: Dico tertium ab vnitate, scilicet B & vno relicto omnes, scilicet D & Z, quadratos esse quartum verò G & binis relictis omnes, scilicet Z, &c. cubos esse. Septimum autē Z & quotquot fuerint quinque relictis omnes, simul cubos & quadratos esse: quoniam vnitas metitur A per sui ipsius vnitates. Metietur quilibet sequētem per easdem ipsius A vnitates, cum sint continuè proportionales. Igitur A seipsum multiplicans facit B quadratum, per 19 diffinitionē septimi: sed quia trium B G D primus B quadratus est, & tertius D quadratus erit, per 22 octaui. Similiter ipsorum D E Z & quotlibet sequentium, D existente quadrato, & tertius Z quadratus erit, per eandem. Insuper cum A multiplicās se faciat B, multiplicans verò B faciat G, ipse G cubus erit per 20 diffinitionem septimi: siquidem quatuor proportionalium primus G cubus fuerit, & quartus Z cubus erit, per vigesimam tertiam octaui, sicq; infinitè quotcunque postponantur ipsi Z proportionales continui. Sed & quadratus ostensus est idem Z & hoc ordine omnes, cùm tertius & quartus semper septimum restituant. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c.

Propositio nona.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, qui verò post vnitatem quadratus fuerit, & reliqui omnes quadrati erunt, & si qui post vnitatem cubus fuerit, & reliqui omnes cubi erunt.

VNITAS.
A
B
G
D
E
Z

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A B G D E Z. ad primum, sit qui post vnitatem quadratus, scilicet A. Dico reliquos omnes quadratos esse. Ad secundum autem si ipse A fuerit cubus, dico omnes cubos esse primo cum vnitas multiplicet A per sui ipsius vnitates, & A per easdem multiplicet B, quadratus erit B (per 19 diffinitionem septimi) & A quadratus ex hypothesi sed sicut A ad B, sic B ad G, & G ad D, &c. Si duo igitur B & G rationem habuerint quadratorum A ad B, primus verò B sit quadratus, & secundus G quadratus erit, per vigesimamquartam octaui, & sic G & D, &c. omnes quadrati ostendentur: si verò A post vnitatem cubus fuerit: quoniam similiter vnitas metitur A & A ipsum B & B sequentem G, & singuli succedentes per vnitates ipsius A, sed A cubus (ex hypothesi) seipsum multiplicans B facit igitur B (per tertiam huius) cubus erit. Sicut autē vnitas ad A, sic A ad B, sic B ad G, &c. quotcunq; sint in ratione A ad B cuborum. Si primus B cubus fuerit, & secundus G cubus erit, per 25 octaui si verò G sit, erit & D & reliqui omnes. Si itaque ab vnitate quotcunque continuè, &c.

Propositio decima.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, qui verò post vnitatem quadratus non fuerit, nec alius vllus quadratus erit, quam tertius ab vnitate & vnum relinquentes omnes, & si qui post vnitatem cubus non fuerit, nec alius vllus cubus erit, quam quartus ab vnitate ac duos relinquentes omnes.

Sint

Sint ab vnitate continuè proportionales quotcunque A B G D E Z *numeri. Qui verò post vnitatem scilicet* A *quadratus non sit: Dico nullum reliquorum esse quadratum, quam tertium ab vnitate & reliquos vno intermisso scilicet* B D Z, *&c. Si verò* A *cubus non sit, nec alium aliquem cubum esse, quam quartum ab vnitate ac binis relictis omnes scilicet* G Z, *&c. Quoniam proportionales sunt, erunt quadrati* B D Z, *&c. per octauam huius. Si enim aliquis alius posset esse quadratus, sit* G, *erit* G *ad* B *vt* B *ad* A, *&* A *ad vnitatem, per corollarium quartæ quinti. Igitur* B *ad* A *rationem habent quadratorum* G *ad* B. *Si itaque primus* B *sit quadratus, secundus* A (*per 24 octaui*) *quadratus erit, contra hypothesim, quod fieri non potest, æquè probatur hæc* (*per 22 octaui*) *si* G *primus sit quadratus, &* A *tertius erit quadratus, supponitur autem non quadratus, ergo absurdum. Ad secundum autem existente* A *non cubo. Si fieri possit, detur aliquis alius horum cubus, præter* G *quartum & Z, &c. sit* D. *Quoniam est* D *ad* G *vt* G *ad* B, *&* B *ad* A, *si primus* D *sit cubus. Quartus* A *cubus erit, per 23 octaui contra suppositum, positus est enim* A *non cubus, quod fieri nequit. Similiter per 25 octaui patet vt in quadrato, si itaque ab vnitate quotcunque continuè, &c.*

VNITAS.	
A	3
B	9
G	27
D	81
E	243
Z	729

Propositio vndecima.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, minor metitur maiorem per aliquem præexistentem in proportionalibus numeris.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales A B G D *numeri. Dico minorem* A *metiri maiorem scilicet* B G *vel* D, *per aliquem ipsorum* A B *vel* G *in proportione existentium. Quia sunt proportionales quoties vnitas metitur* A, *toties* A *metitur* B *&* B *ipsum* G, *&c. Et vicissim per 15 septimi, Quoties vnitas metitur* B *toties* A *metitur* G. *Sed vnitas metitur* B *per vnitates ipsius* B, *& igitur* A *metitur* G, *per easdem ipsius* B *vnitates. Præterea erit æqua ratione per 14 septimi, eadem vnitas ad* G *vt* A *ad* D. *Sed vnitas metitur* G *per ipsum* G. *Igitur* A *metietur* D *per eundem* G. *Et similiter in quotcunque numeris, per eandem decimamquartam septimi idem patebit. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c.*

VNITAS	
A	2
B	4
G	8
D	16

Propositio duodecima.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, Quot primi numeri vltimum metientur, tot & vnitati proximum metientur.

Sint ab vnitate quotlibet continuè proportionales numeri, A B G D, *Metiatur verò aliquis primus numerus qui sit* E *vltimum* D: *Dico eundem* E *metiri* A *vnitati proximum. Quod si* E *non metiatur* A, *erunt adinuicem primi, per 31 septimi. Quoniam* A B G D *sunt ab vnitate proportionales,* A *seipsum multiplicans ipsum* B *facit. Itaque* B *ad* E *primus erit, per 27 septimi. Quia verò* A *multiplicans* B *fecit* G, *&* G *ad eundem* E, *primus erit, per 26 eiusdem. Similiter infinitè* A *ipsum* G *multiplicans efficit* D. *Quare &* D *ad* E *primus erit, per eandem, non igitur metitur* E *ipsum* D, *vt positum fuit, quod inconuenit. Metitur ergo* E *ipsum* A *vnitati proximum. Si igitur ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales, &c.*

VNITAS.		
A	4	3
B	16	9
G	64	27
D	256	81
E	2	3

Propositio decimatertia.

Si ab vnitate quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, Qui verò post vnitatem primus fuerit, Maximum nullus alius metietur præter præexistentes in proportionalibus numeris.

Sint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales A B G D, *sit autem qui post vnitatem scilicet* A *primus. Dico nullum numerum metiri* D *maximum, præter ipsos* A B G D *in proportione præexistentes, si enim alius ipsum* D *metiri credatur, is erit primus aut compositus, si fieri possit, esto* E. *Qui primus esse non potest, siquidem* E *primus existens metiretur* D. *Is metiretur* A *primum ac vnitati proximum per 12 huius, quod fieri non potest. Non igitur potest esse* E *primus. Sed compositus esto* E, *tum metitur cum aliquis primus, per 33 septimi. Quiquidem non potest esse alius a numero* A. *Nam cùm* E *metiatur* D, *quilibet primus metiens* E *metiretur & D, per primam sententiam septimi, metiens vero* D *maximum, metiretur &* A *vnitati proximum (per 12 huius) & primum, quod fieri non potest. Solus igitur* A *primorũ metiri poterit* E *metientem maximum* D. *Quod si esse possis metiatur* A *ipsum* E, *per vnitates numeri* Z. *Igitur* A *binos* Z *&* G *multiplicãs, binos* E *&* D *fecit erit itaq;* E *ad* D *vt* Z *ad* G, *per 17 septimi. Quia igitur* E *metitur* D, *&* Z *ipsum* G *metietur. Similiter vt ostendimus in* E *docebimus non esse* Z *primũ & reliqua. Nam si primus esset,* Z *metiens* G *metiretur & ipsum* A *(per 12 huius) primum, quod fieri non potest. Quare compositus erit* Z, *quem (per 33 septimi) metietur aliquis primus. Is necessariò erit* A *solus. Nam alius primus metiens* Z *metientem* G *metiretur, & eundem* G *per primam sententiam septimi, & proinde ipsum* A *primum, quod fieri non potest, solus igitur* A *primus numerum* Z *metitur. Esto per* I *Ideo* A *binos* I *&* B *multiplicans efficit binos* Z *&* G. *Erit itaque (ex 17 septimi)* Z *ad* G *vt* I *ad* B, *sed metitur* Z *ipsum* G. *Metietur itaq;* I *ipsum* B. *Quòd si rursus primus sit* I, *metiens* B *metietur &* A *(per 12 huius) primum, quod est absurdum. Est itaque* I *compositus. Quem solus* A *primorum metietur, vt iam antea in* E *&* Z *ostendimus. Metiatur itaque* A *ipsum* I *per* T. *Sequetur* A *multiplicante binos* T *& seipsum binos* I *&* B *producere. Quare erit* I *ad* B *vt* T *ad* A *per 17 septimi. Sed metitur* I *ipsum* B. *Metietur itaque* T *ipsum* A *primum, est igitur eidem* A *æqualis* T. *Sed* A *est medius proportionalis inter* T *&* I, *per 20 septimi. Cum sub extremis* I T *productus* B *æquetur ei qui à medio* A *idem* B *producitur. Quod est extra potentiam. Nullus itaque maximum* D *metietur præter numeros* A B G *in proportione præexistentes. Quorum quisque minor maiorem metitur, per 11 huius. Sunt enim in ratione multiplici ab vnitate proportionales. Si igitur ab vnitate quotlibet, &c.*

VNITAS.

A — 3 — T ——
B — 9 — I ——
G — 27 — Z ——
D — 81 — T ——

Propositio decimaquarta.

Si minimum numerum primi numeri mensi fuerint, nullus alius primus numerus ipsum metietur, præter eos qui in principio metiuntur.

Esto minimus A *quem metiantur quotlibet primi numeri* B G D. *Dico nullum alium primum metiri numerum* A *præter ipsos* B G D. *Quòd si alius primus eum metiri credatur, sit ille* E, *qui numerum* A *per* Z *metiatur. Quoniam duo numeri* E *&* Z *faciunt* A, *quem metiuntur aliqui primi* B G D *sequetur (ex 32 septimi) ipsos* B G D *vnum ipsorum* E *vel* Z *metiri. Atqui ipsum* E *non metiuntur, cùm sit primus, ex hypothesi. Ipsi itaque* B G D *ipsum* Z *metientur, minorem quidem numero* A *quem* Z *per* E *mensus est. Prior igitur* A *positus non erit minimus ab ipsis* B G D *mensus (contra hypothesim) quod esset inconueniens. Nullus igitur alius præter ipsos* B G D, *numerum* A *metietur. Si itaque minimum numerum primi numeri, &c.*

B — 2 —— A — 30 ——
G — 3 —— E ——
D — 5 —— Z ——

Propositio decimaquinta.

Si fuerint quotlibet numeri continuè proportionales minimi eandem eis habentium rationem: numerus aliquem eorum metiens, erit non primus alteri duorum minimorum huius rationis.

Sint

Sint quotcunque numeri A B C D E *continuè proportionales minimi eandem rationem habentium eis, quorum alterum (qui sit* C*) metiatur aliquis numerus* H, *sint* F & G *duo minimi huius rationis: Dico* H *esse non primum ad* F *vel* G. *Ponantur (per 2 octaui) tres minimi huius rationis* A *ad* B, *qui sint* P Q R. *Postmodum verò quatuor* K L M N *per eandem, & sic vsque ad multitudinem propositorum* A B C D E. *Constat (ex demonstratione secunda octaui)* F *per* P Q & R *facere* K L M, *per* K L M N *verò eundem* F *facere* A B C D. *Cùm enim* H *metiatur* C. *Ipse* H *ad vnum eorum* F *vel* M *non erit primus, per corollarium 32 septimi. Quòd si fit* F, *optatum consequimur: siquidem sit* M *ad quem* H *non sit primus, & ad vnum ipsorum* F *vel* R *erit non primus, per idem corollarium. Quòd si rursus fit* F *erit vnus eorum* F *vel* G, *optatus: si autẽ non, sed sit* R *ad quem* H *non sit primus, & ad ipsum* G *(eundem* R *facientem per secundam octaui) erit non primus idem* H, *per idem corollarium: sed* G *est vnus eorum* F *vel* G *qui in principio minimorum huius rationis. Si igitur fuerint quotlibet numeri, &c.*

H —— E — 2 — G — 3 — P — 4 — Q — 6 — R — 9 — K — 8 — L — 12 — M — 18 — N — 27 — A — 16 — B — 24 — C — 36 — D — 54 — E — 81

MONITVM.

Licet hanc decimamquintam in vulgato græco exemplari nõ reperiamus, tamen Campanum eam ab Euclide traditam scripsisse legimus: quod duabus de causis verum fuisse arbitramur, vt scilicet decimamsextam sequentem (quam Theon per numeros non demonstrauit, sed per tertiam & quartam secundi) numeris demonstraret. Quamuis autem solos numeros qui Geometricis quantitatibus conueniant, exponat Euclides, & ideo (ad extrema fugienti) sufficiat eos numeros per continuorum præcepta prioribus sex libris exposita demonstrare. Non tamen ea familiaritate numeros per continuorum notitiam, qua per eorundem numerorum intelligentiam consequi videbimur: altera quod huius decima quinta auxilio proximam decimamsextam ampliorem ac vberiorem tradimus, ad quotcunque proportionales, quam Theon ad tres eam extendi tantùm docuit, ob assumptas linearum secundi libri sectiones, quare existimantes Euclidem Geometriam potius fæcundam quàm sterilem tradendam optasse. Non dubitamus quin hæc Euclidis fuerit, & insuper plures alia quæ vitio & temporis iniuria deperdita iacent.

Propositio decimasexta.

Si quotlibet numeri continuè proportionales fuerint, minimi eandem eis habentium rationem, quilibet eorum ad compositum ex reliquis primus erit.

Sint quotcunque proportionales numeri minimi suæ rationis A B C D: *Dico quemlibet eorum (qui primo sit* D*) ad compositum ex reliquis* A B C *primum esse: quod si non sit, metiatur ipsum* D *& reliquum compositum* A B C *aliquis numerus* E. *Dentur insuper duo minimi rationis* A B C D *(per 35 septimi) hi* F & G. *Quoniam autem* E *metitur vnum eorum* A B C D, *erit idem* E *ad vnum ipsorum* F *vel* G *non primus, per 15 huius. Aliquis igitur numerus metietur ipsum* E *& vnum eorum* F *vel* G *qui sit* H. *Quoniam enim* H *metitur* E, *metietur &* D *quem metitur idem* E, *per primam sententiam septimi. Præterea cùm* H *metiatur (per hypothesim) vnum ipsorum* F *vel* G, *idem* H *metietur omnes medios inter* A & D, *per eandem primam sententiam. Nam vterque ipsorum* F *vel* G, *omnes medios per proximos ipsis (vt* L I K*) efficit, per secundam octaui. Rursus cùm* H *metiatur* F, *metientem totum* A B C, *idem* H *metietur totum* A B C, *sed metitur ablatum* B C *(medios) metietur ergo & reliquum* A, *per 2 sentent. septimi ipsum* H *itaque sequetur metiri extremos* D & A *qui primi sunt (per tertiam octaui) quod esset absurdum. Quare primus erit* D, *ad compositum* A B C *ex reliquis. Secundò dico idem esse in singulis, puta* C *primum esse ad compositum* A B D *quod si non sit sumatur vt prius* E *metiens* C *ac ipsum* A B D, *qui quidem* E *erit non primus ad vnum ipsorum* F *vel* G, *per 15 huius, metiatur ergo eos* H. *Quoniam* H *metitur* E, *metietur & totum* A B C D *quem* E *metitur, & quoniam metitur* H *vnum eorum* F *vel* G, *metietur vnum extremorum* A *vel* D, *qui ex ipsis* F *vel* G *fiunt, per secundam octaui, si ducantur in medios* L *vel* K. *Et insuper idem* H *metietur medios*

F — 2 — G — 3 — L — 4 — I — 6 — K — 9 — A — 8 — B — 12 — C — 18 — D — 27

E —— ABC — 38

H —— ABD — 47

B C, per primam sententiam septimi, cùm metiatur F vel G per hypothesim eos metientes, per 2 octaui, sed totum A B C D metitur idem H (vt ostendimus) eò quod metiatur E. Metietur ergo & reliquum, scilicet compositum, ex A & D extremis, per secundam sententiam septimi, atqui metitur vnum eorum A vel D, nam metitur vnum eorum F vel G ipsos A & D efficientium. Metietur ergo idem H vnum eorum A vel D & reliquum, per eandem secundam sententiam, quiquidem A & D sunt (per tertiam octaui) primi, quod est inconueniens, similiter in quibuslibet ipsorum A B C D ostendetur. Non igitur vnum eorum A B C D & compositum ex reliquis, metietur aliquis numerus, primi itaque adinuicem erunt. Si igitur quotlibet numeri continuè, &c.

MONITVM.

Quod autem addit huic theoremati præter Euclidem Campanus, relinquemus: sat etenim pro se quisque lector ea deprehendet. sunt equidem ea additamenta secundi libri theoremata, de lineis sectis in sectiones numerorum conuersa, vbi maximè has sectiones passi sunt ferre numeri quod si has sectiones per numeros exprimere non potuit, illas impossibiles apud numeros esse demonstrat, vt in vndecima secundi, quæ rectam extrema & media rationem secat, & cuius sectiones quandoque apotomes esse videbimus tertiodecimo. Hæc omnia viso secundo facilè quisque discernet, quæ ideo omisimus, cum Euclidis non essent, nec futuris demonstrandis necessaria.

Propositio decimaseptima.

Si bini numeri primi adinuicem fuerint, non erit sicut primus ad secundum, sic secundus ad aliquem alium.

A
B 15
G

Sint bini numeri A & B primi adinuicem. Dico non posse eis dari tertium proportionalem. Si autem fieri possit, esto A ad B vt B ad G cum enim A & B sint primi, hi erunt (per 23 septimi) eius rationis minimi: si verò sint minimi singuli A B, metientur singulos B G (eandem rationem habentes) æqualiter, per 21 septimi, metitur itaque A antecedens, B antecedentem, sed & seipsum metitur idem A. Non igitur sunt ipsi A & B primi, cùm aliquis A eos metiatur, contra suppositum, quod fieri nequit. Non datur ergo ipsis A & B primis tertius proportionalis. Si itaque bini numeri primi adinuicem fuerint, &c.

Propositio decimaoctaua.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, ipsorum autem extremi primi adinuicem fuerint, non erit sicut primus ad secundum, sic vltimus ad aliquem alium.

A 4
B 6
G 9
D

Sint quotcunque numeri A B G continuè proportionales, quorum extremi A & G sint adinuicem primi. Dico non esse sicut A ad B, sic G ad aliquem alium. Si autem opponamus fieri posse, esto A ad B vt G ad D erit vicissim A ad G vt B ad D, per 13 septimi. Sed A & G (extremi) sunt ex hypothesi primi: si primi, erunt minimi, per 23 septimi: si minimi singuli A G metiuntur singulos B D (eandem rationem habentes) per 21 septimi: igitur A antecedens metitur B antecedentem. Cùm autem sit A ad B vt B ad G, ipse B metietur G: quare & A metietur G, per primam sententiam septimi. Metitur autem seipsum A & reliquum G, primos quidem, quod fieri non potest: non erit igitur sicut A ad B, sic G vltimus ad quempiam alium. Si igitur fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, &c.

MONITVM.

Concludunt hæc bina theoremata necessariò, quod prius professi sumus vnitatem scilicet numerorum nomine priuari, inter actiuos numeros, cùm non sit multitudo & proinde rationē multiplicem, quæ in minimis partibus numeros nusquam, sed vnitatem & numerum suscipit, minimos suæ rationis numeros nequaquam subire, ac ideo in ea multiplici ratione nunquam primos reperiri numeros (eò quòd non sit pura numerorum ratio) vt cuique satis supérque constat. Attamen quia aliqui, putantes has multiplices rationes ad minimos vel primos deduci posse, cùm ad vnitatem & numerum ducitur, rationes numerorum à rationibus geometricis non discernentes. Eas sub legibus 21 24 25 27

-ptimi, 26 octaui, & plurium aliarum propositionum (operationes numerorum exequentium) contineri arbitrarentur nam idem potest sequi in harum rationum minimis partibus, quod in reliquarum minimis numeris. Et idcirco multiplicium minimas partes (quarum semper altera est vnitas) minimos earum vocare numeros crederent, contra numeri diffinitionem. In hanc labentibus caribdim, subuenit Euclides his duobus theorematis, per quæ patulè depromit vnitatem ad primos seu minimos numeros nusquam venire cùm dicat 17 si primi fuerint, licet primi sint minimi, non erit secundus ad aliquem, vt primus ad secundum. Sciebat tamen Euclides rationem dari posse cuiuslibet numeri oblati ad aliquem alium, eandem quæ vnitatis esset ad ipsum oblatum, cùm multiplicationes sint liberæ. Similiter quia hæc decimaoctaua dicat, si extremi primi fuerint, non dari eam rationem vltimi ad alium quemquam, quæ fuerit primi ad secundum, licet intelligat Euclides, si in multiplicibus extremi primi postulentur, ad vnitatem veniendū esse. Sunt enim multiplices ab vnitate proportionales cuncti: & igitur vltimum numerum eodem multiplicari posse numero, quo & multiplicabitur vnitas, quæ est primus huius ordinis terminus, ac proinde eandem dari (contra proposita theoremata) rationem. Patet itaque Euclidem (antiquum) non intellexisse vnitatem numerorum actiuorum nomine contineri, vt facilè ostendit per nonam & decimam septimi, quæ tam Geometricarum rationum quàm Arithmeticarum ostendunt separatam legem, quam postmodum confirmat decimaquinta eiusdem, per partem scilicet & partes, ac vnitatem. Et quamuis sub legibus partis simplicis semper vnitas contineri possit, cùm ea sit singulorum numerorum pars vnica: quia tamen aliqui incidunt numeri in eam partem quiquidem aliorum dicuntur pars vel partes, vt vnitatis legem prorsus Euclides à numeris distrahat. Illud idem quod de numeris dixit, per hæc nonum & decimum theoremata, fatur decimoquinto theoremate de vnitate, quod si vnitas pro numero haberetur, prorsus fieret superuacaneum decimumquintum theorema septimi, ac inutile. Intelligamus igitur decet, quicquid minimis primis numeris, ac reliquis actiuis operantibus, conuenire docuit prioribus ac sequentibus docebit Euclides, non necessario minimis rationis multiplicis partibus conuenire (vt maximè hac & præcedenti patuit) sed si quæ præcepta illis conueniunt & his conuenire viderimus, non has ab illorum legibus intelligentiam sumere credamus: sed suapte natura, quæ multiplicibus adhærebunt rationibus, per minimas earum partes numeri denominatione quamuis priuatas, seorsum demonstrare licebit. Quare summa cura decet numerorum duplicem sumptionem reminisci, quorum actiui (Arithmeticas operationes exequentes, in paßiuos Geometricas quantitates significantes) semper discretos numeros, nusquam autem vnitatem recipiunt. Paßiui autem & numeros & vnitatem seu rationes omnimodas suscipiunt, siue discreti ad cōtinuū, siue discreti ad discretum, quæ tantùm actiuis conueniunt numeris. Inter operationes igitur discretorum numerorum, vnitatem recipi nefas esse suscipiemus, simulac inter rationes discretorum multiplicem suscipi rationem nequius: inter numeros verò paßiuos seu quantitatis significatores, quosuis numeros ac vnitatem, siue quasuis rationes cadere dicemus discretorum seu continuorum per discretos numeros non explicandorum cum multo fœcundior sit Geometria (paßiuos sibi sumens numeros) ipsa Arithmetica, actiuos seu tantùm discretos sumente numeros.

Propositio decimanona. *Problema 1.*

Binis numeris datis, considerare si possibile est eis tertium proportionalem inuenire.

A	4	A	6
B	6	B	4
D	9	D	[illegible]
G	36	G	16

Sint propositi bini numeri A & B, oportet enim scrutari eis tertium proportionalem, si fieri poßit: Dico, si primus metiatur quadratum secundi, posse dari tertium, siquidem non metiatur, nec posse dari. Primò B seipsum multiplicans efficiat G quadratum, quem metiatur A per D. Quoniam igitur A ipsum D multiplicans extremum, æquum producit G ei qui fit A medio B, hoc est eidem G, ipsi tres A B D sunt (per 20 septimi) proportionales A ad B vt B ad D, datus est igitur tertius D. Secundo non metiatur A quadratum ipsius B: Dico non posse, ipsis A B tertium dari, si enim fieri poßit, esto D tertius. quoniam A B D sunt proportionales, qui sub A & D extremis, æquus est ei qui a medio B (per 20 septimi) fit ille G, igitur A metietur G per vnitates ipsius D. Nam multiplicans D efficit ipsum G, sed & non metitur (ex hypothesi) quod fieri nequit. Binis igitur numeris datis considerauimus si poßibile est eis, &c.

Propositio vigesima. *Problema 2.*

Tribus numeris datis considerare si est possibile, eis quartum inuenire proportionalem.

Datis tribus A B G *numeris, inquiramus si fieri possit, illis quartum proportionalem. Dico, si primus productum ex secundo & tertio metiatur, dari posse quartum siquidem non metiatur, nec posse dari. Metiatur primo* A *prior, productum ex* B *&* G *quod sit* D. *Quoties autem* A *metitur* D, *tot sint in* E *vnitates: igitur* A *multiplicans* E *fecit* D, *sed* B *ipsum* G *multiplicans, eundem* D *fecit. Erit igitur (per decimanona septimi secundam partem)* A *ad* B *vt* G *ad* E. *Datus est igitur ipsis* A B G, *quartus* E, *si verò non metiatur* A *ipsum* D, *non erit* E *proportionalis, quod si secus fuerit, esto* E *quartus proportionalis: quoniam* B *ipsum* G *multiplicans fecit* D, *sequetur (ex 19 septimi)* A *ipsum* E *multiplicantem eundem* D *efficere. Metietur igitur* A *ipsum* D *per vnitates ipsius* E, *& non metitur (per hypothesim) quod est absurdum: non itaque erit* E *quartus ipsis* A B G. *Tribus itaque datis considerauimus si est possibile, &c.*

MONITVM.

Breuiores binas præcedentes fecimus demonstrationes, vt quadruplas Theonis & Campani in hanc subdiuisiones in vnicam redigeremus disiunctiuam, scilicet siue fuerint continuè proportionales, habentes extremos non primos, vel continuè & habentes eos primos, aut discontinuè primos, vel equidem discontinuè non primos. Has quatuor disiunctiuas in vnicam reduximus conditionalem disiunctam, scilicet si primus productum secundi & tertij metiatur, aut non.

Propositio vigesimaprima.

Primi numeri plures sunt omni multitudine proposita primorum numerorum.

Sit proposita quæuis multitudo primorum numerorũ A B G: *Dico alios posse dari præter hanc quamuis multitudinem, sumatur minimus quem ipsi* A B G *metiantur (per trigesimam octauam septimi) qui sit* E D, *ipsi porro* A E D *addatur vnitas* D Z. *Aut enim totus* E Z *est primus, & sic optatum consequimur (cùm ipse* E Z *præter eos* A B G *& ipsis maior datus sit) aut equidem* E Z *est compositus, & sic aliquis primus eum metietur, qui sit* I, *per trigesimamtertiam septimi. Dico* I *esse alium primum ab ipsis* A B G, *quod si non sit, sed idem vni eorum* A B G. *Metietur idem* I *ipsum* E D, *quem ipsi* A B G *metiuntur: sed per hypothesim, idem* I *metitur totum* E Z. *Metietur itaque (per secundam sententiam septimi) reliquum* D Z, *vnitatem, quod obstat naturæ numerorum absurdissimum. Primus igitur erit* I *ipsorum* A B G *datæ multitudini additus. Primi itaque numeri plures sunt, &c.*

Propositio vigesimasecunda.

Si pares quotcunque numeri componantur, totus par est.

Proponantur quotcunque pares A B, B C, C D *&* D E *in vnum* A E *compositi: Dico* A E *parem esse, quoniam quilibet par duas habet partes æquales. Si igitur æqualibus æquales addantur, omnes dimidiæ dimidijs erunt æquales. Et proinde totus* A E *par erit (per diffinitionem paris numeri). Si itaque pares quotcunque numeri, &c.*

Propositio vigesimatertia.

Si impares numeri componantur, fuerit autem multitudo par, totus par erit.

Componan-

Cōponantur quilibet impares numeri pari multitudine propositi A B, B G, G D, D E *Dico totum* A E *parem esse, cùm enim, per septimam diffinitionem septimi, quilibet impar vnitate differat à pari, ablata vnitate à singulis, reliqui pares erunt, & pari multitudine (per præcedentem) totum parem ex ipsis compositum efficient. Si igitur vnitates pari numero ablatæ (parem numerum efficientes) pari addantur, totus (per eandem) par erit. Si itaque impares numeri, &c.*

Propositio vigesimaquarta.

Si impares numeri componantur, multitudo autem eorum fuerit impar, totus impar erit.

Componantur impares numeri multitudine impari A B, B G, G D, D Z, & Z E: *Dico totum* A E *imparem esse: tollatur a toto numerus* Z E, *reliquus* A Z *par erit, per 23 huius. Ab ipso verò* E Z *tollatur vnitas, reliquus similiter par erit (per septimam diffinitionem septimi) qui ipsi* A Z *iunctus parem efficit (per 22 huius) ipsi porro pari vnitas restituta, totum* A E *imparem efficiet, vnitate enim distat impar a pari ex septima diffinitione septimi. Si itaque impares numeri, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Si à pari numero par auferatur, reliquus par erit.

A pari A B *par auferatur numerus* G B: *Dico reliquum* A G *parem esse quoniam ipsi* A B, A G, & G B *pares sunt, partes dimidias æquales habent. Si igitur ab æqualibus* A B *totius æquales ablati* G B *auferantur dimidiæ, reliquæ residui* A G *partes dimidiæ æquales erunt, cùm sint tantùm binæ: quare par erit reliquus* A G, *per sextam diffinitionem septimi. Si itaque à pari numero, &c.*

Propositio vigesimasexta.

Si à pari numero impar auferatur, reliquus impar erit.

A pari numero A B *auferatur impar* G B: *Dico reliquum* A G *imparem esse. Auferatur ab ipso* G B *impari vnitas* G D, *quæ addatur ipsi* A G: *reliquus* D B *par erit, per septimam diffinitionem septimi sed* D B *par, ablatus à toto* A B *pari, relinquit* A D *parem, per præcedentem Ab ipso itaque* A D *pari, ablata* G D *vnitas, ipsum* A G *imparem, per septimam diffinitionem septimi, relinquit. Si igitur à pari numero, &c.*

Propositio vigesimaseptima.

Si ab impari numero impar auferatur, reliquus par erit.

Si à toto A B *impari numero auferatur impar numerus* G B: *Dico reliquum* A G *parem esse. Auferatur ab ipso* G B *vnitas* D B, *reliquus* G D *par erit. similiter & totus* A D, *cùm vnitate distent ab impari. Si igitur à pari* A D *par auferatur* G D, *reliquus* A G *(per 25 huius) par erit. Si itaque ab impari numero impar auferatur, &c.*

Propositio vigesimaoctaua.

Si ab impari numero impar auferatur, reliquus par erit.

Ab impari numero Z B, *auferatur par numerus* G B *Dico reliquum* A G *imparem esse. Auferatur vnitas* A D, *quoniam ablata a toto* A B *vnitate,* A D, *reliquus* D B *par est. Atqui* G B *(ex*

hypothesi) par est: igitur reliquus D G, per 25 huius, par erit, cui addita A D vnitas, totum A G imparem efficit, per septimam diffinitionem septimi. Si itaque ab impari numero par, &c.

Propositio vigesimanona.

Si impar numerus parem multiplicans aliquem fecerit, qui gignitur, par est.

Impar numerus A parem B multiplicãs ipsum G faciat: Dico G parem esse, quoniam A impar sumptus per vnitates B paris efficit multitudinem, ipsius A parem, productus ex eis itaque (per 23 huius) par erit, vel quoniam B par sumitur per multitudinem quamcunque ipsius A, totum efficit G parem, per 22 huius. Si igitur impar numerus, &c.

A 5
B 4
G xx

Propositio trigesima.

Si impar numerus imparem multiplicans aliquem fecerit, factus impar erit.

Multiplicans A impar imparem B ipsum G faciat: Dico G imparem esse, quoniam A impar per multitudinem imparem vnitatum ipsius B sumptus, aliquem G efficit, totus G impar erit, per 24 huius. Si igitur impar numerus imparem multiplicans, &c.

A 3
B 5
G 15

Propositio trigesimaprima.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & eius dimidium metietur.

Impar numerus A parem B metiatur. Dico quòd A paris B dimidium metietur. Metiatur A ipsum B parem per G, dico G parem esse. Nam si impar esset G, sequeretur A imparem per G imparem ductum, ipsum B imparem efficere, ex 30 huius. Sed supponitur B par, quod est absurdum. Par est igitur G. Si igitur A per vnitates omnes ipsius G totum B efficiat, sequetur eundem A per dimidium vnitatum ipsius G paris, dimidium ipsius B efficere. Metietur igitur A dimidium ipsius B, per dimidium vnitatum ipsius G paris numeri. Si itaque impar numerus parem numerum metiatur, &c.

A 3
B 6
G 18

Propositio trigesimasecunda.

Si impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, & ad ipsius duplum primus erit.

Impar numerus A ad aliquem B primus esto, duplum verò ipsius B sit G. Dico A ad G esse primum. Quod si non sit, metiatur ipsos A & G aliquis D, quiquidem erit impar. Nam si par esset D metiens ipsum A perem efficeret, per 22 huius, contra hypothesim per quam A impar est. Erit itaque & D impar qui parem G (cùm sit ipsius B duplus) metiens, & eius dimidium B metietur, per præfatam, metitur autem & A, duos primos, quod fieri non potest. Non igitur metietur aliquis ipsos A & G, qui igitur sunt primi. Si itaque impar numerus ad numerum aliquem primus fuerit, &c.

A 7
B 8
G 16
D

Propositio trigesimatertia.

A bĩnario duplorum vnusquisque, pariter par est tantum.

Sint quotcunque numeri à binario dupli A B G D [illegible] eis que pariter parem esse, & illos tantum. Cum enim ex [illegible] repetitione fiat, pares erunt, per 22 huius. Cum autem sint a binario dupli, ipsi erunt ab unitate proportionales: nam binarius unitatem duplicat. Quilibet igitur eorum minor metitur maiorem per aliquem præexistentem, in proportione per 11 huius, qui quidem sunt pares, facti igitur omnes pares sunt. Et insuper pariter, per octauam diffinitionem septimi nam nullus alius eos metitur, præter præexistentes, in proportione, per 13 huius, qui omnes sunt pares. Quòd autem nullus sit alius ab ipsis pariter par, patet. Si enim fieri posit, alius esto E, qui secetur bifariam semper quousque ad unitatem vel imparem numerum venerit, quorum aliud necesse est. Si ad imparem venerit is ipsum E metietur per sui ipsius frequentem duplicationē, non igitur pariter par erit, ex octaua diffinitione septimi. Si vero ad unitatem venerit, is binarius aut à binario duplus erit. Cùm enim per dimidium continuè sectus fuerit, idem duplo auctus continuo eandem viam sequetur, dimidij enim duplum est conuersum. Non igitur ab his alius pariter par erit. A binario itaque duplorum unusquisque pariter par est tantum.

A 2
B 4
G 8
D 16
Z 48

MONITVM.

Quoniam falsò diffiniuit prius Theon pariter parem numerum, nescio si in alio aliud dixerit exemplari, vulgato tamen græco non videtur intellexisse, vt circa diffinitionem diximus. Hac de re demonstrationem eiusque breuem ac mancam ab eis descriptam (cogimur prolixiorem efficere) instar Campani, vt vniuersalem (vnusquisque) ac exclusiuam (tantum) probemus, & huic Euclidis propositioni nostram (pariter paris) diffinitionem congruere, perfectè sciamus. Idem dicemus in sequente proxima.

Propositio trigesimaquarta.

Si numerus dimidium imparem habuerit, pariter impar est tantum.

Sit A numerus habens dimidium B imparem: Dico ipsum A & huiusmodi tantùm, esse pariter impares. Sit G binarius, per quem B metiatur A duplum. Sit autem aliquis par D metiens eundē A per Z, quod fieri potest cùm A sit par. Quia qui ex G B æqualis est ei qui ex Z D, Erit (per decimamnonam septimi) G ad D sicut Z ad B. Sed metitur G binarius ipsum D parem, metietur ergo & Z ipsum B dimidium, impar est igitur Z: nam si par esset, faceret B quem metitur parē, per vigesimāsecundā huius, quod obstaret hypothesi, impar est igitur Z alius scilicet quilibet, per quem D (par) metitur A ideo pariter imparem. Præterea nullus est alius pariter impar, quam is qui dimidium imparem habet. Nam si credatur alius habens dimidium parem, binarius (par) per dimidium (illum parem) ipsum metietur, non igitur erit pariter impar, ex diffinitione nona septimi, contra hypothesim. Non itaque est alius ab iis dimidium imparem habentibus, pariter impar. Si igitur numerus dimidium imparem, &c.

A 30
B 15
G 2
D 10
Z 3

MONITVM.

Harum duarum præfatarum intelligentiam facilè fallet Theon, cùm diffinitionem terminorum alterauerit, octaua & nona septimi diffinitione nam vt falsas sequatur diffinitiones, videtur exclusiuam (tantùm) referre ad numerorum (vt ita loquar) paritatem vel imparitatem, quod non intelligit Euclides, sed pariter parem esse tantùm à binario duplum productum quotumcunque, ac nullum alium, similiter pariter imparem esse tantum, eum qui dimidium imparem habet, nullum verò alium. Non autem pariter imparem esse tantum eo quod non sit pariter par, exclusiua enim (tãtùm) reliquos excludit numeros, non autem numeri qualitatem. Nam si rectè dixisset Theon idem numerus octaue & decime diffinitionibus septimi, conueniret, Campanus verò rectius diffiniuit, sed exclusiuam nec ostenait in hac veluti in præcedente.

Propositio trigesimaquinta.

Si numerus neque à binario duplus fuerit, neque dimidium eius impar habuerit, Pariter par est, & pariter impar.

A 24
B 12
G 3

Sit aliquis numerus A qui à binario duplus non sit, dimidium vero habeat B parem. Dico ipsum A esse numerum pariter parem & imparem. Quoniã A nõ est à binario duplus, continuè bifariam sectus numerum imparem efficiet, nam si binarium vel vnitatem efficeret, is esset à binario duplus, faciat itaque imparem G. Manifestum est imparem G metiri A per parem numerum: nam si per imparem metiretur ipsum A imparem efficeret, per 24 huius, igitur G impar metitur A per parem. Et quoniam A dimidium habet parem, binarius (par) per dimidium (parem) eum metitur. Sequetur itaque ipsum A numerum (quem par aliquis per parem & quandoque alius par per imparem numerum metitur) esse pariter parem & imparem, per decimam diffinitionem septimi. Et si B rursus dimidium parem habuerit, alius adhuc par per parem eum metietur numerum, sicq; infinitè quoad offendatur impar. Si igitur numerus neque a binario duplus, neque dimidium imparem, &c.

Propositio trigesimasexta.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, auferantur autem à secundo & vltimo æquales, ipsi primo, erit sicut secundi excessus ad primum, sic vltimi excessus ad omnes se præcedentes.

A 3 G
B 8 C 4 D
E 12 F
I 3 N 4 K 6 L 9 H

Sint quotcunque numeri continuè proportionales AG BD EF & IH. Auferatur autem à secundo BD æqualis primo AG qui sit BC. A maiori & vltimo verò, idem auferatur qui sit IN: Dico esse vt CD excessum ad AG primũ. Sic NH vltimi excessum ad omnes EF BD AG se præcedentes. Quoniam IH est maximus (nam per hypothesim secundus est maior primo) ponatur IL æqualis ipsi EF & IK æqualis ipsi BD. Ipsi verò AG est æqualis IN. Erit itaque sicut IH ad EF & EF ad BD, ac BD ad AG. Sic idem IH ad IL & IL ad IK ac IK ad IN, sunt enim æquales. Quare & NK ipsi CD æqualis erit, per 3 commun. sentent. Sed cùm sit sicut IH totus ad totum IL, sic ablatus IL ad ablatum, IK. Erit (per vndecimam septimi) reliquus LH ad reliquum KL sicut totus IH ad totum IL. Quia similiter est IL ad IK vt IK ad IN. Erit per eandem KL ad NK sicut IL totus ad totum IK. Sed sicut IH ad IL & IL ad IK ac IK ad IN, sic fuerunt IH ad EF & EF ad BD ac BD ad AG. Sicut igitur LH ad KL & KL ad NK, sic erit EF ad BD & BD ad AG. Et vicissim per decimamtertiam septimi, sicut LH ad EF sic KL ad BD & sicut KL ad BD sic NK ad AG, & sicut vnus antecedentium NK ad vnum consequentium AG, sic erunt per decimamsecundam septimi omnes antecedentes NK KL LH, ad omnes consequentes AG BD EF. Sed ipsi NK æqualis ostensus est CD. Sicut igitur CD excessus secundi BD, ad primum AG sic erit totus NKLH excessus vltimi, ad AG BD EF omnes se præcedentes. Si fuerint itaque quotcũque numeri continuè proportionales, &c.

MONITVM.

Quoniam Theon ac Campanus hanc succinctè demonstrarunt, prolixiores paululum esse cogimur, vt eam per numeros ostendamus. Præterea animaduertendum est, in hac & similibus, non necessario exprimendum esse quòd hypothesis ex se postulat, vt si diximus hanc intelligi in rationibus minoris inæqualitatis tantùm, quod certum est. Sed cum hypothesis postulet à secundo auferri æqualem primo, illud satis manifestum aperit, priores siue antecedentes numeros, minores esse consequentibus. Quare nec demonstrando necesse erit dicere, incipientes à minimo vt ait Theon, dummodo exprimatur hypothesis, optans consequentes maiores antecedentibus esse.

Propo

Propositio trigesimaseptima.

Si ab vnitate quotcũque numeri continuè dupli exponantur, quoad totus compositus sit primus, & totus in vltimum multiplicatus aliquem fecerit, qui gignitur perfectus erit.

Apponantur vnitati quotcunque numeri A B G D *continuè dupli, quoad aggregatus ex ipsis* A B G D *& vnitate sit primus, qui sit* E. *Idem autem* E *in vltimum* D *ductus faciat* Z I: *Dico* Z I *esse perfectum. sumantur totidem ipsis* A B G D, *qui post vnitatem* E T L M *dupli, Erit æqua ratione (per 14 septimi)* A *ad* D *vt* E *ad* M. *Qui itaque sub* A *&* M *æquus erit, et qui sub* D *&* E, *per 19 septimi, similiter qui ex* B L *et qui ex* G T, *per eandem: sed ex* D *&* E *fit* Z I, *per hypothesim. Ex* A *&* M *igitur fiet idem* Z I, *duplus itaque erit* Z I *ipsius* M, *cùm* A *sit binarius per hypothesim: sed &* M L T E *dupli fuerunt. Continui itaque proportionales dupli erũt,* E T L M Z I. *Abscindãtur antẽ* A *secũdo* T, *& vltimo* Z I, *æquales ipsi primo* E, *qui sint* T N *&* Z C, *relictis* N K *&* C I, *erit ex præfatis sicut* N K *ad* E, *sic* C I *excessus ad omnes* M L T *&* E *se præcedentes, atqui* N K *æquus est ipsi* E, *nẽpe dimidius dupli* T K. *Aequalis igitur erit* C I *ipsis* M L T *&* E, *sed vnitati &* A B G D *æquus erit* Z C, *cùm positus fuerit ipsi* E *vel* N T *æqualis, totus igitur* Z I *ipsis* M L T E, *ac ipsis* D G B A *ac vnitati æquabitur. Præterea dico omnes metiri eundem* Z I, *cùm enim* Z I *fiat ex* D E, *vterque eum metitur, & cùm ab vnitate dupli metiantur ipsum* D, *scilicet ipsi* A B G, *per decimamtertiam huius, ipsi metientur &* Z I *quem* D *metitur, per primam sententiam. Simili argumento cùm* E T L M *sint ad* Z I, *vt vnitas et* A B G *ad ipsum* D, *in ratione scilicet dimidia, & vnitas ac* A B G *ipsum* D *metiantur, & pariter* E T L M *ipsum* Z I *metientur. Insuper dico nullum alium ab his ipsum* Z I *metiri: quod si fuerit aliquis, esto* O *qui per vnitates ipsius* P, *ipsum* Z I *metiatur sed* D *eundem* Z I *per* E *metitur, erit igitur sicut* E *ad* P, *sic per 19 septimi,* O *ad* D. *Quia vero* O *nullus horum ponitur, ipse non metietur* D, *quem soli præexistentes in proportione scilicet* A B G *metiuntur, per decimãtertiam huius, nec* E *igitur metitur* P, *cæterũ quoniã est* E *ad* P *vt* O *ad* D: *sed* E *primus est, ex hypothesi, & ad* P *quem non metitur, per 31 septimi primus erit. Quia verò* E *ad* P *sunt primi, ipsi erũt (per 23 septimi) minimi, & (per vigesimamprimam eiusdem) metientur ipsos* O *&* D *eandem rationem habentes. Metitur ergo* E *ipsum* O *&* P *ipsum* D. *Sed cùm nullus metiatur* D *præter præexistentes* A B G, *& vnitatem (per decimam tertiam huius) sequetur ipsum* P *vnum eorum* A B G *esse. Cum autem ipsi* A B G D *metiantur* Z I, *per ipsos* M L T E *(vt diximus) &* P *metiatur* Z I *per ipsum* O, *sequetur* O *vnum esse ipsorum* M L T E, *sed & alium ab ipsis (per hypothesim) quod fit extra potentiam. Nullus igitur alius ab ipsis* M L T E, D G B A *& vnitate, ipsum* Z I *metitur, sed & ipsis* M L T E D G B A *ac vnitati, qui sunt singulæ eius* Z I *partes, per trigesimamnonam septimi ostensus est, ipse* Z I *æqualis. Ipse itaque* Z I *perfectus erit, per vigesimamquartam diffinitionem septimi. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri continuè dupli exponantur, quoad, &c.*

Vnitas.
A 2
B 4
G 8
D 16
E 31
T 31 N 31 K
L 124
M 248
Z 31 C 465 I
496
O
P

MONITVM.

Præmisimus nuper Euclidem numerorum auxilia tantum ad geometricas quantitates discernendas & ideo elucidandas implorasse. Qua autem de causa singula documenta quæ numeris conuenirent, huic negotio conferentia non posuerit Euclides mirari desinemus. Cùm enim Geometriæ traditiones ampliores ac vberiores arithmeticis existant, quæ in geometricis tradidit Euclides quantitatum continuarum nomine, ea numeris adaptari cupit, maximè cum continuarum illarum magnitudinum respectus, more ac numerorum habitudine sese respiciunt, vt exemplo ex prima secundi dicemus in numeris. Si duorum numerorum alter secetur, quomodolibet productus ex multiplicatione secti & insecti, æquus erit productis ex multiplicatione insecti per singula secti segmenta. Haud dissimili via in reliquis secundi sequetur, dempta vndecima, ea etenim inter eas vnica, sectionem incertam ac extra numerorum rationem supponit: quare hæc numeris applicari non debet. Reliquæ verò vtrasque suscipiunt rationes numerorum scilicet (quæ certæ sunt) ac incertas geometricam vbertatem ac amplitudinem ducentes. Similitérque dicemus in reliquis aliorum librorum

theorematibus sub vbertate geometrica comparationem linearum in genere tractantes, vbi præcepta lineis rationem numerorum habentibus conuenient, hæc eadem de numeris dicta fuisse concipiemus. Neminem etenim latet geometricas magnitudines sub continuorum confuso respectu adnuncem collatæ, vtrasque complecti rationes, eas scilicet, quas numeri habent ad numeros, & eas quas numeri inter se non patiuntur cadere: quarum priores tantum his tribus numerorum libris, eorundem discretionibus adaperuit: discretiones numerorum binis acceptionibus proferens. Altera quidem quantitates discernẽdas ac inuicem conferendas numeris adaptatis significauit, integras verò ac insolutas vnitate denotauit. Altera autem qua operationes arithmeticas (discretionem elucidantes) in quantitates prioribus significatas minoris exercuit. Vtraque porro sumptione continuarum ac confusarum quantitatum abstrusos inter se respectus ideo patefecit, vt continuis easdẽ habitudines inesse perciperemus, quas discretis esse nobis est notum & præter has alias inesse habitudines, quæ licet numerorum discretione proferri non possint, tamen eorundem obsequio suffulti, naturam ac earum progeniem à discretorũ priuatione quadam arte oriri noscemus, hoc proximo maximè decimo libro, qui quantitatum ac habitudinum præfatarum intelligentiam præcipuè docebit.

Procemium decimi Elementorum Euclidis.



Ptans Euclides suis Geometriæ elementis vtramque quantitatum naturam discentium ingeniis exhibere, earum quidem quæ ita sibi muicem comparari possunt, vt aliqua vnius pars alterius pars cognominari poßit, aut eadem, siue earum quæ ita sibi comparantur, vt quæuis pars vnius nulla poßit alterius dici pars. Sed quibuslibet sectionibus æqualibus singulæ sectæ quantitates, aut quibusuis vnitatibus multiplicatæ, nusquam æquales producant magnitudines, quæ prioribus nouem libris seorsum docuit, hoc decimo ea serie congeret, qua huius discrepantiæ progenituram ac ortum, mentibus percipiendum facilitet. Sex etenim prioribus, quæ ad quantitatum confusarum (quia continuarum) intelligentiam spectarent, docuit, pluribus rudimentis sæpius discretarum magnitudinum affinitates ac præcepta capientibus, Geometria nãque vtramque continet quantitatum naturam, scilicet rationes numerorum habentium, ac non habentium. Tribus verò postremis quæ ad quantitatum discretarum cognitionem pertinerent, legibus à numeris subfuratis edocuit, quibus earum quantitatum intelligentiam numerorum discretione (quã sensibus familiari) adaperiret. Cùm autem numerorum discretionem ab vnitate (quæ repetita semper æquas producit partes) generari sit notum, sequetur singulas numerorum vnitates sibi inuicem æquales esse, ac exinde magnitudines numeris expressas ad æquales partes tandem reduci posse, ad eam scilicet quam vnitas operit. Nam cuiusuis numeri vnitas est pars, nullius verò partes, quòd si alicui harum vnitatum magnitudini comparetur magnitudo ad eam habens rationem nullis numeris dicibilem, sequetur ab his diuersis vnitatibus compositas æqua repetitione magnitudines, rationem habere nullis numeris dicibilem: nam æquemultiplicium partes per decimamquintam quinti eandem rationem habent. Sed cùm nulla relinquatur mortalium sensibus quantitatis discretio, si absuerint numeri, per quos excessum aut equidem defectum per partis aut partium denominationes exprimimus, quę quantitatis notitiã in intellectu generantes solùm quid sit in magnitudine proposita quantitatis pronunciant. Geometricarum ideo quantitatum comparationes duplicem habere naturam exponet Euclides, scilicet eam qua sibi inuicem comparatæ rationem habere numerorum percipientur, quas certas dicet, ob discretam illam numerorũ certitudinem, notitiam determinatam, ac constantem propositarum quantitatum (mutuò collatarum) ingeniis exhibentem, & eam qua sibi comparatæ rationem habent, quæ inter nullos potest cadere numeros, eásque incertas idcirco dicet, quia certis comparatæ omni habitudinis discretione priuentur, vrgente affinitatis numerorum penuria, ac demum in quotcunque segmenta æqualia (licet numero inæqualia) singulæ illæ quantitates distribuantur infinitè. Nusquam eadem vnitatis quantitas vtrasque numerare poterit, nam semper vnitates binas illas quantitates metientes, inæquales erunt, licet quauis distinctione secentur. Cùm autem infinitæ earum vnitatum poßint dari inæqualitates, ortæ quidem à numerorum diuersis radicibus seu conferentiis, infinitas concludemus posse dari (vt 115 docebimus) incertarum magnitudinum species, inter quas haud secus interueniet comparationis incertitudo, quàm inter eas & certam incidere conspiciemus, illud equidem cùm differre illas inter se specie intelligemus. Nam quæ eiusdem erunt speciei, ad se inuicem more numerorum comparari poterunt, cùm singulæ quibusuis numeris duci poßint, eas producẽtibus, quæ eorundem numerorum rationem habeant, ac proinde singularum illarum spe-

cierum magnitudines quælibet, solæ propositæ certæ dici poterunt, ad quam comparatæ reliquæ omnes species incertę nuncupabuntur, illud quidem (vt diximus) ob penuriam affinitatis numerorum inter se. Harum quippe aliquas hoc decimo generare docebit Euclides, & ne infinitum videatur aggredi negotium, generalius infinitas fieri posse monstrabit vnico theoremate. Vnde etenim illud tam abditum & occultum huius disciplinæ arcanum nasci potuit consideremus, cùm vnitatem esse, prima septimi diffinitione, vnam ac insolubilem suapte natura dixerimus. Ac proinde (cùm ad quantitates refertur) Geometricam & ideo continuam ac insectam esse, facilè percipiemus eam inter numeros collatã, quę vera ac sola est numerorum genitrix, naturam continuæ quantitatis insequi, quę cùm insolubilis sit, necessariò omnium numerorum minimam eam esse partem fatebimur, quia per numeros in minores secari non potest, quòd si (vt septimo diximus) eius quantitas per numerum secetur, semper minima pars ad vnitatem redit. Si itaque magnitudini per aliquas vnitates sectæ, magnitudo comparetur, cuius quantitas collata quantitati prioris, in eam vnitatis sectionem cadat, quæ nullo numero vnitatis illius quantitatem metiente exprimi possit, sed quauis illius quantitatis multiplicatione decrementi facta, semper comparatæ magnitudinis extremum, siue terminus, in vnitatis cadat sectionem. Perspicuum erit eius quantitatis comparatæ denominationem, extra numerorum vires haberi, eorum maximè priorem quantitatem numerantium: siquidem illud extremum facta aliqua decrementi vnitatis multiplicatione, in aliquem illarum vnitatum terminum caderet, non autem in vnitatis sectionem, illius multiplicationis quantitates (saltem) vtrasque numerarent vnitatum magnitudines. Non igitur earum comparatio extra numerorum vires haberetur, sed numeris exprimeretur. Cùm itaque numeris exprimi non potest ea determinatione ac ideo certitudine caret: comparationis etenim quantitatum certitudo, à numerorum expreßione dependet. Quæ igitur numeris exprimi non potest, hac de causa incerta comparatio dici meretur: & idcirco quantitas quæ comparationem illam ad alteram producit quantitatem, illa eadem lege incerta quantitas dici poterit. Hæc insuper omni denominatione priuata obmutescit, eò quòd in tantum proruperit scelus, vt vnitatis illam inuiolatam integritatem dissoluere conata sit, quæ nullam patitur sectionis denominationem.

Cæterùm illud sequentes quod ait Zambertus in liminari perspectiuè se scilicet Euclidis exemplaria tineis ac carie contrita apud Socraticum vidisse. Sanè inferre possumus hunc eius decimum, id vel aliud quoddam suscepisse detrimentum. Euclides quippe hanc propositam magnitudinem (quam lineam efficit) certam denominat hac dictione ῥητὴ, (quę propriè certam & determinatam & quæ tuto dici potest præ se fert) diffinitione quinta. Sexta verò profert, omnes eidem propositæ certæ commensurabiles, certas similiter esse eadem dictione ῥηταὶ à commensurationis quidem habitu, quia commensurabiles sunt certæ propositæ, & ipsæ certæ ea de causa erunt, cùm autem septima diffinitione arguit à priuatione, extra sensum discedit. Nam quod addit habitus, idem tollit priuatio, Dicit enim sexta quia commensurabiles fuerunt certæ, eas ideo certas esse. Septima igitur quia ipsi certę incommensurabiles fuerunt, incertas esse (negatione priuante preposita) necesse sequi fatur. Cur autem posuerit Theon loco huius dictionis ἀῤῥηταὶ quæ verè illi ῥηταὶ per priuationem opponitur, hanc ἄλογοι exastimans oppositum certi vel determinati esse irrationale, sat admirari non possumus. Certum etenim cum rationali nihil habet commune, ac insuper absurdius, licet etenim semper hoc ῥητὸ affirmante, vtatur, nihilominus eidem cõferre volens oppositum, ponit ἀλόγου toto hoc decimo, quod nõ parum discentibus est incommodum.

Nam

Nam si magnitudines quas incertas dicimus (propria denominatione) irrationales dixerimus, ab eis rationis habitum abstulimus, quasi ... aut inter suas species, aut equidem ad certas ratione priuari, quod longè abest. Licet enim ipsæ ad certas commensuratione priuentur, non tamen ratione priuabuntur, sed rationem habebunt, per 4 diffinitionem quinti, multiplicatæ etenim se inuicem excedent, ac insuper (ex tertia eiusdem diffinitione) sunt eiusdem generis quoad quantitatem, scilicet si fuerint lineæ, idem genus longitudinem habent quantitatis, Si superficies longitudinem ac latitudinem, Siquidem solida tres dimensiones Rationem igitur habentes certæ ad incertas irrationales dici non possunt. Minus quoque irrationales dicentur, incertæ magnitudines incertis eiusdem speciei comparatæ, quæ scilicet inter se sunt commensurabiles, ac rationem suscipiunt numerorum, vt diximus. Nam hæ rationem habent cognitam, illæ verò rationem surdam, aut incognitam, incertam, aut indeterminatam, cùm non habeant eam quam numeri inter se. Verius itaque eas magnitudines incertas dicemus quam irrationales, veluti & sanius oppositas certas quam rationales, nihil enim habet rationale ad certitudinẽ: sunt equidem distinctæ qualitates. Diuersitas generis, quantitatis rationem tollit (ex tertia diffinitione quinti) inter quantitates, sicut & diuersitas generis commensurationis commensurationem aufert: ratio etenim commensuratione est generalior. Non enim omnes quantitates rationem habentes sunt commensurabiles, sed omnes commensurabiles rationem habere necesse est.

Commendandum preterea diximus nullam harum quantitatum (quas incertas nuncupamus, alij verò irrationales) ex se incertam dici posse. Sed omnium quælibet & singulæ suis locis incertæ dici poterunt adinuicem comparatæ, quando scilicet vnius speciei ad alteram fit collatio, quæ semper denominatione caret, hæc incerta collatio facta propositæ magnitudini incertã denominat collatã quantitatẽ, nõ tamen hac de causa incertã, qua incertitudinem à propria natura ducat, dicemus, sed incertitudinem ab incerta comparatione factam censebimus, hanc itaque incertitudinem sumunt quantitates, à collatione diuersarum specierum, non autem à quantitatis natura, vt exemplo facilitemus. Esto linea A B secta in G extrema & media ratione, per 11 secũdi vel 30 sexti. Tres igitur rectæ A B, A G & G B sunt inter se (quouismodo comparatæ) incertæ, vt latius patebit sexta decimitertij. Tamen quamlibet harum licet nobis proponere cæteris conferendam, si enim A G maius segmentum, proponamus, hæc proposita recta (cui comparantur reliquæ A B & G B, sibi incommensurabiles) certa dicetur quæ collatione incerta alias sibi collatas incertas efficit. Similiter si toti A B comparentur A G, G B singula segmenta, aut si minori G B tota & maius comparatæ fuerint. Quæuis igitur proposita certa dici poterit, & eius quantitas cognita erit, reliqui verò illi (comparatione facta) incertæ, incognitæ, ac indeterminatæ erunt, non equidem quantitatis defectu, sed collationis relatione, quæ incerta est, ac penitus denominatione caret. Quid enim vetat totam A B sumi pro vlna, cuius maius segmentum sit alia quæpiam vlna? Nam si vlnam Lugdunẽsem extrema & media ratione secemus, maius segmentum non longè ab vlna Antuerpiensi distabit, quælibet earum nihilominus apud suos certa & proposita quantitas erit, reliqua verò eidem collata incerta dicetur. Nam singulæ per quotuis vnitates, siue in augmentum, siue in decrementum multiplicatæ, magnitudines producunt, eandem rationẽ habentes, ex decimaquinta quinti. Et proinde vnitates alteram metientes, siue numerantes, vnitatibus reliquam numerantibus, incommensurabiles erunt, cùm tota toti fuerit incom-

mensurabilis. Quamlibet itaque quantitatem nobis proponere licet (vt certam) quæ ad alitas collata, incertas eas (cum denominatione respectus carent) efficit. Qui tamen harum incertarum denominationes, à certarum denominationibus (vt quàm fieri possit, occultè earum aperiantur habitudines) depromere conati sunt, propositas certas per numeros expofuerunt, qui multiplicati, coniuncti, siue alia operatione arithmetica variati, numerum radice carentem producerent, hanc quippe radicem, siue quadrata, siue cubica, censica, aut alia quæuis fuerit, harum incertarum (propositæ certæ collatarum) denominationi imponunt, vt quàm proximè ex numeris certam quantitatem denotantibus, incertarum denominationes euellere possint. Hos autem numeros surdos, algebricos, radicales, seu incertos aut impropriè irrationales, (priorem errorem sequentes) nuncupant, quos nos hypotheticos verius quàm essentiales dicimus, eò quòd tantùm ex hypothesi sumantur, omni essentia ac denominatione priuati. Quorum tamen obsequio potiores certarum ad incertas habitudines consequimur, hactenus humanis mentibus cultas, vt exẽplo elucidemus, proposita recta A B secta extrema ac media ratione in G per eius A B vnitates, quæ sint 12 ipsam A G reperiamus, quã fieri



proximè possit, ducemus (ex vndecima secundi) A B in se fiet 144 & dimidiam ipsius A B scilicet B in se, fient 36, quæ coniuncta componunt 180, horum quippe radix quadrata minus B ipsam A G efficit. Quare maius segmentum A G denominabunt. Radix 180 minus B, quæ radix (cùm nulla sit in numeris) omni denominatione priuatur, si autem quàm proximè exprimenda sit: Dicemus qualium A B erit duodecim eorum A G esse 7 & $\frac{11}{26}$ proximè maius, vel proximè minus, 7 & $\frac{11}{27}$. Reliqua verò B G reliquum ipsorum 12 occupat. Quæ omnia potius obsequio quàm demonstrationi conueniunt. Nos igitur ceptum peragamus.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber decimus.

Diffinitio prima.



OMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

Prioribus libris præmisit Euclides, maximè tribus postremis, necessaria ad quantitatis intelligentiam, per vnius ad alteram relationis operationem, vt cognita vnius magnitudinis quantitate, eius opera siue auxilio alterius propositæ magnitudinis quantitatem vsque adeo præcisè siue exactè nouerimus, quod nihil amplius ad earum quantitatum intelligentiam requiratur. Quod autem hoc decimo proponet Euclides, aliud expectat negotium. Nam his cognitis quantitatibus, per earum naturæ intelligentiam, simulac numerorum obsequio, incertarum magnitudinum quantitates generare docebit. Et licet quo differant, à cognitis illæ incertè reticere cogatur (ob occultatā nobis à Natura cognitionem) tamen propositarum siue cognitarum legibus, quid inter se illæ incognitæ aut incertæ habeant affinitatis proferre facilè poterit. Inchoans Euclides itaque à præcipuo quantitatum notarum vinculo, eo solo scilicet quo vnius magnitudinis ad alteram habitudo (quæ ratio dicitur) fit. Commensurabiles cœpit dicere magnitudines eas quas eadem magnitudo (quam communem vocant mensuram) ita præcise constituit, vt alteram earum per quasdam vnitates repetitam. Reliquam verò per quotuis ex eisdem vnitatibus repetitam præcisè constituat, illæ commensurabiles, siue communem mensuram habentes, dici poterunt. Hoc autem dixit vt quàm differant ab his quas eadem vnitas quibusuis repetitionibus complere vtrasque non potest (quæ proxima diffinitione patescent) edoceat.

Diffinitio secunda.

Incommensurabiles autem, quæ sub nullius communis mensuræ dimensionem cadunt.

Incommensurabiles opposita priori denominatione vocat eas magnitudines, quæ nullam patiuntur communem mensuram, eas complere. Sed qualibet magnitudo alteram earum suis repetitionibus componens, ab alterius dimensione excludetur: nam suis repetitionibus reliquam aut excedet, aut equidem ab ea deficiet, ea nimirum quantitatis parte, quæ nullo numero (priorem exprimente) denominari poterit. Priorem autem exprimente ideo dicimus, quòd priores quas commensurabiles diffinimus, ab æqualium vnitatum numeris componantur, diuersis aut æqualibus earum vnitatum repetitionibus Hæ verò incommensurabiles ex diuersarum à primis vnitatum quantitatibus compositæ, nullam patiuntur inter se communem mensuram, eò quòd inter eas sit diuersum mensuræ genus, sub eodem tamen genere quantitatis conclusum, non autem sub eodem mensuræ genere. Quæ igitur diuersum genus habent mensuræ, incommensurabiles erunt, sicuti idem mensuræ genus habentes, commensurabiles dicimus. Sed animaduertendum est, vnicum illud genus mensuræ inter omnia solum commensurabile dici non posse. Cum autem qualibet alia mensurarum genera (pro se quodque) commensurabiles metiantur magnitudines. Quodlibet primum assumptum, eorum generum pro commensurabili ea arte sumi poterit, vt quæuis aliorum generum mensuræ magnitudines, ad has, comparatæ meritò, incommensurabiles dici debeant. Et proinde commensurationem idem mensuræ genus sequi, ac veluti diuersa mensuræ genera sequi incommensurationem fatebimur, vnde etenim oriatur hæc diuersitas licet altiorem nostra sententia optet indaginem. Tamen vt paucis quæ id producant, exponamus, Numeros quantitatem non esse memorari nos oportet, in numeris dixisse, sed tantùm quantitatibus adaptabiles. Cùm igitur alicui quantitati adaptatur numerus, hæc quantitas in tot partes æquales secatur, quot sunt in adaptato numero vnitates omnes etenim numeri vnitates, æquales sunt. Si igitur huic quantitati alia comparetur quantitas quam prioris vnitates (quæuis arte sumptæ) nusquam restituant, sed ad eam exprimendam vnitas secari cogatur, con-

tra suipsius præfatum natale genium, quod absurdum producit, cùm dixerimus minimam numeri partem vnitatem esse, ac nulli sectioni obnoxiam. Hæc quantitatis expressio quæ vnitatis requirit sectionem, denominatione qualibet priuatur, quia vnitas sectionem non patitur. Quare quantitas illa denominatione priuata ad propositam comparata, nullam rationis denominationem patitur. Sed equidem ad illam rationem habebit, cùm sint magnitudines eiusdem generis quoad quantitatem, licet non quoad commensurationem. Attamen omni denominatione priuatam, quæ per numeros tantùm exprimi potest, vt discretionis vtilitate fruatur. Cùm autem harum magnitudinum, quarum quantitas vnius in sectionem vnitatis alterius cadit, infinitæ sint species, infinitæq; vnitatem secandi formæ. Infinitas dicemus posthac posse dari, incommensurabilium species adinuicem, licet inter se cuiuslibet speciei quantitates, sint ad inuicem commensurabiles. Omnes tamen quarum denominatio vnitatis sectionem exprimere cupit, ea voce qua res existentes denominantur, penitus priuari, quasi non res existentes dici, sed potius hypotheses existimentur. Ab his diuersis vnitatum sectionibus orti sunt numeri, qui surdi, aut irrationales, seu algebrici dicuntur, sunt autem radices numerorum non vllam habentium. Quare licet illi potius hypothetici, quàm essentiales dici debeant. Nihilominus illorum ficta hypotheses, rebus difficilibus explanandis non parum conducunt. Illos itaque fictos seu hypoteticos, incommensurabilibus infinitis, infinitos exprimendis (si quidem illud exprimere dicatur) promptiores esse dicemus. Cùm illæ ab his, & hi similiter ab illis originem duxisse ostensi sint. Quoniam autem vnitatem secari nunc per incommensurabiles diximus, & antea apud numeros, ab ea denotatam quantitatē secari, Quid his intersit discernere superuacaneū non ducemus. Diximus vnitate significatam quantitatem infinitè secari, per partes, æquales infinitis numeris expressas, præcisam illam quantitatem componentibus. Tuncq; demum vnitatem non secari, sed in alias vnitates mutari, quarum semper minima qualibet est vnitas. Non igitur vnitatis huius numeri secatur natura, sed quantitas vnitate significata. Cum autem vnitatem secari nunc dicimus, quantitas vnitate significata in eas partes secatur, quæ nulla numeri denominatione, totam vnitatis quantitatem restituunt: eò quod ea sectio in vnitatum discretiones per infinitos quotuis numeros factas, nunquam incidat, sed infinitè examinata, extra eam vnitatum (vt ita dicam) commissuram semper cecidisse reperiatur, quòd infinitis modis fieri potest, vt posthac visuri sumus. Quare hanc quantitatem quantitati prioribus numeris expressè, esse incommensurabilem dicimus, eo quòd exprimenda sit per vnitates, quæ prioris vnitatibus penitus incommensurabiles existunt, & proinde numeri huius numeris illius semper incommensurabiles erunt, Cùm singuli numeri suarum vnitatum sequantur naturam. Incommensurabiles igitur dicemus magnitudines, à mensuræ communis priuatione, idem mensuræ genus non habentes. Haud secus quàm eodem quantitatis genere carentes, irrationales meritò à rationis priuatione tertia quinti diffinitione dici cautum est.

Diffinitio tertia.

Rectæ lineæ potentia commensurabiles, sunt quando quæ ab ipsis quadrata eadem area metitur.

Diffinitio quarta.

Incommensurabiles autem, quando nulla area communis mensura esse potest, eorum quæ ex ipsis fiunt quadratorum.

Quoniam lineæ potentiam vocat Euclides eius lineæ quadratum, aut equidem superficiem huic quadrato æqualem, ait igitur: Rectas lineas potentia commensurabiles esse (hoc est, rectarum linearum quadrata, aut eis æquas superficies commensurabiles esse) quando eadem area vtrasque præcisè sua repetitione constituit, vt diximus prima diffinitione de magnitudinibus in genere. Hac autem dicit vt quamlibet quantitatem per idem quantitatis genus metiatur, & proinde mensuram illam numeris exprimat, vt tandem inter eas rationis cadat denominatio, numerorum virtute expressa: incommensurabiles autem apposita voce, per priuationem exponendæ sunt, cum nulla pro communi mensura inter earum quadrata potest dari area. His diffinitionibus adaptauimus quæ diximus in genere prioribus, illud sequentes, prima septimi diffinitione, vnitatem scilicet eam suscipere formam quantitatis, cui applicandus erit numerus. Si enim lineæ adaptetur numerus singulas vnitates longitudinem tantùm habere. Siquidem superficiei longitudinem ac latitudinem, ac si demum solido, tres eas habere dimensiones longum, latum & sublime. Cùm enim eas omnes metiatur

nume-

numeros, metietur omnes magnitudines, quibus adaptantur numeri sed mēsuram idem genus quantitatis habere decet. Vnitas igitur idem quantitatis genus sibi sumit, quod & quantitas numero significata. Hoc tamen eodem genere quātitatis sumpto, potest adesse commensuratio, & abesse eadem, non ex defectu generis eiusdem quoad quantitatem, sed quoad mensuram.

MONITVM.

Sequens variamus corollarium à Zamberti textura alieni, vt ostendamus Euclidem hoc decimo præcipuè docturum incommensurabilium siue incertarum magnitudinum notitiam, Græcum exemplar sequentes. Nam quas vocat potentia tantum commēsurabiles, intelligit longitudine incōmensurabiles esse, reliquas verò vtroque & potentia & longitudine modo incommensurabiles, vt quæ comparantur expositæ, omnes incommensurabiles intelligantur.

His expositis indicatur, quod propositæ rectæ lineæ (cuius scilicet quantitas est certa ac determinata) infinitæ multitudine comparantur rectæ lineæ. Commensurabiles quidem, potentia tantum, incommensurabiles vero, longitudine & potentia.

Quia suscepit Euclides negotium quantitatum incommensurabilium hoc decimo, concludit sequi ex prædictis, cuilibet propositæ rectæ, hoc est certæ & determinatæ aut cognitæ quantitatis, infinitas multitudine comparari rectas lineas. Omnes autem incommensurabiles, sed binis respectibus: aliæ quidem commensurabiles, licet sint tantùm potentia, longitudine tamen incommensurabiles, aliæ verò per vtrumque incommensurabiles, longitudine scilicet, ac potentia. Sicque omnes eidem propositæ incommensurabiles erunt diuersis respectibus. Vt autem verā Euclidis mentem concipiamus, propositam rectam non eam tantùm quæ significantur à nobis cognitæ magnitudines, vtpote cubiti, pedes, palmi, aut digiti (vt voluit Zambertus præter Græcum exemplar, sed quamcunque à nobis expositam cuiuscunque fuerit generis mensuræ. Cum enim sit liberum quamlibet rectam in quotuis segmenta distribuere (ex nona & decima sexti) Hæc segmēta attribuemus rectæ, quæ lineæ pedali aut cubitali erit incommensurabilis, & proinde huic propositæ pedalis aut cubitalis, incommensurabilis erit, ac aliæ eidem dari poterunt, incommensurabiles aut longitudine tantum, aut longitudine, & potentia simul. Et hac ratione ex hac proposita omnes incommensurabilium species hoc decimo conscriptæ, eadem via generari poterunt, sicut & ex pedali vel cubitali: vt exemplo sumamus rectæ (per trigesimam sexti) sectæ maius segmentum, illud constabit esse longitudine ac potentia incommensurabile toti, ex sexta decimitertij. Attamen sumptum illud maius segmentum, in quotuis partes libuerit distribuemus, optato numero significatas, à quo tandem producemus infinitas rectas huic maiori segmento commensurabiles, potentia tantùm, & longitudine incommensurabiles, aliásque longitudine simul ac potentia incommensurabiles siquidem sumptum illud segmentū pro proposita sumpserimus ac certa, illique incertas reperire velimus, eadem lege dantes eidem segmento incommensurabiles, incertas eius respectu producemus, vt in cubitali proposita, vel potentia tantùm, vel potentia & longitudine simul incommensurabiles.

MONITVM.

Licet hæc suo loco propriè nō sint tradita, ea nihilominus animaduersione digna existimantes hic apposuimus, postea satius intelligenda, ne qui post Zambertum laberentur, hanc Geometriæ libertatem tollerent, quod tantùm in rectis mensuras a quibusdam obseruatas proponere liceret, vt illæ propositæ dicerentur, quasi prohiberetur, diuersis regionibus pedes, aut palmos, siue cubitos, sibiinuicem incommēsurabiles haberi, quisquidem omnes sunt propositæ rectæ. Et proinde super his propositas exhibere rectarum longitudines, quibus aliæ incommensurabiles darētur, quod esset absurdum. Quaslibet igitur magnitudines linearum proponere licebit, vt eisdem incommensurabiles comparētur, & ideo propositam eam esse, quæ ex hypothesi proponitur, dicemus.

Diffinitio quinta.

Vocatur igitur ipsa proposita recta linea, certa.

Hanc propositam lineam rectam vocat Euclides certam vel determinatam, cui scilicet cōparādæ sunt reliquæ, vt cōmensurabiles aut certæ, vel incōmensurabiles aut incertæ dicātur. Certam autem ea de re vocauit, quia eius quantitas nobis eo debet esse manifesta, vt nihil de eius quantitate dubitantes, verè certam nobis esse profiteamur, ac cùm eius propositæ certa nobis fuerit quantitas, certior

eiusdem actionum vel passionum, nobis acquiratur intellectus. Hac autem certitudo tum adest, cùm supponimus, aut intelligimus quãtitatis lineæ naturam siue originem, hoc est, denominationem quia verò quamlibet nobis proponere licet (vt diximus proœmio) eam quæ proposita fuerit certam nuncupabimus.

Diffinitio sexta.

Et quæ huic commensurabiles, siue longitudine & potentia, siue potentia tantùm certæ.

Diffinitio septima.

Quę verò eidem longitudine & potentia incommensurabiles, incertæ appellentur.

Quoniam dixit rectam rectę commensurabilem posse fieri, potentia tantùm, ac insuper potentia & longitudine aliam, has omnes quæ certæ, rectæ, vel potentia tantùm, aut equidem longitudine & potentia simul commensurabiles existunt, similiter certas vul vocari. Sufficit etenim vt certa dicatur aliqua recta, eam aliqua commẽsuratione, longitudinis, vel potentiæ, cum certa coniungi propositæ. E cõuerso autem incertam dicit eam, quæ cum certa proposita nullam habet communem mensurã, siue sua longitudine, siue suipsius potentia comparetur. Cur autem certam dixerit Euclides eam rectam, quæ propositæ certæ potentia tantùm commensurabilis existit, licet longitudine eidem propositæ sit incommensurabilis, quidam inquirendũ putarent. Cùm enim geometricarum quantitatum affinitas, quæ ratio dicitur, præcipua diuisione, per cognitã & incognitam diuisa sit. Cognita autem per numeros tantùm exprimenda sit, numerorum naturam sequitur Euclides in exprimendis quantitatum respectibus: nam licet omnis numerus latus sit cuiusdam quadrati, non tamen omnis numerus latus habebit quadratum, omnes autem numeri inuicem sunt commensurabiles. Sequetur itaque si quadratum lineæ quæ propositæ certæ fuerit longitudine incommensurabilis, sit commensurabile quadrato ipsius certæ (hoc est per aliquas numerorum vnitates eadem mensuræ vtraque quadrata metiatur) illa rationem numerorum inter se habere dicentur (nempe communẽ mẽsuram repetentium) sed quadrata à lateribus in se ductis oriuntur. Sequetur igitur eas lineas quæ per se ductæ, areas rationem numerorum (hoc est certam) habentes, generant, non posse hac certitudine priuari, eò quòd easdẽ vnitates generant quas & certæ. Quare ea de causa certas esse reperit Euclides, reliquas verò è contra, quæ per se ductæ areas incommensurabiles producunt, & proinde lõgitudinem ac potentiam incommensurabiles habent, incertas nuncupauit, & ad certam rationem habent ignotam, eò quòd quælibet vnitates eis applicatæ, sint adinuicem incõmensurabiles, ac rationem habent incertam.

MONITVM.

Hanc autem certam verterunt Campanus & Zambertus latinè rationalem, longè quidem à Græco exemplari, vtitur enim Græcum hac voce ῥητὴ, quod verius pro certa determinata ac manifesta legitur, & insuper huic sententiæ plus consentiret certa, quàm rationalis. Nam dictio rationalis, habitum præ se fert, aut actione, aut passione. Si enim rationalis dicatur certa proposita actione, eò quod ad aliam rationem habẽt aliquam, aut passione, quod alia ad eam rationem habeat, hæc denominatio non tantùm ei conuenit, sed quibuscunque sibi incommensurabilibus, siue etiam incertis. Illæ nãque ad alias eiusdem generis (quoad dimẽsionem) rationem habent cognitã inter se & certã, ad alias autẽ siue ad certas rationem habẽt, cùm sint eiusdem generis quoad quantitatem (per tertiam diffinitionem quinti) tamen ignotam. Omnes igitur rationales dici merentur, eò quòd inter se rationem habeant, ac ad alias, quod esset confusum ac proinde absurdum, haud secus si aliquam lineam solam rationalem vocaremus, à rationis habitu, nam sola linea rationem non habet, cùm ratio duos saltem requirat terminos. Non igitur aptè denominari poterunt illæ propositæ rectæ rationales, sed certæ aut determinatæ, &c. Praterea nec videmus Euclidem vocasse illas rationales, sed certas. Cãpanum autem & Zambertum id sibi sumpsisse tantùm, quare cum appositam huic ῥητῶ dictionem scripsit Theon ἄλογον septima hac diffinitione non Græcã Euclidis vocem (quã potius ἄῤῥητον dixisset pro incerta) sequutus est, sed manifestum est eum extra Euclidis sententiam irrationalis vocem pratulisse quasi per rationis priuationem, incertas nuncuparet magnitudines, quæ inter se, vt diximus, certam & cognitam rationem habent, ad certas verò licet incognitam vel indeterminatam habeãt rationem

tionem, tamen eam habent habitudinem siue respectum, qui ratio dicitur inter quantitates eiusdem generis, tertia diffinitione quinti, vt latius proœmio diximus. Quare posthac cùm omnem irrationalis aut rationalis, licet tritam denominationem, ab huius decimi libri theorematis (lineis ac planis immeritò attributam) auferemus, eámque rationalis aut irrationalis vocem in certam aut incertam (propriam earum denominationem) conuertemus, Id nos fecisse, vt veram harum quantitatum determinatarum aut indeterminatarum significationem propria voce resonemus. Quinetiam vt impropriarum dictionum (rationalis & irrationalis) allusionem euitemus, eos qui hæc legerint, arbitrari precamur. Omnium igitur sibiinuicem incommensurabilium quamlibet certam dicere poterimus, cùm ea nobis proposita ea de causa fuerit, vt illi reliquas conferentes certas aut incertas dicamus, hypothesis etenim lineam proponens eam certam denominat, vt ait quinta diffinitio, quæ propositam certam dicit, eò quòd proposita fuerit.

Diffinitio octaua.

Et quod quidem à proposita recta linea quadratum certum.

Diffinitio nona.

Et quæ huic commensurabilia, certa.

Diffinitio decima.

Quæ verò huic incommensurabilia, incerta dicuntur.

Vbi exposuit Euclides primi generis quantitatum naturam (quod est longitudo siue linea) ad secundum properat eiusdem quantitatis genus, hoc est, ad superficiem, quæ longum & latum continet. Ait igitur quadratum quod fit ex proposita recta linea (ea inquam quæ certa supposita fuit) certum ideo esse, quòd à certa recta sese multiplicante (veluti in numeris) nascatur. Et insuper quæ huic certo quadrato quadrata, area, superficies, siue qualibet plana commensurabilia fuerint, certa similiter vocari præcipit. Cùm enim satis supérque dixerimus commensurationis originem à numeris prodiisse, eò quòd omnes numeros metiatur vnitas. Præterea numeros ex se quantitates non esse, sed quantitatibus adaptabiles. Si quantitati cuidam applicetur numerus, eam in totidem æquas partes sectam esse, quot sunt vnitates in eo numero intelligemus. Si enim illæ vnitates aliam quantitatem metiantur, alia quauis licet repetitione, erunt commensurabiles (ex prima diffinitione huius) illæ magnitudines. Si itaque binæ lineæ æquales fuerint, æquales vnitates ac vnitatum æquam suscipient multitudinem. Et igitur sub illis comprehensum quadratum vnitatibus constat ab earum linearum æquis vnitatibus originem ducentibus. Quinetiam naturam illius plani sequentibus, nempe quadratis, cùm sub æqualibus contineantur vnitatibus. Si itaque rectæ illæ æquales (hoc est, vnica illa certa bis sumpta) quadratum suscipiant, illud ideo certum erit, quod ex eisdem propositæ lineæ vnitatibus generari potuerit. Quia verò qualibet plana eidem quadrato commensurabilia eadem mensura metiri potest, hæc mensura vnitatis vices vtrumque planum numerantis gerit, ac idcirco illa plana quæ ab eisdem vnitatibus composita diuersa quauis multitudine fuerint, commensurabilia dicemus adinuicem, cùm illis eædem applicentur vnitates. Quòd si lineæ propositæ alia comparetur, potentia, tantùm commensurabilis longitudine verò nequaquam, perspicuum erit, comparata longitudinem (seorsum sumptam) incertam esse, potentiam verò certam. Quare lineæ denominationem certam dicemus. Sufficit namque potentiæ aut longitudinis commensuratio, ad certæ denominationem acquirendam. Quòd si ipsi proposito certo quadrato siue plano, alia comparetur superficies, cuius nullæ vnitates ipsum metiri poßint quadratum, perspicuum erit ipsas vnitates alienas esse ab his quæ eandem quadratam superficiem composuerunt. Et proinde ipsi quadrato comparatam superficiem ab alienis vnitatibus compositam, incommensurabilem esse. Nam si commensurabiles essent, eadem vnitas vtrumque eorum metiretur. Quare meritò hanc superficiem (ipsi certæ incommensurabilem) incertam dicemus, eò quòd ipsam certæ propositæ vnitates determinare siue certam reddere non valeant. Nam vt diximus, incertarum denominatio qualibet à relatione ipsius propositæ certæ dependet, quæcunque ea fuerit in specie, siue quauis vnitatis quantitate numeretur. Mutatur autem

vnitatum species siue natura cum a numero radicem non habente, eandem radicem educi poscimus. Cum enim ea nullas huius numeri habeat vnitates (eo quòd eius nulla sit radix) manifestum relinquitur, vnitates eidem applicatas a prioris numeri vnitatibus alienas esse, quoniam si alienæ non essent, ipsæ radicem numeri exprimerent, quod fieri non potest, cum nullam habeat, ex hypothesi. Idem in quauis radice numerorum dicemus, siue quadrata, siue cubica, siue surde solida, aut alia fuerit quælibet. Quæ igitur quantitates a certarum vnitatibus componuntur, certæ erunt. Quæ verò ab earundem vnitatibus componi non possunt, incertæ dicantur, tanquam ab alienis vnitatibus compositæ. Obiiceretur tamen quadrangulum rectangulum sub lineis potentia tantum commensurabilibus comprehensum, certum non dici, licet lineæ illæ certæ dicantur. Ad hæc dicemus harum linearum vtramque longitudinem, vt iam diximus, certam non esse, quæ quidem incerta longitudo illud produceit rectangulum, sed potentiā earum vtramque tantùm certam esse, quæ denominationem certitudinis lineæ eam potenti tribuit. Quare rectangulum ex earum potentia certa constans, certum erit, quod quidem sub incerta, earum longitudine producetur. Incertum erit, vt latius patebit vigesimaprima propositione huius. Ea de causa dicemus incerta rectangula bifariam præcipuè generari, ex binis certis longitudine tantùm incommensurabilibus. Scilicet cum sub illis continetur rectangulum, per vigesimamprimam, cùm ex illis coniunctis sit quadratum, per trigesimamsextam, & cùm à maiori aufertur minor, reliquæ quadratū (per septuagesimamtertiā huius) vt posthac videbimus. Huius est causa quod in his modis semper cōferuntur longitudines sibiinuicem incommensurabiles, & ideo incertum producunt. Si autem earum potentia (quæ commensurabiles sunt) collatæ planum componant, illud necessariò certum erit, cum constet ex potentia potentiæ certa commensurabili.

Diffinitio vndecima.

Et illa potentes, incertę. Siquidem quadrata fuerint, eorum latera, incertæ. Si verò alia quædam rectilinea fuerint, Lineæ ęqualia ipsis quadrata describentes, incertæ erunt.

Futurum loquendi modum sibi sumit Euclides, cùm dicat, & illa potentes, lineæ etenim potentes illa plana quæ proposito certo plano incommensurabilia esse diximus, incertæ appellantur, quæcunque fuerint rectilinea. Nam si quadrata fuerint, eorum latera incertæ lineæ erunt. Si verò alia rectilinea fuerint, lineæ describentes æqualia quadrata ipsis rectilineis, incertæ similiter appellabuntur. Potentiam namque lineæ diximus esse superficiem quadrato ab ea descripto æqualem. Cùm igitur linea in suas vnitates ducta, quadratam generat superficiem, ipsam superficiem ex ipsius lineæ vnitatibus genitam esse diximus. Si igitur genitæ superficiei vnitates, vnitatibus propositæ superficiei (ex hypothesi) sint alienæ, cùm sint incommensurabiles, sequetur lineæ certæ propositam superficiem generantis vnitates, vnitatibus lineæ, incommensurabilem aream generantis alienas esse. Potens igitur aut generans incommensurabilem aream certo plano recta linea, incerta dicetur, eò quòd alienas à certa proposita habeat in se vnitates. Illud vnum ac idem esse ait Euclides, quæcunque fuerint plana. Nam si sint quadrata, loquitur de eorum lateribus, siue radice. Si verò alia fuerint rectilinea, hoc est, rectangula parallelogramma, pentagona, trapesia, &c. Cùm singula in triangula & proinde in quadrata (per decimamquartam secundi) reducantur. Intelligit eorum quadratorum rectilineis præfatis æqualium latera, incerta dici. eò quòd areas incertis areis æquales, & proinde incertas, producant.

Quia verò diximus quadratam superficiem ex vnitatibus lineæ illam componentibus fieri, Reminisci oportet eorum quæ diximus ad finem primæ diffinitionis septimi, vnitates scilicet naturam eius cui applicatur semper insequi. Scimus quidem infinitas lineæ vnitates nusquam generare superficiem, cum latitudine careant. Sed cùm dicimus superficiem ab vnitatibus lineæ generari, Intelligemus vnitates illas contineri singulas sub binis vnitatibus propositæ lineæ, in quasuis vnitates secte, & hac lege fient rectangula, sub binis lineis contenta, per primam diffinitionem secundi. Quæ dicentur vnitates quadratum totius rectæ propositæ metientes, & ipsius quadrati naturam sectantes, quod semper sub vnica contineri lineæ diximus. Siquidem binæ proferantur lineæ, quarum ab eis comprehensum rectangulum vnitatibus distinguere velimus. Alteram earum (quæcunque fuerint) semper certam propositam dicere possumus, cui reliqua conferenda est, quæ si per vnitates propositæ certæ commensurabiles, distingui possit, hæ vnitates singulæ à binis lineis sumptæ, rectangu-

la comprehendent, sub binis lateribus commensurabilibus comprehensa, quæquidem vnitates rectangulum totum numerantes, erunt. Quia verò cuiuslibet vnitatis longitudo & latitudo certæ sunt lineæ, cùm sint certæ commensurabiles. Ipsæ rectangulum certum producent, cuius quidem longitudo & latitudo est determinata, sive ῥητή. Quod si illi propositæ certæ alia comparetur certa, ipsi potentia tantùm commensurabilis, longitudine verò nequaquam. Vulgatum est earum linearum vnitates incommensurabiles esse, ex hypothesi. Quare rectangulum sub vnitate certæ lineæ, & vnitate reliquæ priori incommensurabilis comprehensum, incertum ac indeterminatum esse. Nam alteram eius certam dimensionem, reliqua incerta indeterminat. Idcirco ex his vnitatibus indeterminatis constans rectangulum, incertum ac indeterminatum erit, hoc est, à natura eius quod fit ex proposita alienum. Si vero eidem propositæ binæ potentia tantùm commensurabiles offerantur (adinuicem verò longitudine commensurabiles existant) quæ rectangulum comprehendant. Perspicuum est eius rectanguli vnitates sub lineis ipsi certæ incommensurabilibus contineri, æquè secundum longitudinem ac latitudinem. Et nihilominus certas esse: nam sub lineis longitudine sibi, & potentia sibi, ac propositæ commensuralibus continentur. Sed quia earum potentia certæ propositæ commensurabilis fuit sequetur sub ipsis comprehensum rectangulum, & ab his vnitatibus compositum, ipsius certæ quadrato commensurabile (& ideo certum) esse. Nempe rectangulum ex iisdem quadratorum vnitatibus constans, eidem potentiæ cui quadrata commensurabilia extiterunt, commensurabile fiet.

Propositio prima.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à maiore auferatur maius quàm dimidium, & eius quod relictum est maius quàm dimidium, ídque sæpe fiat, Relinquetur tandem magnitudo minor, minore magnitudine exposita.

Exponantur duæ magnitudines A K *&* G D*: à maiore autem* G D *auferatur maius dimidio scilicet* D Z*, & rursus reliqui* G Z *maius quàm dimidium scilicet* Z I*, & sic sæpe fiat: Dico tandem relinqui posse magnitudinem* G I *minorem magnitudine* A K *minore exposita. Addantur ipsi* A K *tot æquales, quousque aliam* D G *excedant, per 4 diffi. quinti, sintq́;* A K*,* K T *&* T B*. Quoties verò secta est* A B *in* T *&* K*, toties secetur* D G*, ablato sæpe plus dimidio in* Z *&* I*, cùm autem* A B *sit maior alia* G D*, sed ex* A B *aufertur* T B *non maius dimidio, à reliqua verò* G D *aufertur* Z D *dimidio maius, reliquum* G Z *erit ideo reliquo* A T *minus. Eodem rursus argumento, quia à maiori* A T *aufertur* K T *non maius dimidio, à minori verò* G Z *aufertur, ex hypothesi,* Z I *maius dimidio, sequetur reliquum* G I *minus esse reliquo* A K*, magnitudine inquam minore exposita. Duabus igitur magnitudinibus expositis, &c. Aliàs vbi tantùm aufertur à maiore dimidium sæpe, Dupletur* A K *minor quoad excedat* G D *maiorem in* T *&* B*, secetur autem bifariam* G D *inæquales numero sectiones ipsis* K *&* T*, quæ sint* I *&* Z*: quoniam sicut tota* A B *ad dimidium* A T*, sicutq́;* A T *ad* A K*, sic sunt* G D *ad* G Z *&* G Z *ad* G I *(nempe in dupla ratione) Æqua igitur ratione sicut* A B *ad* A K*, sic erit* G D *ad* G I *(per 22 quinti) sed maior est* A B *ipsa* G D *(per hypothesim) maior itaque erit* A K *ipsa* G I *(per 14 quinti) & proinde* G I *ablato sæpe dimidio fit minor ipsa* A K*.*

MONITVM.

Non defuerunt qui huius theorematis immensam in quantitates potestatem restringere voluerint, opposito argumento ex decimasexta tertij, inter quos potior fuit Campanus, cum dicit angulum contingẽtiæ semper minorem relinqui quolibet rectilineo angulo. A quo sæpius plus quàm dimidium ablatum fuerit, & ideo videri hoc theorema nugatoria exceptione fœdandum esse. Soluit autem hoc argumentum, dicens hos angulos non vniuocè dici angulos, ac curuum & rectum diuersa esse genera, quod nos omnino fateri non possumus. Nam anguli rectilinei, & anguli contingentiæ idem est genus, quoad quantitatem, licet quoad commensurationem sint diuersa, angulorum etenim quantitas in sola inclinatione linearum continetur, vt quæ fuerit maior minor, vel æqualis inclinatio, quanti-

tates angulorum æquales vel inæquales ostendat. Quare sequitur omnes angulos planos idem habere quantitatis genus scilicet inclinationem, veluti omnes lineas idem quantitatis genus, longitudinem habere diximus. Superficies verò idem aliud genus longitudinem scilicet cum latitudine: solida verò aliud genus tres quidem dimensiones, vt quandoque dicemus. Et igitur omnes angulos planos rationem adinuicem habere, quæ est habitudo magnitudinum idem quantitatis genus habentium tertia diffinitione quinti. & licet angulus contingentiæ per multiplicationem rectilineum non possit excedere, tamen eius quantitas (quæ in sola linearum inclinatione consistit) multiplicata rectilinei quantitatem excedet: quinetiam rectilineus multiplicatus contingentiæ angulum excedet, ac ideo inter eos ratio, erit per 4 diffinitionem quinti: alter enim multiplicatus alterum excedet. Non itaque Campani solutionem recipiemus eos equidem non esse vnmocè angulos aut eiusdem generis, cum hæc sufficere non videantur. Sed dicemus hoc theoremate Euclidem generalem suo more quantitatibus Geometricis legem præscripsisse, quæquidem in se habent omnes numerorum affinitates, ac insuper alias quas nec patiuntur numeri inter se. Huius itaque rei gratia binas protulimus huius theorematis demonstrationes: priorem, qua maius dimidio abstrahitur indeterminatè ac confusè, cùm illud nec determinet Euclides: posteriorem verò, qua dimidium præcisè subtrahi præcipientes, idem sequi ostendimus. Quæ posterior cùm ad numeros tantum attineat, obiectum illud 16 tertij soluere non poterit, eò quòd anguli illi numerorum rationem non patiantur. Sed quia prior demonstratio in vtrasque scilicet numerorum ac quantitatum incertarum affinitates, Geometrico more dominatur, ea satis superq; propositum illud soluet problema, ablato quidem anguli rectilinei plusquam dimidio, scilicet ablato angulo mixto ex curua rectaq; composito, vt liberam ab Euclide vltra dimidium quamuis permissam sumamus quantitatem, tunc tandem minor relinquetur angulus angulo contingentiæ proposito, iuxta huius theorematis præscriptam legem, quiquidem erit alius contingentiæ angulus, vt latius dicemus super eadem decimasexta tertij.

Propositio secunda.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expositis sublata semper minore à maiori, reliqua non metiatur præcedentem, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

Exponantur duæ magnitudines inæquales A B & G D. Tollatur autem à maiori G D ipsi A B æqualis Z D, quousque supersit G Z minor priore A B, à qua tollatur eidē G Z æqualis I B, sicq; sæpius fiat, ac nusquam reliqua A I metiatur præcedentem G Z vel I B. Dico positas A B & G D incommensurabiles esse. quod si non sint, metiatur vtrasq; aliqua E magnitudo. Cùm enim G Z posita sit minor reliqua Z D, hoc est ipsa A B, similiter A I minor reliqua I B, ab eisdem A B & G D aufertur plusquam dimidium, cum vna tollatur sæpius ab altera. Tollantur itaque (per primam huius) sæpe quousque supersit aliqua magnitudinum A I vel G Z minor E metiente ipsas A B & G D quoniam autem E metitur totam C D, & ablatam Z D (cùm metiatur A B sibi æqualem) metietur & reliquam G Z (per secundā communem sententiam septimi) metieturq; sibi æqualem I B. Si igitur metiatur totam A B, & ablatam I B metietur & reliquam A I, scilicet ipsa E minorem. Nam illud infinitè similiter fiet, quoad ventum sit ad minorem E metiente (per primam huius) vt diximus: maior igitur E metietur minorē scilicet A I vel G Z, quoad fieri non potest, nulla igitur metietur ipsas A B & G D, quæ idea sunt incommensurabiles. Si itaque duabus magnitudinibus inæqualibus, &c.

Propositio tertia. *Problema 1.*

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem innenire mensuram.

Proponantur duæ magnitudines commensurabiles A Z & D G, illa minore sæpius à maiore detracta, tandem relinquent vltimam metiri præcedentem. Si enim non metiretur, incommensurabiles essent (ex secūda huius) à maiore igitur G D tollatur Y G ipsi Z A æqualis, ab Z X verò tollatur A B ipsi D I æqualis, sicq; quoad reliqua Z B metiatur præcedentem D I: Dico Z B propositarum

A Z & D G communem esse mensuram, & earundem maximam quia Z B metitur D I, metietur & A B sibi æqualem sed & seipsam metitur, totam igitur A Z & G I sibi æqualem metietur. Metitur autem Z B reliquam D I, totam igitur D G metietur. Eadem igitur Z B communis est positarum A Z & D G mensura quod autem sit maxima, ostendamus. Nulla ipsa Z B maior, positas A Z & D G metitur, quod si sit aliqua, esto E quoniam E metitur totam D G & totam A Z, metietur & sibi æqualem ablatam I G, & igitur reliquam D I, per secundam communem sententiam septimi, siquidem metiatur D I, & sibi æqualem A B ablatam metietur sed metitur totam A Z, ex hypothesi, eadẽ igitur E metietur & reliquam Z B, minorem seipsa, quod fieri non potest. Nulla igitur maior Z B expositas A Z & D G metitur. Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis maximam earum communem inuenimus mensuram.

Corollarium.

Si magnitudo duas metiatur magnitudines, & maximã earum communem metitur mensuram. *Nam si metitur totas & ablatas, metietur & proinde reliquas, quarum vna est maxima.*

Propositio quarta. *Problema 2.*

Pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem inuenire mensuram.

Proponantur prius tres magnitudines A B G, quarũ communem mensuram inquiramus maximam. Sumatur (ex præfata) maxima duarum A & B mẽsura D, quæ si metiatur tertiam G, optatum consequimur, cùm tres A B & G metiatur, & maxima. Nam si alia sumpta D maior, metiretur priores A & B, eadem metiretur D minorem, per præfatum corollarium, quod sit extra potentiam. Si verò D non metiatur tertiam G, ostendamus commesurabiles esse D & G. Cum sint commensurabiles A B G, aliqua metiens eas, metietur & maximam duarum A B mensuram, quæ fuit D, per corollarium præcedentis, sed metitur G, ex hypothesi: binæ igitur G & D sunt commensurabiles. Sumatur maxima binarum G & D mensura, quæ sit E, cùm autem E metiatur D, metietur & ipsas A & B, quas D metitur. Ipsa itaque E tres A B G metitur, & maxima: nam si alia maior ipsa E metiatur A B G, eadem metietur & D positarum A & B maximam mensuram, per corollarium præcedẽtis. Si autem metiatur D & G, metietur & minorem E, quæ est eorundem G & D, maxima mensura, illa alia igitur maior E posita, E minorem metietur, per idem corollarium, quod est absurdum. Non est igitur alia maior sumpta E, metiens tres A B & G hoc secundo posito: quod si sint quatuor, & E quartam metiatur, ipsa erit maxima, si verò non metiatur quartã, sumemus eiusdem E ac quartæ maximam communem mensuram, qua erit datarum quatuor maxima, & sic in quotcunque propositis, inuicem commensurabilibus. Pluribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, &c.

Corollarium.

Si magnitudo metiatur quotcunque magnitudines, eadem metietur ipsarum maximam mensuram. *Nam datis tribus A B G patuit D maximam fieri ipsarum A B G mensuram, aut saltem quia D fuit maxima ipsarum A B, ex præfata, maxima duas G & D metiens scilicet E fuit maxima trium mensura. Qualibet itaque tres A B G metiens, quia metitur binas A B metietur & D, ex coroll. præfata, quia verò metitur, D & G metitur ex eodem coroll. & E, quæ fuit maxima trium A B G mensura. Qualibet igitur metiens tres A B G metietur & E maximam earum communem mensurã, haud secus in quatuor. Nam si eadem E metiatur quatuor, metietur & maximam trium (ex nunc ostensis) cùm tres metiatur, quæ si fuerit maxima quatuor propositarum, sufficit sin minus, eadem E metiens maximam trium & quartam, metietur & earum maximam mensuram, quæ quidem fuit maxima quatuor magnitudinum. Quia itaque E mensa est quatuor magnitudines, metitur & earum maximam mensuram. Hac lege in quotuis magnitudinum numero reperies, metientem magnitudines quotlibet, maximam earum metiri mensuram.*

Propositio quinta.

Commensurabiles magnitudines, adinuicem rationem habent quam numerus ad numerum.



Sint commensurabiles magnitudines A & B: Dico eas habere rationem quam numerus ad numerum, metiatur ipsas A & B aliqua G: & quoties G metitur A tot sint in D vnitates, quoties verò idem G metitur B tot sint in E vnitates, quoniam vnitas toties repetitur in D & E, quoties G repetitur in A & B, ex hypothesi, æquemultiplex erit A ipsius G, vt D vnitatis, similiter B eiusdem G vt E vnitatis. Erit igitur A ad G vt D ad vnitatem & B ad G, vt E ad vnitatem, & conuertẽdo (per corollarium quarta quinti) erit G ad B vt vnitas ad E: æqua ratione igitur (per 22 quinti) erit A ad B sicut D numerus ad E numerũ. Ipsæ itaque A & B rationem habent numerorum, eò quòd similiter repetant communem eorum mensuram, vt numeri repetunt vnitatem, quæ est omnium communis mensura. Commẽsurabiles igitur magnitudines, &c.

Propositio sexta.

Si binæ magnitudines adinuicem rationem habuerint quam numerus ad numerum, commensurabiles erunt ipsæ magnitudines.



Sint binæ magnitudines A & B rationem habentes, quam numerus G ad numerum D. Dico A & B commensurabiles esse adinuicem. Quot vnitates sunt in G, tot sint æquales partes in A, vni earum partium æqualis esto E, per 9 sexti, quoniã æquè metitur E ipsam A vt vnitas numerum G, erit E ad A vt vnitas ad G. Sed fuit (ex hypothesi) A ad B vt G ad D. Erit igitur æqua ratione E ad B vt vnitas ad D, per 22 quinti, Metitur autem vnitas D numerum, metietur igitur E magnitudinem B. At eadem E, metitur ipsam A (vt patuit) vtrasque igitur A & B eadem E metitur. Commensurabiles igitur sunt binæ A & B magnitudines, per primam diffinitionem huius. Si binæ itaque magnitudines adinuicem rationem, &c.

Corollarium primum.

Hinc assequimur, propositæ cuilibet rectæ A aliam posse dari B rationem habentem quam numerus G ad numerum D. *Nempe si ordinemus E partem propositæ rectæ A denominatam à numero G, per nonam sexti, ac postmodum, eam partem per vnitates alterius numeri D repetamus, fiet linea quæsita B, nam erit G ad vnitatem vt A ad E, atque vt vnitas ad D sic E ad B, per decimãquintam quinti. Aequa igitur ratione (per 22 quinti) erunt G ad D numeri, vt A ad B rectæ.*

Corollarium secundum.

Præterea sequitur posse dari quod ex A recta, ad simile quod ex aliqua alia, sicut sunt dati G ad D numeri. *Cum enim rectis A & B media possit dari proportionalis, per decimamtertiam sexti. Et (per corollarium decimænonæ sexti) sit quod à prima A ad id quod à media inter A & B sicut est A ad B. Sed sicut A ad B sic est numerus G ad numerum D. Sicut igitur quod ex prima A, ad id quod ex media inter A & B, sic erit numerus G ad numerum D, vel vt quadratus numeri G ad medium inter quadrata positorum G & D. Nam duorum quadratorum quæ ex ipsis G & D, vnus est medius proportionalis numerus, per vndecimamoctaui, &c.*

Proposi

Propositio septima.

Incommensurabiles magnitudines, adinuicem rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint A & B magnitudines incommensurabiles: Dico eas non habere rationem numerorum: quòd si crederentur rationem numerorum habere, iam commensurabiles essent, ex præfata, quod obstaret hypothesi, cùm incommensurabiles supponantur. Non itaque rationem numerorum habebunt. Incommensurabiles igitur magnitudines, &c.

A
B

Propositio octaua.

Si binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

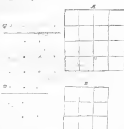
Sint binæ magnitudines A ad B rationem non habentes quam numeri inter se: Dico eas esse incommensurabiles. Nam si commensurabiles essent, ipsæ rationem numerorum haberent, per quintam huius, quod obstaret hypothesi, quæ proponit eas rationem non habere numerorum. Si igitur binæ magnitudines adinuicem rationem non habuerint quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

A
B

Propositio nona.

A longitudine commensurabilibus rectis lineis quadrata, adinuicem rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata adinuicem rationem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, latera quoque habebunt longitudine commensurabilia. A longitudine verò incommensurabilibus rectis lineis quadrata adinuicem rationem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata adinuicem rationem non habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

Huius prolixi theorematis duæ sunt conclusiones breuiores, scilicet quadrata rationem habere quam quadrati numeri, & quadrata habere latera, longitudine commensurabilia, sese semper necessario sequi. Contra verò quadrata rationem non habere quam quadrati numeri, & quadrata non habere latera longitudine commensurabilia sese similiter necessariò sequi. Quòd autem dicit Euclides longitudine, licet per se sit notum, lineam tantùm longitudinem habere, tamen quia linearum longitudines quadratorum ab eis genitorum notitiam præbent ea quadrata linearum potentiam diximus: earum verò particularem quantitatem, longitudinem nominauimus, vt ea quæ sua particulari quantitate vel ex se genita potentia certa commensurabilem produxerit magnitudinem, certa dicatur ac numerorum ad certam rationem habens. Quæ verò nec particulari sibi longitudine nec ab ipsa genita potentia certa commensurabilem produxerit magnitudinem, incerta dicetur, ac à numerorum rationibus ad propositam certam penitus aliena.



His expositis proponantur binæ rectæ A *&* B *longitudine commensurabiles, à quibus fiant quadrata. Dico eorum quadrata rationem habere quam quadratus ad quadratum numerum. Quoniam* A *&* B *sunt commensurabiles. Ipsæ rationem habent numerorum, per quintam huius, habeant quam numeri* G *ad* D. *Sed ipsarum* A *&* B *quadrata duplam habent rationem quam ipsæ* A *ad* B, *per corollarium vigesimæ sextæ: numerorum autem* G *&* D *quadrati duplam similiter habent quam ipsi* G *ad* D, *per vndecimam octaui. Igitur rationis* A *ad* B *vel* G *ad* D *(quæ eadem est per constructionem) duplæ sunt singula quadratorum planorum, atque quidem numerorum rationes. Quare æquales adinuicem sunt per sextam communem sententiam. Quoniam igitur est* A *latus ad* B *latus vt* G *numerus ad* D *numerum, sequetur esse quadratum rectæ* A *ad quadratum rectæ* B, *vt quadratus* G *ad quadratum* D *numeros.*

Secundo, si ponantur quadrata rectarum A *&* B *rationem habere quam quadrati numerorum* G *&* D. *Dico rectas* A *&* B *latera, esse longitudine commensurabilia. Cùm enim quadratæ rectarum* A *&* B *duplam ipsis habeant rationem per corolla. vigesimæ sexti. Quadrati verò ipsorum* G *&* D *numerorum, similiter duplam quam ipsi* G *ad* D *rationem habent: quæ itaque æqualium rationum sunt dimidiæ, & ipsæ sunt æquales. Erunt igitur* A *ad* B *latera, vt* G *ad* D *numeri. Rectæ itaque* A *&* B *sunt commensurabiles longitudine, per sextam huius.*

Tertiæ verò & quartæ partium demonstratio, fit per argumentum ab hypothesis destructione. Si enim binæ lineæ A *&* B *ponantur longitudine incommensurabiles: Dico earum quadrata rationem non habere quam numeri quadrati. Quod si secus esse credatur, quadrata scilicet rectarum* A *&* B *rationem habere quam quadrati numeri, ipsæ* A *&* B *erunt (per secundam huius partem) longitudine commensurabiles, contra hypothesim, quæ supponit eas incommensurabiles.*





Ad quartam autem, si quadrata rectarum A *&* B *ponantur non habere rationem quam quadrati numeri. Dico nec eorum latera, scilicet rectas* A *&* B *esse longitudine commensurabiles. Nam si essent longitudine commensurabiles, descripta ex ipsis quadrata, rationem haberent per primam partem huius quam quadrati numeri, quod obstaret hypothesi. Si igitur latera fuerint incommensurabilia, eorum quadrata rationem quadratorum numerorum non habebunt. Et proinde si quadrata rationem non habeant, quam quadrati numeri, nec eorum latera, longitudine erunt commensurabilia. A longitudine igitur commensurabilibus rectis lineis, &c.*

MONITVM.

Hanc demonstrauit secundò Theon per primam sexti, quam demonstrationem ideo reliquimus, breuitati consulentes: ac insuper quia sexti prima continuas, non autem discretas docuit quantitates, quare postponenda fuit hæc demonstratio ei quæ per theoremata vtrisque (discretis scilicet & continuis) propria, propositum concludit. Animaduertendum tamen existimauimus, soluentes aliquorum obiecta, scilicet cum similes plani numeri non quadrati rationem quam quadrati habeant, per 26. octaui. Quadrata vero rationem similium planorum numerorum habentia habent ideo & quadratorum numerorum, & tamen illorum quadratorum latera numeris exprimi non poterunt, cùm plani non quadrati radicem quadratam non exprimant numeris: & proinde illorum latera numeris non expressa propositæ certa incommensurabilia esse, contra secundam huius partem.

Ad hæc dicemus, licet quadrata rationem similium planorum numerorum habentia sua latera, iisdem vnitatibus, quæ certam propositam metiuntur referre non possint, eaq; de causa ipsi certæ lon-

gitudine

titudine sint incommensurabilia: tamen cùm potentia eisdem certè commensuretur, & rationem habeant inter se quam quadrati numeri, eorum latera rationem inter se seruabunt, quam seruant quadratorum numerorum (eam rationem habentium) radices, quare inter se longitudine commensurabiles sunt, ad certam verò potẽtia tantum. Nam si diuidantur quadratorum latera in totidem æquas partes, quot sunt vnitates in radicibus quadratorum numerorum eam rationem habentium, perspicuum est eas partes in se ductas, totidem vnitates, quadrata componẽtes, producere, quot producunt radicum vnitates in se ductæ, cùm sint æquales numeri. Quare si quadrata seruent numerorum quadratorum rationem, sequetur eorum latera radicum seruare rationem: sed radices cùm sint numeri, ea latera (rationem numerorum seruantia) commensurabilia erunt, per sextam huius.

Sit in exẽplum, quadrata numeris A B & D E expressa, quorum radices siue latera sint A C & D F. Sint autẽ quadrata G H & K M rationem habentia quam habent similes plani in ratione ipsorum A B & D E numerorum constituti. Proposita verò rectæ sint A C & D F, quoniam quatuor hæc quadrata numeris exprimuntur, commensurabilia erunt. Quia vero quadrata A B & D E per numeros quadratos exprimuntur, eorum latera per numerorum radices exprimẽtur: sed cum quadrata G H & K M per numeros non quadratos expressa sint, eorũ latera numeris exprimi non poterunt. His maximè quorũ multiplicatio per se quadrata illa restituat, per hos similes planos numeros expressa. Quare 18 & 8 numerorum quadrata G H & K M exprimentium, cùm nulla sit radix ipsorum quadratorum radices G I & K L nullis numeris exprimi poterunt igitur rectæ A C & G I longitudine incommensurabiles erunt, similiter D F & K L. Potentia verò commensurabiles, cùm areæ rationem habeant numerorum. Sed quia sunt quatuor proportionalia A B ad D E vt G H ad K M, sequetur esse A C ad D F, vt G I ad K L rectas, per 22 sexti. Atqui A C ad D F rationem habet numerorum, & igitur G I ad K L rationẽ numerorum habebit. Erunt itaq; commensurabiles rectæ G I & K L (quadratorum latera) per sextam huius. Quoties igitur eadem mensura metitur rectas A C & D F, toties alia quædam metitur rectas G I & K L, cùm sint in eadem ratione. Sicut igitur tota A C ad totam G I, sic vnitas metiens A C ad vnitatem metientem eadem multitudine G I, per 15. quinti. Tota autem A C toti G I incommensurabilis est. Et igitur vnitas vnitati incommensurabilis erit, vt patebit decimatertia huius.

Hanc ferè non suo loco posuimus demonstrationem, vt mentibus inculcemus omnem incertarum à certis & inter se differentiã, ab vnitatum eas exprimentium differentia oriri, quæ cum nullas (etiam quantumuis abscisas) vnitatis partes pro communi mensura suscipiant, hac de causa incommensurabiles, & proinde extra omnem affinitatem discretam detectæ, incertæ ac indeterminatæ dicuntur, veluti à proposita cognitione diuulsæ. Hinc ad futurorum intelligentiam facilè præuidemus, binas lineas certæ propositæ longitudine incommensurabiles (inter se tamen commẽsurabiles) certam aream continere, cum earum vnitates adinuicem ductæ certum producant quadratum, aut eidem quadrato commensurabile, additis quidem aut ablatis vnitatibus. Sicut enim quadrata G H, K M (similibus planis numeris expressa) à lineis ipsi certæ incommensurabilibus longitudine facta certum producũt, haud secus linearum scilicet G I, K L segmenta, vnitatibus certarum A C, D F multitudine æqualia, ac ipsis longitudine incommensurabilia, per totidem vnitates positorum A B, D E, certorum vnitatibus multitudine æquales ac commensurabiles, magnitudine tamen inæquales, certa G H, K M producunt quadrata, quorum quantitas eadem refertur per has vnitates à rectis incommensurabilibus certis ortas, quæ proposita fuit per numeros planos (non autem quadratos) 18 & 8, quorum vnitates certorum vnitatibus eadem aut æquales existunt similia plana constituentes inæquales autem his quæ æqualia ipsis planis quadrata constituunt, numero ac quantitate, ipsisq; commensurabiles. Planorũ itaq; æquales sunt vnitates, laterum verò inæquales, eadem tamen ratione qualibet coniunctæ.

Illatio.

Et manifestum est ex his, longitudine commensurabiles lineas, simul esse & potentia. Quæ potentia verò non ideo esse & longitudine. Longitudine autem incommensurabiles, non ideo esse & potentia. Quæ verò potentia, erunt simul & longitudine.

Infert ab hac nona quatuor Euclides. Primum quidem, cùm commensuratio à numerorum ratione producatur, aut lineas longitudine commensurabiles necessariò habere earum potentiam (hoc est ex eis descripta quadrata) commensurabilem. Cum enim lineæ habeant numerorum rationem, & quosuis numeros per se liceat ducere vt quadratos producant, linearum igitur quadrata seu potentiæ, quadratorum numerorum rationem habentes, commensurabiles erunt. Ad secundum autem, si lineæ potentia sint commensurabiles, non ideo sequitur eas esse cõmensurabiles longitudine, maximè vbi potentiæ illæ rationẽ quadratorum, aut similiũ planorũ numerorũ non seruant. Nam earum potentiarum seu quadratorum latera, longitudine incommensurabilia erunt, ex vltima parte huius nonæ. Ad tertium, aut longitudine incommensurabiles rectas non ideo esse potentia incommensurabiles. Nam illæ lineæ quandoque esse possunt latera quadratorum, non habentium rationem quadratorum numerorum, quamuis habeant rationem numerorum, & sic commensurabilia existant. Hac igitur de causa, longitudo incommensurabilis non semper potentiam generat incommensurabilem, sed vt patet sæpe commensurabilem. Ad quartum autem, si lineæ potentiam incommensurabilem habeant, necessariò longitudinem simul habebunt. quòd si non esset earum longitudo incommensurabilis, ipsæ rationem haberent numerorum, qui per se ducti potentias seu quadratos producerent commensurabiles, contra positum, cùm supponantur potentia incommensurabiles. Potentiarum igitur incommensuratio longitudinum præ se fert incommensurationem.

Corollarium.

Dissimiles plani numeri rationem non habent quadratorum numerorum. *Si enim haberent, similes essent plani, per corollarium vigesimæseptimæ octaui, contra propositum: non igitur habent. Et ideo quadrata rationem dissimilium planorum habentia numerorum, latera habebunt longitudine incommensurabilia, per vltimam partem huius nonæ, cùm ea quadrata rationem non habeant quadratorum numerorum.*

Lemma.

Quotlibet binos numeros dissimiles planos inuenire. *Proposito numero conferantur quotlibet in ratione superparticulari, aut superbipartiente. Nam has rationes habentes dissimiles sunt plani, per corollarium vigesimæsextæ octaui. Præterea sumantur duo, quorum alter tantùm sit quadratus, tum hi rationem non habebunt quadratorum per 24 octaui, quare similes plani non sunt, per vigesimamsextam eiusdem. Insuper si inter duos numeros medius cadat proportionalis, extremi rationem habebunt quam quadrati. Nam ex vigesima octaui ipsi sunt similes plani, & proinde (per vigesimamsextam eiusdem) rationem habent quam quadrati: siquidem è conuerso inter eos nullus cadat medius, ipsi rationem quam quadrati non habebunt. Nam si rationem quadratorum haberẽt, similes plani essent, per corollar. vigesimæseptimæ octaui. Et proinde inter eos vnus caderet medius, per decimamoctauam octaui, contra hypothesim, quod inconuenit.*

Aliàs.

Si duo numeri inuicem ducti quadratum non producant, ipsi dissimiles sunt plani. *cùm non habeant medium proportionalem, nempe latus medij ab extremis producti, per 20 septimi. Quare similes plani inuicem ducti, quadratum restituunt, per primam noni, & quadratum componentes similes sunt plani, per secundam eiusdem.*

Propositio decima.

Quæ eidem magnitudini commensurabiles, & ad inuicem sunt commensurabiles.

Sint bina magnitudines A & B eidem G commensurabiles. Dico A & B esse adinuicem commensurabiles. Quoniam G vtrique ipsarum A & B est commensurabilis, ea ad illas rationem habet numerorum (per quintam huius) habeat quam E ad D & Z numeros. Quoniã est G ad A vt E ad D, erit (ex corollario quartæ quinti) A ad G vt D ad E. Sed est G ad B vt E ad Z, ex hypothesi constru-

constructionis. Erit igitur æqua ratione A ad B sicut D numerus ad Z numerum, per 22 quinti. Commensurabiles itaque sunt (per sextam huius) A & B adinuicem. Quæ igitur eidem magnitudini, &c.

Corollarium primum.

Si binarum magnitudinum altera commensurabilis fuerit alicui, Altera vero eidem incommensurabilis, ipsæ magnitudines incommensurabiles erunt.

Sit A commensurabilis ipsi G, & eidem G sit B incommensurabilis: Dico A ipsi B incommensurabilem esse. Nam si B ipsi A commensurabilis esset, & eidem A commensurabilis est G, sequeretur (ex decima huius) G & B commensurabiles esse, contra positum, quod fieri non potest. Si igitur binarum magnitudinum altera, &c.

Corollarium secundum.

Si duæ magnitudines commensurabiles fuerint, alteraque earum magnitudini cuidam incommensurabilis fuerit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

Sint binæ magnitudines A & B commensurabiles, Alteráque earum A sit cuidam G incommensurabilis: Dico reliquam B eidem G incommensurabilem esse. Nam si B ipsi G sit commensurabilis, Iam idem B ipsi A commensurabilis fuit. Sequetur igitur A & G (eidem B commensurabiles) esse adinuicem commensurabiles, per decimam huius, contra hypothesim, quod esset absurdum. Incommensurabilis igitur erit B ipsi G. Si itaque duæ magnitudines commensurabiles fuerint, &c.

Corollarium tertium.

Si duæ magnitudines duabus incommensurabilibus fuerint commensurabiles, Et ipsæ inuicem incommensurabiles erunt.

Sit A scilicet commensurabilis ipsi B, & G ipsi D, sint autem B & D incommensurabiles: Dico A & G incommensurabiles esse. Quod si commensurabiles essent A & G, & eidem A fuit B commensurabilis, sequetur igitur B ipsi G commensurabilem esse per decimam huius. Sed eidem G fuit commensurabilis D, ex hypothesi, ipsæ igitur B & D (per eandem) commensurabiles erunt, & (ex hypothesi) incommensurabiles positæ, quod fieri nequit. Ipsæ itaque A & G incommensurabiles erunt. Si igitur duæ magnitudines, &c.

MONITVM.

Hæc tria præfata corollaria hanc decimam necessariò sequentia, varia scribentium sententia relicta sunt. Prius etenim lemma à Zamberto existimatum fuit. Ab altero verò Græcorum exemplarium theorema, & à reliquo lemma. Secundum autem, efficit Zambertus propositionem decimamtertiam decimi, Campanus vero suæ octauæ additionem efficit. Theonis demum vnum exemplar, decimum quartum dicit theorema. Tertium corollarium futuris demonstrandis vtile hoc loco proprium ordinem sibi ascitum fuisse iudicauimus. Namque hæc tria lemmata vnico hoc decimo demonstrantur theoremate. Quare eiusdem potius appendices quàm theoremata dici debent.

Propositio vndecima.

Si binę magnitudines commensurabiles compositæ fuerint, tota vtrique ipsarum commensurabilis erit. Et si tota vni earum commensurabilis fuerit, Quæ in principio magnitudines commensurabiles erunt.

Sint binæ A B & B G commensurabiles: Dico totam A G compositam vtrique A B & B G commensurabilem esse. Quia commensurabiles sunt A B B G, metietur eas aliqua magnitudo, quæ sit D, per primam diffini-

tionem huius, quoniam D *metitur* A B B G *partes, totam* A G *componentes, ipsa* D *metitur totam* A G. *Quæ igitur* A G *vtrique partium* A B *&* B G *commensurabilis est. Siquidem ponamus totam* A G *vni earum* A B *commensurabilem esse: Dico* A B B G *esse commensurabiles. Nam metiatur datas* A B A G *commensurabiles, aliqua* D *magnitudo. Quia igitur* D *metitur totam* A G *& ablatam* A B, *Ipsa* D *metietur & reliquum* B G, *per secundam cõmunem sententiam septimi: eadem igitur* D *metiens binas* A B B G, *efficit eas commensurabiles. Si itaque binæ magnitudines, &c.*

Corollarium.

Hinc assequimur, Si tota vni earum fuerit commensurabilis, & reliquæ commensurabilis erit. *Eadem etenim* D *omnes metitur, per secundam communem sententiam septimi.*

Propositio duodecima.

Si binæ magnitudines incommensurabiles compositæ fuerint, tota vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Et si tota alteri ipsarum incommensurabilis fuerit, quæ in principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Sint binæ A B B G *incommẽsurabiles: Dico totam* A G *incommensurabilem esse vtrisque* A B *&* B G, *Quod si ipsis cõmensurabilis credatur, metiatur has* A G *&* B G *aliqua* D. *Quoniam enim* D *metitur totam* A G *& ablatam* B G *metietur & reliquam* A B, *per 2. cõmunem sententiam septimi. Metietur itaque* A B *&* B G *(quas incommensurabiles posuimus) quod fieri non potest. Tota igitur* A G *vtrique* A B *&* B G *incommensurabilis erit. Secundo, ponamus totam* A G *alteri earum* A B *incommensurabilem esse. Dico* A B B G *incõmensurabiles esse: si enim commensurabiles credantur, metiatur eas* A B B G *aliqua* D: *qua cùm metiatur singulas* A B *&* B G *(totius* A G *partes) metietur & totam* A G. *Commensurabilis erit igitur tota* A G *vtrique earum, sed & alteri* A B *incommensurabilis fuit posita, quod fieri nequit. Incommẽsurabiles itaque erunt* A B B G, *quæ in principio magnitudines. Si itaque bina, &c.*

Corollarium.

Et proinde, Si tota vni earum sit incommensurabilis, & reliquæ incommensurabilis erit. *Nam si alteri commensurabilis esset, & reliqua commensuraretur (per corollarium præcedentis) contra positum, &c.*

Propositio decimatertia.

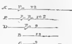
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima autem secundæ fuerit commensurabilis, & tertia quartæ commensurabilis erit. Si verò prima secundæ fuerit incommensurabilis, & tertia quartæ incommensurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales scilicet A *ad* B *vt* G *ad* D, *sintque* A *&* B *commensurabiles Dico* G *&* D *commensurabiles esse, quoniam* A *ad* B *commensurabiles sunt, ipsæ rationem numerorum habent, per quintam huius, sed eandem habent* G *ad* D, *quam* A *ad* B, *ex hypothesi, ergo* G *ad* D *rationem habent numerorum, & igitur commensurabiles erunt, per sextam huius. Ad secundum autem, Esto* A *prima* B *secundæ incommensurabilis. Dico &* G *tertiam quartæ* D *incommensurabilem esse, quoniam* A *&* B *sunt incõmmensurabiles, ipsæ non habent numerorum rationem, per septimam huius. sed eandem quam* A *ad* B *habent* G *ad* D, *ex hypothesi, igitur* G *ad* D *non habent rationem numerorum incommensurabiles itaque sunt* G *ad* D, *per octauam huius. Si igitur quatuor, &c.*

Proposit

Propositio decimaquarta. Problema 3.

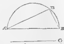
Propositæ rectę lineę binas rectas incommẽsurabiles inuenire. Alteram quidem longitudine tantùm, alteram autem & potentia.



Esto proposita recta (hoc est cuius quantitas sit certa seu determinata, per quintam diffinitionem huius) linea A, cui inuestigandæ sint duæ incommensurabiles, altera quidem longitudine tantum, altera autem longitudine ac potentia. Ponantur duo numeri dissimiles plani, per lemma nonæ huius, qui (per corollarium eiusdem) rationem quam quadrati numeri nõ habeat, sintque B & G. Fiat autem (per corollarium sextæ huius) sicut B ad G, sic quod ex A, ad id quod ex D. Rectis autem A & D inueniatur media proportionalis (per decimamtertiam sexti) quæ sit E: quoniam positum est quod ex A ad id quod ex D sicut B ad G, rationem quadratorum numerorũ nõ habentes, quadrata rectarum A & D, habebunt latera A & D longitudine incommẽsurabilia, per vltimam partem nonæ huius, potentias verò commensurabiles per 6 huius. Data est igitur rectæ A propositæ recta D longitudine tãtum incommensurabilis. Cùm autem A E D sint continuè proportionales, erit sicut A ad D, sic quod ex A ad id quod fit ex E secunda, per corollarium 20 sexti, sed A rectæ D incommensurabilis ostensa est. Quod ex A igitur ei quod ex E incommensurabile erit, per secũdam partem 13 huius. Recta itaque E eidem A propositæ, potentia datur incommensurabilis, igitur & longitudine, per illationem nonæ huius. Propositæ itaque rectæ binas rectas incommensurabiles, &c.

Propositio decimaquinta. Problema 4.

Duabus datis rectis inæqualibus lineis, inuenire quo maius potest maior minore.



Sint binæ rectæ inæquales A B & G, super maiori verò A B constituatur semicirculus A D B. Eidem porrò semicirculo, per primã quarti, coaptetur recta G minori æqualis A D, coniuncta D B. Quoniam (per 47 primi) potentia rectæ A B, quæ subtendit angulum rectum A D B, æquatur potentiis rectarum A D, D B, sed potentiæ A D æqualis est potentia rectæ G minoris, cum sint per constructionem æquales A D & G. Sequetur itaque maiorem A B plus posse minore G (hoc est recta A D) quadrato lineæ D B. Duabus igitur A B & G datis, inuenimus quo maius potest maior minore.

Corollarium.

Haud dissimili via, potentem duas datas rectas dabimus. *Si quidem rectæ datæ ad angulum rectum componantur, hunc subtendens angulum, per 47 primi, binas datas poterit recta linea.*

Propositio decimasexta.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, potueritque prima secunda maius eò quòd fit ab eidem longitudine commensurabili, & tertia quarta maius poterit eò quòd fit ab eidem longitudine commensurabili. Et si prima secunda maius potuerit, eò quòd fit ab eidem incommensurabili longitudine, & tertia quarta maius poterit, eò quòd fit ab eidem longitudine incommensurabili.



Sint quatuor rectæ proportionales A ad B vt G ad D, possitq; A maius B, eo quòd ex E, & G maius D alio quod ex Z. Dico si A & E sint commensurabiles, esse & rectas G & Z, siquidem non, non. Quoniã quatuor A B G D sunt proportionales earum quadrata proportionalia erunt, per 22 sexti. Quia verò quadratum A excedit cõsequens, quod ex B, eò quòd ex E. Aliud verò antecedens ex G, similiter excedit suum consequens quod ex D quadrato Z. Erit conuersione rationis quod ex A ad quod ex E, sic quod ex G ad quod ex Z, per coroll. decimænonæ quinti. Si itaque primum quod ex A secũdo ex E commensurabile fuerit, & tertium ex G quarto ex Z commensurabitur, siquidem non, non: per 13 huius. Si itaque quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c.

MONITVM.

Proximarum propositionum septem præcedentium ordinem variare cogimur. Cùm enim situs earum varia scribentium sententiæ ad nos fuerit delatus, non possumus eam Euclidis fuisse mentem conijcere, qui tot in varios studiorum anfractus incidisset. quare disciplinæ authoritatem docẽtium authoritati præferentes, theoremata hoc loco ita transponimus, vt quæ cepit quinta huius de commensuratione loqui, ad duodecimam vsque perducamus. Postmodum decimatertia proportionem commensurationi copulantes, postremas 14, 15, & 16 potentiarum leges quánam arte longitudines sequantur docere incipientes, consequamur. Id equidem seruato theorematum numero eodem, quod si Campanus, Theon, ac duplex illud græcum exemplar, in eo dissideant, quo scilicet quædam theoremata Euclidis, corollaria fuisse dixere vel lemmata. Nos hac arte singula demonstrandis futuris necessariò collegimus, vt quæ immediatè ab aliquo dependent theoremate, eiusdem corollaria dixerimus, vel lemmata antiquum Theonis sequentes morem, quamuis quandoque satis impropriè lemmata, quæ corollaria dici debent & è conuerso dicamus. Sed cùm id huic disciplinæ nihil aut parum conferat dum tamen adsit demonstratio, ac vera methodi sequacitas, harum quæstionum præteribimus moram. Quia verò Theon post 16 huius, ponit lemma admodum à proposito distans, ac eiusdem sententiæ cum corollario à nobis post vigesimamoctauam sexti posito. Nos itaque illud tanquam præhabitum, hac obliti sumus data opera.

Propositio decimaseptima.

Si fuerint binæ rectæ lineę inęquales, quartę autem parti eius quod à minore æquum parallelogrammum ad maiorem applicatum fuerit, deficiens specie quadrata, & per commensurabilia ipsam diuiserit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex sibi longitudine cõmensurabili, Etsi maior plus poterit minore eo quod à sibi longitudine commensurabili. Quartę vero parti eius quod à minore ęquale ad maiorem applicatum fuerit deficiens specie quadrata, Per commensurabilia longitudine ipsam distribuet.

Sint binæ rectæ lineæ inæquales, scilicet A *minor, et* B G *maior, applicetur autem rectæ* B G *parallelogrãmũ æquale quartæ parti eius, quod fit à minore* A *(hoc est, quadrato dimidiæ lineæ* A*) quod quidem applicatum deficiat specie quadrata, per 28 sexti, illúdque sua applicatione secet rectam* B G *in* D*, sint'q;* B D *&* D G *longitudine commensurabiles: Dico maiorem* B G *plus posse minore* A*, eo quòd fit ex sibi longitudine commensurabili. Secetur bifariam* B G *in* E*, ipsi vero* E D *æqualis ponatur* E Z *reliquæ igitur* D G *&* Z B *æquales erunt, quoniam applicatum secat* B G *in* D*. Illud continetur sub segmentis* B D D G*, per corollarium 28 sexti. Quia vero recta* B G *secta est per æqualia in* E*, & inæqualia in* D*, rectãgulum sub* B D D G *cum quadrato ex* E D *(quæ inter sectiones) est æquale ei quod ex* B E *(vel* E G*) media, per quintam secundi, sequetur itaque id quod ex* E G *(vel* B E*) excedere id quod sub* B D D G*, seu quod ex dimidiæ ipsius* A*, quadrato* E D*, sed cùm quater ex* E G *fit totum quod ex* B G*, quater autem ex dimidia ipsius* A *quadratum fit totum ex* A *quadratum, Sequetur totam* B G *plus posse tota* A *quadrato* E D *quater sumpto, quod quidem erit quadratũ rectæ* D Z*. Nam rectæ* E D *æqualis posita est* E Z*. Cæterùm cùm* B D *sit (ex hypothesi) longitudine commensurabilis rectæ* D G*, erit & recta* B Z *eadem* B D *commensurabilis quia verò* B D *tota vni earum* B Z *est commensurabilis, & reliquæ* Z D *eadem* B D *commensurabilis erit, per vndecimam huius: quia autem duæ* B D *&* D G *commensurabiles componuntur, tota* B G *vtrisque* B D*,* D G *commẽsurabilis erit (per vndecimam huius) cùm insuper duæ* B G *&* Z D *eidem* B D *commensurabiles ostensæ sint, & ipsæ* B G *&* Z D *adinuicem erunt commensurabiles, per decimam huius, sed* B G *plus potest recta* A*, eò quòd fit ex* Z D*. Plus itur potest maior* B G *minore* A*, eò quòd ex* Z D *sibi longitudine commensurabili.*

Secundo, supponamus B G *maiorem plus posse recta* A *minore, ex sibi commensurabili longitudine, & insuper* B G *maiori applicatum, quod sub* B D *&* D G *æquum quartæ parti eius quod à minore* A *deficiens specie quadratæ: Dico hanc applicationem secare ipsam* B G *in* D *per commensurabilia: eadem figuræ dispositione vti possumus. Cùm enim excedat specie quadrata, inæquales erũt* B D *&* D G *sectiones, aliàs si sectio applicati caderet in* E *propositæ* A *&* B G *essent æquales, contra hypothesim. Quare*

per

per æqualia in E & inæqualia in D secta B G plus poterit minore A quadrato Z D, vt patuit. Commensurabilis autem fuit tota B G (ex hypothesi) ipsi Z D excessus longitudine: sed cùm tota B G vni earum Z D sit commensurabilis, quæ in principio Z D & binæ B Z D G cõmensurabiles erunt, per vndecimam huius quia rursus B Z binis B Z D G commensurabilis est, nam dimidia, & eisdem B Z D G commensurabilis est Z D, duæ igitur B Z Z D commensurabiles erunt, per eandem: sed binæ B Z Z D commensurabiles componuntur. Tota igitur B D vtrisque B Z Z D commensurabilis erit, atqui ipsi B Z fuit æqualis D G ipsa igitur B D reliquæ sectioni D G commensuratur, secta est ideo tota maior B G per commensurabilia longitudine in D. Si itaque fuerint, &c.

Propositio decimaoctaua.

Si fuerint binæ rectæ lineę inęquales, quartæ autem parti eius quod ex minore ęquum ad maiorem applicetur, deficiens specie quadrata, & ipsam per incommensurabilia diuiserit longitudine, maior plus poterit minore eò quod ex sibi lõgitudine incõmẽsurabili: Etsi maior plus poterit minore eò quòd ex sibi longitudine incommensurabili, quartę autẽ parti eius quod à minore ęquum, ad maiorem applicetur, deficiens specie quadrata, per incommensurabilia ipsam longitudine dispescer.

Sint binæ rectæ lineæ inæquales A & B G, secetur B G maior bifariam in E. Applicetur autem ipsi B G æquum quartæ parti eius, quod ex A (hoc est quadrato dimidiæ A) deficiens specie quadrata, rectámque B G hac applicatione per incommensurabiles longitudine secãs in D. Dico B G maiorem plus posse minore A, eò quod A sibi longitudine incommẽsurabili, iam (vt præfata ostendimus) applicatum ad ipsam B G, sub B D D G comprehenditur, æquum quidem ei quòd ex dimidia recta A, quod (per quintam secundi) minus fuit eò quòd ex E G dimidia recta B G, quadrato E D. Quare tota B G plus potuit minore A quadrato Z D, quæ est dupla rectæ E D. Quoniam binæ B D D G ponuntur incommensurabiles, & tota B G vtrique earum (per duodecimam huius) incommensurabilis erit. Quia vero binæ B Z D G æquales commensurabiles sunt ipsi D G, sed eidem D G, incommensurabilis est, tota B G. Igitur binæ B Z D G ipsi B G incommensurabiles erunt, per corol. primum decimæ huius. Sed quia tota B G vni earum (scilicet composita ex binis B Z D G) est incommensurabilis, & reliqua Z D eadem B G incommensurabilis erit, per corollarium duodecimæ huius. Tota igitur B G maior, quæ plus potuit minore A quadrato ex Z D, plus minore potest, eò quod ex sibi longitudine incommensurabili.

Ad secundum autem, supponamus rectam B G plus posse minore A quadrato Z D, toti B G longitudine incommensurabili: Dico B G diuisam esse in D, per incommensurabilia longitudine. Cùm tota B G ipsi Z D sit incommensurabilis & reliqua scilicet binis B Z D G incommensurabilis erit, per corol. 12 huius quia verò binarum alia scilicet B G binis B Z D G incommensurabilis est. Alia vero D G eisdem binis B Z D G est commensurabilis. Duæ igitur B G & D G sunt incommensurabiles, ex coroll. 12 huius. Et si tota B G vni earum D G fuerit incommensurabilis, quæ in principio B D & D G sunt longitudine incommensurabiles, per duodecimam huius. Secta est igitur B G in D per incommensurabiles longitudine. Si itaque fuerint binæ rectæ lineæ, inæquales quartæ autem, &c.

Lemma.

Ostensum est in commensuratione potentiam necessario sequi longitudinem, non autem longitudinem sequi semper potentiam. In incommensurabilibus autem, longitudinem semper sequi potentiam, potentiam vero sæpius longitudinem non sequi. *Quare dicemus propositam certam quam ῥητὴν dixit Euclides, lineam esse suppositam ex libera potius hypothesi, quàm necessitate aliqua depromptam, ad quam reliquas comparantes, eiusdem respectu siue relatione certas aut incertas dicemus, quas improprio nomine rationales aut irrationales dixerunt plures. Hac equidem methodo, vt quæ expositæ certæ longitudine commensurabiles erunt, simpliciter certæ dicantur, eò quod longitudinem necessario sequatur potentia. Quæ verò eidem propositæ certæ aliquæ potentia fuerint commensurabiles, non ideo simplicem certarum denominationem illæ sibi sumunt, cum*

potentia illa non semper includat longitudinem, sed respectiuè dicentur potentia commensurabiles, cui denominationi addemus particulam (tantum) cum longitudine illas incommensurabiles esse patebit. Quod si eidem propositæ certæ conferantur aliquæ incommensurabiles, vt ideo incertarum concipiant denominationem. Si quidem potentia fuerint incommensurabiles, illæ incertarum simplicem suscipiunt denominationem. Nam apud incommensurabiles potentia præfert longitudinem, Si autem longitudine incommensurentur, cùm hæc potentiæ commensurationem sæpius admittat, has certæ collatas, non idcirco incertas simpliciter dicemus, sed præferenda est denominationi, commensurationis potentiæ intelligentia. Nam si nec potentia commensurabilis existat, simpliciter incommensurata dicetur, siquidem commensurabilis, respectiuè vt iam diximus, certa potentiæ tantum commensurabilis nuncupabitur. Harum autem naturam per numerorum rationem explicat nona huius Euclides.

MONITVM.

Hanc certæ denominationem, quam rationalem aliena voce interpretati sunt plures, non vni ac eidem tantùm linearum naturæ congruere opinandum est ea seueritate qua nullæ lineæ quantitas certa dici posset, si aliena fuerit ab eius naturæ quantitate quam semel certam diximus. Id enim longè à vero sensu nos alienos efficeret. Nã certitudinem hanc seu ab aliis (vt ita loquar) rationalitatẽ hypotheticã intellexit Euclides. Cũ enim supponit certã cui aliæ conferendæ sunt, pro huius exẽpli tempore huius suppositæ certæ naturam, sectabimur, & tantùm (iuxta præfatas leges ac sequuturas) certas, aut reliquas ipsi certæ incommensurabiles, incertas dicemus. Quod si varietur exemplum non inconuenit eam quæ prius penitus incerta fuit, pro alterius exempli tempore, certam supponi. Qualibet etenim cuiusuisque naturæ linea proposita vt certa, per sibi collatas commensurabiles, aut incommensurabiles, potentia vel longitudine, omnem incertarum posthac exponendarum originem generari posse concipiemus. Cùm omnes incertarum exponendas species, semper ab vnius certæ propositæ hypothesi, per conferentiam, singularum manare sit notum. Quod autem sæpius dicit Campanus rationalis potentiæ, rationalis longitudine, improprium est. Nam potentia vel longitudo non versatur circa rationalitatem, vt sic loquar, sed tantum circa commensurationem. Illud namque idem esset, ac si media longitudine, media potentia, binomium longitudine, vel binomium potentia, diceremus. Longitudo igitur aut potentia commensurationi referuntur. Sed rationalis, media, aut binomy, &c. denominationes, ad linearum diuersas naturas tantum denotandas spectant.



Cæterùm vt diuersitatem naturæ linearum à numeris ortam percipiamus, binarum præcedentium, ac vigesimæoctauæ sexti sententias vnica demonstratione numeris surdis, seu algebricis illustrata discutiemus. Esto numerus maior recta A B *minórque recta* O. *Rectæ* A B *quadratum sit* A B C G, *dimetiens autem* G B *& centrum* I. *Circa dimetientem & centrum constituatur quadratum æquale excessui quo quadratum ex* A B *excedit quadratum ex* O, *sitq́; illud* E F H D *secentur postmodum vtraque quadrata* A C *&* E H *in centro* I *quadrifariam, ductis* M N K L *rectis. Patet igitur quatuor rectangula* A D B H, C F G E *(inter se æqualia) simul sumpta, æquari quadrato, rectæ seu numeri* O *minoris, Ac proinde aream* A D *æquam esse quartæ parti eius quod fit à minore* O. *Sequitur igitur numero* A B *applicatum esse numerum* A D, *æquum quartæ parti eius quod fit à minore* O *numero proposito, deficientem autem specie quadrata,* D B, *quæ scilicet circa dimetientem, & hac applicatione sectam esse rectam, seu numerum* A B *in* V. *Quare si iuxta decimamseptimam huius* A B *secetur in* V *per numeros* A V, V B, *siue per commensurabilia longitudine, Manifestum erit rectã* E D *ipsi* A B *longitudine commensurabilem esse, vt iam antea ostensum est. Nam* A S *æquatur rectæ* V B, *tota itaque* A V *vni earum* A S *(vel* V B*) commensurabilis, & reliquæ* S V *(vel* E D*) commensurabilis erit, per corollariũ vndecimæ huius. Tunc itaque excessus potentiæ* A B *super potentiam rectæ* O *(qui quidem fuit* E H*) est longitudine commensurabilis propositæ rectæ seu numero* A B. *Ac è conuerso si rectæ* A B *&* E D *sint numeri seu longitudine commensurabiles, sequetur à toto ablatum* E D *(vel* S V*) numerum, relinquere quod superest, scilicet compositum ex* A S V B*) esse numerum, & ideo rectam* A B *secari in* V *per numeros seu longitudine commensurabiles*

Cùm recta A B *secatur in* V *per commensurabilia longitudine, esto* A B *rad. 64,* O *rad. 48* A D *12,* D B *4,* A N *6,* N B *2,* E H *16.*

Cùm verò secatur in N *per incommensurabilia longitudine, esto* A B *rad. 64.* O *rad. 52,* A D *13,* A N *4+ rad. 3,* V B *4 − rad. 3* E H *12.*

biles [illegible] si iuxta decimamoctauam huius A B secta sit in V per non numeros, siue per incommensurab[illegible] longitudine, Perspicuum erit totam A V (partis V B vel A S incommensurabilem) reliquæ S V siue E D incommensurabilem esse, ex corollario duodecimæ huius. Quare A C potentia maioris A B excedit potentiam (vt fusius 18 discussimus) minoris O quadrato rectæ E D, quæ ipsi A B est lõgitudine incommensurabilis, & e contra. Si rectæ A B E D sint non numeri seu longitudine incommensurabiles, a numero A B propositæ ablatus non numerus S V (vel E D) relinquit V B & A S (æquales) non numeros, & proinde rectam A B sectam in V per non numeros, seu incommensurabilia longitudine, ex duodecima huius. Si igitur secetur A B in V per numeros commensurabilia erunt A D D B rectangula, per primam sexti. Si quidem per non numeros incommensurabilia erunt, ex eadem, & ideo reliquo E H commensurabilia vel incommensurabilia.

Propositio decimanona.

Sub certis longitudine commensurabilibus rectis lineis (iuxta quemuis modum præfatorum) comprehensum rectangulum, certum est.

Comprehendatur rectangulum A G sub A B & B G certis rectis longitudine commensurabilibus. Dico ipsum A G certum esse, fiat ex A B quadratum A D, per 46 primi. Quoniam æquales sunt, A B B D, erit G B ad B A, vt G B ad B D, per septimam quinti. Quia verò G B B A sunt commensurabiles, & G B B D cõmensurabiles erũt, per 13 huius sed vt G B ad B D rectæ, sic G A ad A D rectãgula, per primã sexti. commensurabiles autem sunt rectæ G B B D. Commensurabilia igitur erunt & rectangula G A A D, per decimamtertiam huius atque certum est A D rectangulum, per octauam diffinitionem. Certum igitur erit, & G A, per nonam huius diffinitionem. Sub certis itaque longitudine commensurabilibus rectis, &c.

MONITVM.

Dixit Euclides (iuxta aliquem præfatorum modum) cuius intelligentiam non scripserũt Theon aut Campanus. Quod igitur sentiebat Euclides nostra sententia exponamus, rectarum longitudine cõmensurabiliũ vnicus est modus. Is nãque quo ipsarũ longitudines rationem numerorum obtinẽt. quare illud (iuxta aliquem præfatorum modorum) ad longitudinis commensurationem referri non putemus, sed ad certarum hypotheticarum sumptionem, quas quidem diuersis modis longitudine cõmensurabiles proposuit Euclides. Primo quidem cùm propositæ certæ binas longitudine ac potentia commensurabiles confert. Nam quadratum vnius, ipsius propositæ quadrato commensuratur, ac eidem vnius quadrato rectangulum sub duabus (per primam sexti) commensurabitur, & ideo quadrato propositæ, per decimam huius. Secundò cum proposito comparantur binæ certæ potentiæ tantùm commensurabiles, inter se tamen longitudine commensurabiles, vt radices numerorum similium planorum non tamen quadratorum. Nam hi cùm suas quadratas radices numeris exprimere nequeant, illæ radices rectæ propositæ certæ per numerum expressæ, longitudine erunt incommensurabiles: quia verò sunt in numerorum ratione cum quadrato propositæ, potentia sunt commensurabiles, per sextam huius ipsi certæ. Et quia sunt similes plani, ipsi rationem inter se quam quadrati numeri habent, per vigesimamsextam octaui, & ideo latera longitudine commensurabilia, per nonam huius inter se quia igitur (sicut in prioris demonstratione) vnius earum quadratum propositæ quadrato fuit ex hypothesi commensurabile, & eidem rectangulum sub duabus comprehensum, commensurabile (per primam sexti, erit) quare rectangulum & propositæ quadratum, eidem quadrato prioris commensurabilia, adinuicem erunt commensurabilia, per decimam huius. Et proinde vtraque via, rectangulum illud (per nonam huius diffinitionem) certum erit. Certas igitur longitudine commensurabiles per quadratos, vel similes planos numeros tantùm, potentiam earum exprimere concludemus: potentiam vero longitudine incommensurabilium certarum, quibusuis numeris non similibus planis denotare. Quare certarum areas necessario numeris exprimi fatebimur, longitudines verò quandoque tantùm.

Propositio vigesima.

Si certum ad certam applicatum fuerit, latitudinem efficit certam, commensurabilémque ei ad quam applicatur longitudine.



Proponatur certa linea A B *ad quam applicetur rectangulum* A G *certum, efficiens latitudinem rectam* G B *Dico ipsam* G B *esse certam, & commensurabilem longitudine, lineæ* A B *propositæ. Describatur ex* A B *quadratum* A D, *per quadragesimam sextam primi, quod (per octauam diffinitionem) est certum, & certo* A G *commensurabile. Nam si eidem incommensurabile esset, incertum esset, per decimã diffinitionem huius. Sed sicut* A D *ad* A G *rectangula, ita* B D *ad* B G *rectæ, per primam sexti, commẽsurabilia fuerunt* A D *&* A G *rectangula: commensurabiles igitur erunt* B D *&* B G *rectæ, per decimam tertiam huius. Atqui ipsi* B D *æqualis est* A B *recta, ex quadrati diffinit. ipsa itaque* G B *latitudo, propositæ* A B *commensurabilis erit longitudine. Si itaque certum ad certam applicatum fuerit latitudinem, &c.*

Lemma.



Potens incertam aream, incerta est recta. *Possit recta* A *aream* B *incertam. Dico rectam* A *incertam esse. Nam si certa esset, ea posset certum, sed non potest, imò incertum* B *ex hypothesi. igitur recta* A *incerta est. Potẽs itaque incertam, &c. Hæc vndecimæ diffinitionis primam partem ferè repetiuit.*

Propositio vigesimaprima.

Sub certis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis comprehensum rectangulum, incertũ est, illúdque potens incerta est, vocetúrque Media.



Comprehendatur rectangulum A G *sub rectis* A B B G, *quæ quidem sint certæ potentia tantùm adinuicem commensurabiles: Dico rectangulum* A G, *incertum esse, ac insuper idem rectangulum* A G *potentem, lineam incertã esse, eam autem quæ vocatur media, describatur ex* A B *quadratum* A D *quod (per octauam diffinitionem) certum erit. Et cùm* G B *sit incommensurabilis, ipsi* B A, *& ipsi* B D *(sibi æquali) eadem* G B *incommensurabilis erit. Sicut autem* B D *ad* B G *rectæ, sic* A D *ad* A G *rectangula, per primam sexti, incommensurabilis est* G B *lineæ* B D. *Incommensurabile igitur erit* G A *ipsi* A D, *per* 13 *huius, sed* A D *certum fuit. Reliquum igitur* A G *incertum erit, per decimam diffinitionem huius: quia verò incertum est* G A *rectangulum, seu area, illam potens incerta est, per lemma præcedentis, eáque vocatur media. Eò quidem quòd nullam à certis quantitatibus denominationem recipere possit, tamen eam quam suæ genitura exprimit effectus, concipiet nomenclaturam, nempe quæ media proportionalis inter binas certas potentia tantùm commensurabiles existit. Cùm enim sub extremis* A B B G, *æquum sit ei quod à media potente illud* A G, *per decimamseptimam sexti. Ipsa potens meritò media inter eas dici poterit, per vigesimam secundam sexti. Sub certis igitur, potentia tantùm, &c.*

Corollarium.

Sub certa & incerta comprehensum, incertum est. *Nam si* A B *sit certa,* G B *verò incerta,* B D *recta (ipsi* A B *æqualis) erit ad* B G *vt* A D *ad* A G. *Incommensurabile igitur erit* A G *ipsi* A D *certo, & igitur* A G *sub certa & incerta* A B B G *incertum erit, per decimam diffinitionem huius.*

Lemma.

Duabus datis rectis erit sicut prima ad secundam, sic quod à prima ad id quod sub binis continetur. Et insuper prima ad secundam, sicut quod sub binis ad quod ex vltima quadratum.

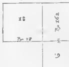
Datæ

Data etenim recta A C C G *in rectum ponantur, & ex eis fiant quadrata* A D G E *cōpleto rectangulo* G D. *Patet (ex prima sexti) quadratum à prima* A C *esse ad rectangulum* G D *(sub duabus) sicut prima* A C *ad secundam* C G, *& insuper esse sicut* D C *ad* C E *(æquales ipsis* A C C G*) sic* G D *(quod sub binis) ad* G E, *quod ex vltima* E G *quadratum, per eandem primam sexti.*



MONITVM.

Patet hoc theoremate mutari naturam quantitatis quadratorum eiusdem naturæ, cùm ex eorum lateribus longitudine tantum incommensurabilibus cōtinetur rectangulum: cùm enim comparatur latitudo longitudini cuiusdam rectanguli incommensurabilis, tunc mutatur natura arearum quas quidem possunt rectanguli latera. Nam potentia harum rectarum hoc theoremate propositarum certa fuit, cōparatione adinuicē facta. Sed quia longitudines earum cōmensuratione caruerunt, naturā ab eis comprehēsa area alterauerunt, à priori quidem certa, mediam efficientes. Hac eadē de causa videbimus (25 & 27 huius) binas medias, quæ quidem quadrata eiusdem naturæ possunt, tamē quia longitudine commensurabiles non sunt, ab eis comprehensum alienam area nancisci naturam, nempe certam, aut equidem mediam, alterius natura ac omni potētia incommensurabilem. Illud enim ea de re nostro arbitrio fit, quod ipsius rectanguli alteram dimensionem (hoc est longitudinem) certa linea determinet, cui incidens indeterminata latitudo, binas quas exoptat qualibet area, dimensiones sta perturbat, vt sibi ad aream producendam seu exprimendam comparata, confusam & omni determinatione ac ceritudine priuatam depromant magnitudinis quantitatem, secus si binæ illæ rectæ (certam potentes) licet propositæ certa longitudine essent incommensurabiles. Inter se tamen longitudine commensurentur, hæc commensuratio longitudinis rectangulum concludens, sub binis dimensionibus, sibi commensuratis, naturam potentiæ linearum conseruat. Quā etenim altera earum proponit longitudinem, reliqua (sibi commensurabilis) eadem longitudinis natura dilatat, & inde potentiam comprehensi, binis illis dimensionibus compatibilibus, ad naturam earum potentiæ reducunt, vt vidimus monito decimænonæ huius. Vt autem per numeros surdos medium exprimamus, binas certas lineas potentia tantùm commensurabiles sumamus, scilicet 3 et rad. 18, radices quippe numerorum rationē quam quadrati non habentium scilicet 9 & 18, horum medium erit (ex vigesima septimi) res huius 162, & proinde medius radicum eorundem, scilicet harum 3, & rei 18, erit rad. rad. 162, per vigesima secunda sexti secūdam partem. Sed 3 & rad. 18 (latera quadratorum 9 & 18) sunt certæ rectæ, potentia tantum cōmensurabiles, sub eis itaque comprehensum (res scilicet 162 numeri) medii erit, illud igitur potēs recta erit, res rei scilicet 362 numeri ex ductu ipsorum 9 & 18 facti.



Quod si quidam argumentū inferrent, quæ dicerent, ex certis potentiam tantùm commensurabilibus comprehensum rectāgulum, medium non esse, sed potius certum, hac specie. Esto proposita certa A, *cui potentia tantum commensurabiles existant* B *&* C. *Sint autem* B *&* C *longitudine inuicem commensurabiles: quoniam* A *est certa proposita* B, *erit certa potentia tantùm commensurabilis, similiter &* C *quare* B *&* C *dicentur rectæ potentia commensurabiles ipsi propositæ certæ, & nihilominus certum comprehēdunt, vt patuit decimanona huius, cùm sint certæ longitudine inter se commensurabiles. Ad hæc dicemus potentiæ vel longitudinis commensurationem non esse linearum* B *&* C *denominationem, qua earum significatur natura, sed esse eius ad quam referūtur affinitatis expreßionem, qua exprimitur habitudo ipsarum* B *&* C. *Diximus etenim antea, quālibet earum pro varietate exempli propositam certam effici posse, super qua omnes alia incerta generari possent. Non itaque potentiæ vel longitudinis commensuratio eas denominat, sed tantùm naturæ earum habitudinem. Quare cùm proponuntur binæ certæ longitudine commensurabiles, intelligamus commensurationem hanc inter eas non autem ad aliā referri. Similiter dicentes binas* B *&* C *potentia tantùm commensurabiles, intelligemus adinuicem non autem ad aliam propositam, nisi exprimatur. quare ipsæ* B *&* C *non dicuntur absolutè potentia tantùm commensurabiles, sed & longitudine. Nam huic negocio nihil confert* A *proposita certa: commēsuratio etenim (vt diximus) naturam linearum non denominat, sed naturæ habitudinem. Nulla igitur dici potest sola potentia vel lōgitudine commensurabilis cùm hæc commensuratio ad aliquam aliam referatur. Hac de causa notandum est non posse dari tres certas potentia tantùm commensurabiles, & proportionales, licet possint dari tres eidem propositæ potentia tantùm commensurabiles, & proportionales. Sed*

cùm hæc commensuratio naturam linearum non exprimat, sed habitudinem, ea refertur ad linearum habitudinem. Quæ ideo inter se potentia tantum commensurabiles non erunt, quia earum extremarum quadrata rationem haberent quam quadrati numeri. Nam suscipiunt medium proportionalem, & igitur similes plani sunt (per vigesimam noni) qui rationem habent quam quadrati, per vigesimamsextam eiusdem, & igitur latera habent longitudine commensurabilia, per nonam huius. Non igitur potentia tantùm essent commensurabiles, sed & longitudine.

Propositio vigesimasecunda.

Quod à Media, ad certam applicatum, latitudinem efficit certam, ei verò ad quam applicatur longitudine incommensurabilem.

A D 4 R 384 R 24 B G R 24 C RR 384 E Z

Sit proposita certa A B *recta, media verò esto* C *quæ possit rectangulum* D E Z, *sub certis potentia tantùm commensurabilibus* D E E Z *(per vigesimamprimam huius) comprehensum. Ad datam vero rectam* A B *dato rectilineo* D Z *æquale rectangulum constituatur* A G *(per 45 primi) latitudinem efficiens* B G: *Dico rectam* B G *certam esse, longitudine quidem ipsi* A B *certæ incommensurabilem. Quoniam æqualia & æquiangula constructa sunt* A G *&* D Z. *Erit (per decimamquartam sexti) sicut* A B *ad* D E *sic* E Z *ad* B G *reciprocè. Quare (per vigesimamsecundam eiusdem) erit quod ex* A B *ad quadratum ex* D E, *sicut quod ex* E Z *ad quadratum ex* B G. *Commensurabile est quod ex* A B *quadrato ex* D E, *cùm* A B *&* D E *sint positæ certæ, commensurabile itaque erit quod ex* E Z *et quod ex* B G. *Certum igitur erit quod ex* B G, *per nonam diffinitionem cùm certa posita sit* E Z, *quare & certa erit* B G, *per sextam diffinitionem. Cæterùm quia medium est* A G, *nempe æquale positum ipsi* D Z *quod potest* C *media, quod ex* A B *verò est certum, per octauam diffinitionem huius. Sed per lemma præfatum, est sicut* A B *prima ad* B G *secundam, sic quod ex* A B *certum ad quod sub duabus* A B B G *medium, incommensurabilis erit* B G *ipsi* A B *longitudine nam medium* A G *incertum certo ex* A B *incommensurabile est. Recta igitur* B G *(potens certum) certa dicetur, & longitudine ipsi* A B *certæ incommensurabilis ostensa. Quod itaque à media ad certam applicatum latitudinem, &c.*

MONITVM.

Hæc præcedentis fuit ferè conuersa: nam prior sub longitudine & latitudine certarū potentia tantùm commensurabilium, mediam superficiem conclusit, hæc autem ait, mediam superficiem vnum latus rectanguli certa vallatum linea habentem, necessario reliquam scilicet latitudinem certam efficere, & (vt priori vigesimaprima dixit) potentia tantùm ipsi certæ (vnum latus continenti) commensurabilem. Patet itaque mediam superficiem contineri sub lateribus binis quadratorum non habentium rationem quam quadrati numeri, sed tantùm numerorum rationem, quorum aliquando vnus est quadratus, quandoque verò neuter, vt in numeris, cùm sub radice numeri quadrati & radice surda non quadrati continetur rectangulum, vel cùm sub duabus surdis quarum quadrati rationem quadratorum non habent, tunc vero quæ eam superficiem potest, radix surda radicis surdæ dicetur, vt patuit præcedenti monito.

Propositio vigesimatertia.

Quæ Mediæ commensurabilis, Media est.

Esto

Esto A *recta media, ipsi vero commensurabilis existat,* B *recta. Dico rectam* B *mediam esse. Exponatur certa* D G *cui applicetur æquum ei quod ex* A *(per 45 primi) & æquum ei quod ex* B *sintq́;* G E *&* G Z. *Quoniam enim certa est* G D *cui applicatur quod à media scilicet* G E, *latitudo* D E *(per vigesimamsecundam huius) certa erit, potentia tantum ipsi* G D *commensurabilis. Cùm autem* A *&* B *sint commensurabiles (ex hypothesi) longitudine vel potentia, rectangula* G E *&* G Z *(quæ ex ipsis* A *&* B*) commensurabilia erunt, per illationem nonæ huius. Sed sicut* G E *ad* G Z *sic est (per primam sexti)* D E *ad* D Z. *Commensurabilis igitur erit* D E *ipsi* D Z *(per decimamtertiam huius) & ideo* D Z *certa (per sextam diffinitionem huius.) Binarum autem* D E *&* D Z *altera* D E *alicui* G D *longitudine fuit incommensurabilis, & reliqua* D Z *eidem* G D *longitudine incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Certæ enim fuerunt ipsæ* G D *&* D Z *longitudine incommensurabiles. Ipsæ itaque* D Z *&* G D *potentia tantùm commensurabiles erunt, cum sint certæ, per conuersam sexti diffinit. Sub ipsis igitur* G D *&* D Z *comprehensum* G Z *medium erit, per 21 huius, & illud potens* B *media. Quæ itaque mediæ commensurabilis media est siue longitudine, siue potentia commensurentur.*

Corollarium.

Mediæ areæ commensurabilis areæ, media est. *Si etenim ponatur medium esse* G E, *aliud verò quoddam ipsi commensurabile fuerit, coaptetur illud ad rectam* G D, *sitq́;* G Z, *quia sanè* G E G Z *sunt commensurabilia & (ex prima sexti) rectæ* D E *&* D Z *eandem rationem habentes commensurabiles erunt, ex decimatertia huius, & igitur certæ. Quarum quidem altera* D E *alicui* D G *longitudine incommensurabilis fuit, & reliqua* D Z *eidem* G D *longitudine incommensurabilis erit. Potentia itaque tantùm erunt, ipsæ* G D D Z *commensurabiles, & certæ. Medium itaque erit* G Z *(per prius ostensa) medio* G E *commensurabile positum. Sequitur insuper id quod in genere protulit Euclides de lineis (coroll. 9 huius) sequi in mediis, scilicet quæ mediæ longitudine commensurabilis est, & potentia eidem commensurabilis erit, quæ vero potentia non ideo longitudine. Quæ autem potentia incommensurabilis, semper ideo & longitudine, quæ autem longitudine, non ideo & potentia semper.*

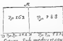
MONITVM.

Quia diximus certas, certis commensurabiles esse, ac conuersim certis commensurabiles, certas esse. Non sequemur hanc legem in mediis, scilicet quia diximus mediis rectis commensurabiles, medias esse, non inde colligemus quaslibet medias, mediis aliis commensurabiles esse, & ne quidem longitudine tantùm differre, sed & potentia. Quod autem longitudine differant mediæ, testantur vigesimaquinta, vigesimaseptima, vigesimaoctaua, & alia quàmplures huius, cũ scilicet instar certarum ipsæ potentia tantùm commensurabiles, alienam à suis potentiis continent potentiam. Quod autem mediæ potentia differant, siue incommensurabiles existant, docet trigesimaquinta huius, producens duas areas medias incommensurabiles, quare & rectæ potẽtes eas areas, quæ quidem mediæ sunt (per vigesimam primam huius) potentia incommensurabiles existunt, & à fortiori argumento longitudine, per corollarium nonæ huius. Concludemus igitur plura media licet à binis certis comprehensa, inuicem incommensurabilia esse, quemadmodum & plures areas à binis mediis cõprehensas (potentia tantum commensurabilibus) incommensurabiles adinuicem esse, scilicet alias certas, alias alterius generis mediarum, vt dicent vigesimaseptima & vigesimaoctaua. Huius autẽ differentiæ causa fuit quod certas sub vnica specie commensurabilium arearum coegerit Euclides, medias verò denominans plura mediarum subintelligit contineri genera sibi incommensurabilia, vt patebit 115 huius hac itaque de causa lineæ quæ mediæ sunt, non ideo erunt semper mediæ lineæ commensurabiles. Mediarum itaque intelligentiam hac arte à numeris sumemus, vt medias areas per radices non quadratorum numerorum exprimamus, mediarum vero potentiarum longitudines, per radices radicum non quadratorum. Mediæ autem commensurabiles exprimentur per radices radicum numerorum similium planorum, non tamen quadratorum, sed habentium rationem quàm quadrati quadratorum. Nam horum numerorum radices, ac radices radicum, rationem seruant vt numeri, nempe si quadrata proportionalia fuerint latera proportionalia erunt, ex vigesima

secunda sexti incommensurabiles vero potentia, sunt radices radicum non habentium rationem quam quadrati numeri. Nam eorum radices sunt potentiæ mediarum, quæ sunt incommensurabiles, per nonam decimi. Mediæ vero potentia tantùm commensurabiles, sunt radices radicum numerorũ habentium rationem, quam simplices quadrati, non autem quadrati quadratorum. Nã radices (quæ sunt potentiæ mediarum) sunt commensurabiles: sed radices radicum incommensurabiles existunt, quæ mediarum denotant longitudinem. Quare infinitæ mediæ potentia incommẽsurabiles reperientur, per conferentiam infinitorum numerorum dissimilium planorum ad seinuicem factam, nam dissimiles plani rationem quadratorum non habentes (ex corollario nonæ decimi) efficiunt eorum radices mediarum areas designantes incommensurabiles, ex nona decimi. Et idcirco medias longitudine simul incommensurabiles totidem, nam quæ potentia incommensurabiles fuerunt, longitudine incommensurabiles erunt, ex illatione nonæ decimi.

Propositio vigesimaquarta.

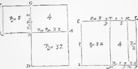
Sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis cõprehensum rectangulum, medium est.



Sub mediis A B *&* B G *longitudine commensurabilibus rectis cõtineatur rectãgulum* A G: *Dico* A G *mediũ esse, fiat ex* A B *quadratũ* A D, *per 46 primi, quod medium est, nempe ex media* A B. *Quia verò* D B, *æqualis ipsi* A B, *est lõgitudine commensurabilis ipsi* B G. *Est autem* D A *ad* A G, *vt* D B *ad* B G, *ex prima sexti, cõmensurabile erit* A G *(per decimamtertiam huius) ipsi* D A *medio: quare igitur &* A G *medium erit, per corollarium præfatum. Sub mediis itaque longitudine, &c.*

Propositio vigesimaquinta.

Sub mediis potentia tantùm commensurabilibus rectis lineis comprehensum rectangulum, aut certum, aut medium est.



Contineatur rectangulum A G *sub mediis* A B B G *potentia tantùm commensurabilibus: Dico* A G *rectãgulum aut certum, aut medium esse, fiat (per 46 primi) ex* A B *quadratum* A D, *& ex* B G *ipsum* B G E Z, *quæ à mediis descripta media erũt. Proponatur certa* C I, *ad quam dato* A D *æquale, cõstituatur* C I T M, *ad rectam verò* T M *ipsi* A G *æquum* T M K N, *ad rectam verò* K N *ipsi* E B *æquum* N L, *per 45 primi, quoniam æquales sunt* D B B G *ipsis* A B B Z, *erit* D B *ad* B G *vt* A B *ad* B Z, *& proinde (ex prima sexti)* A D *ad* A G *vt* A G *ad* G Z. *Quare & sicut* I T *ad* M K, *sic erit* M K *ad* N L, *sunt enim æqualia ipsis* A D, A G, *&* G Z, *sed media sunt* A D *&* G Z: *media igitur erunt* I T *&* N L, *quæ ad certam* C I *applicata latitudines* C T *&* K L *certas efficiunt, per vigesimam secundam huius, longitudine quidem incõmensurabiles ipsi* C I. *Certæ igitur sunt* C T *&* K L, *potentia tantùm commensurabiles ipsi* C I *propositæ, cum autem sit (per primam sexti)* C T *ad* K L *vt* I T *ad* N L, *ipsæ verò* I T *&* N L *æqualia ipsis* A D *&* G Z *sint commensurabilia posita. Commensurabiles erunt rectæ* C T *&* L K *longitudine, per decimamtertiam huius. Quod igitur sub binis* C T K L *certum erit, per decimamnonam huius. Cæterùm quia proportionalia ostensa sunt,* I T, M K, N L, *proportionales erunt, ex prima sexti,* C T, T K, K L. *Quod itaque sub extremis* C T *&* K L *æquum erit ei quod à media* T K, *per decimamseptimam sexti, quod autem sub* C T K L *certum fuit, quod itaque ab ipsa* T K, *certum erit. Certa igitur erit (per octauam huius diffinitionem) recta* T K, *quæ ipsi* C I *propositæ (hoc est ipsi* T M*) lõgitudine, aut potẽtia tantùm commensurabilis est: siquidem longitudine, certum erit* M K *sub ipsis* M T T K *comprehensum: per 19 huius. Si autem potentia tantùm medium erit ipsum* M K, *per 21 huius. Medium itaque aut certum erit* M K: *quare* A G *ipsi* M K *æquale positum aut certum, aut medium erit. Sub mediis igitur potentia tantùm, &c.*

Coroll.

Corollarium.

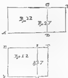
Hinc assequimur, quod sub duabus rectis, medium esse inter earum quadrata. *Vt patuit ex prima sexti, quod sub* A B B G *medium fuisse inter* A D *&* G Z.

MONITVM.

Adnotat Campanus quæ dixit Euclidis theorema vigesimumquartum, Ac insuper si binæ Mediæ propositæ A B B G *potentia incommensurabiles existerent, sub ipsis comprehensum, nec certum, nec equidem medium esset, nam contineretur sub certa & media, hac methodo. Nam* I T \ L *incommensurabilia efficerent rectas* C T K L *longitudine incommensurabiles (per primam sexti) certas tamen cum Media sint,* I T N L, *per* 22 *huius quare sub* C T *&* K L *comprehensum medium esset, per vigesimamprimam huius, ac ideo quod ex* T K *medium (per decimam septimam sexti) æquum comprehenso sub* C T K L. *Media igitur esset* T K *& proinde* M K *contineretur sub Media* T K *& certa* C I, *vel* T M. *Quod quidem* M K *æquum est ei quod sub binis* A B B G, *nō igitur medium esset, nec quidem certum, sed alia quantitatis species.*

Propositio vigesimasexta.

Medium non excedit Medium Certo.



Esto medium A B, *quod excedat ablatum medium* A G *rectangulo* D B. *Dico* D B *non esse certum. Quòd si opponatur sit (si fieri possit) certum* D B. *Exponatur autem certa* E Z *cui applicentur æqualia ipsis* A G A B, *quæ sunt* Z I Z T, *per* 45 *primi. Ipsa igitur* Z I Z T *media erunt. Cùm autem ab æqualibus* A B *&* Z T *æqualia auferantur* A G *&* Z I, *reliqua* D B *&* K T *erunt æqualia. Sed certum supponitur* D B *certum igitur erit &* K T. *Quia vero media sunt* Z I Z T, *ipsis* A G *&* A B *æqualia, certæ potentia tantùm commensurabiles (ipsi* E Z *propositæ) erunt* E I *&* E T *(per* 22 *huius) rectæ. Et quia certum ponitur* K T, *Illud ad certam* E Z *(vel* I K*) applicatum, latitudinem* I T *rectam certam efficit, longitudine quidem ipsi* E Z *propositæ commensurabilem, per vigesimam huius. Et cùm duarum* E I I T *alia sit ipsi* E Z *commensurabilis scilicet* I T, *alia verò non, ipsæ* E I I T *incommensurabiles erunt longitudine, per corollarium primum decimæ huius. Sed sicut* E I *ad* I T *sic est quòd ex* E I *ad quod sub* E I I T, *per lemma* 21 *huius, incommensurabile igitur erit quod ex* E I *ipsi quod sub* E I I T, *& ipsi quod bis sub* E I I T, *per corollarium secundum decimæ huius. Et similiter quòd bis sub* E I I T *ipsis quæ ex* E I *& ex* I T, *quæ sunt potentiæ commensurabiles certa, incommensurabile erit per idem corollarium. Cùm autem quæ ex* E I *&* I T *cum eo quòd bis sub* E I I T *componant (per quartam secundi) quadratum totius* E T, *incommensurabilia autem sint adinuicem componentia, totum igitur vtrique incommensurabile (ex duodecima huius) erit, scilicet eis quæ ex* E I I T *certis, incertum itaque (per nonam diffinitionem huius) erit totum ex* E T. *Quare & recta* E T *incerta per vndecimam diffinitionem huius erit. Sed & certa potentia namque ipsi propositæ* E Z *commensurabilis ostensa est, quod fieri non potest. Non igitur certum esse potest* D B *quo* A B *medium excedit* A G *medium. Medium itaque non excedit medium certo.*

Propositio vigesimaseptima. *Problema 4.*

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles Certum comprehendentes.

Proponantur binæ rectæ certæ potentia tantum commensurabiles A & B. Quibus (per decimamtertiam sexti) media proportionalis inueniatur G, fiatque (per duodecimam sexti) vt A ad B sic G ad D. Quoniam certæ potentia tantum commensurabiles sunt A & B, media erit G, per demonstrata 21 huius. Quia verò A & B sunt potentia tantum commensurabiles, ipsæ G & D (eandem rationem habentes) potentia tantùm commensurabiles erunt, per decimamtertiam huius. Media itaque erit D, per 23 huius. Et cum sit A ad B vt G ad D, erit vicissim A ad G vt B ad D. Sed sicut A ad G sic fuit G ad B, sicut igitur G ad B sic B ad D, per vndecimam quinti. Quod itaque sub G & D æquum est ei quod ex B fit, per decimamseptimam sexti. Atqui certum est quod ex B certa fit. Certum igitur erit quod sub G & D, quæ quidem mediæ potentia tantùm commensurabiles ostensæ sunt. Medias igitur inuenimus potentia tantum commensurabiles certum comprehendentes.

Propositio vigesimaoctaua. *Problema 5.*

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles Medium comprehendentes.

Exponantur tres rectæ certæ potentia tantùm commensurabiles A B G. Inter A & B verò Media constituatur D proportionalis, per 13 sexti, sit autem vt B ad G sic (per 12 sexti) D ad E. Quoniam trium A D B proportionalium quod sub A B extremis æquum est ei quod à media D, per decimamseptimam sexti. Medium autem est sub ipsis A & B certis potentia tantum commensurabilibus, per 21 huius, medium igitur erit quod ex D, & (per eandem) D Media erit. Et quia sicut B ad G sic fuit D ad E. Atqui B & G certæ, sunt potentia tantum commensurabiles, & igitur D & E potentia commensurabiles erunt, Media autem fuit D, Media itaque erit & E, per 23 huius. Cùm enim sit B ad G vt D ad E. Erit vicissim B ad D vt G ad E. Sed vt B ad D, sic est D ad A, per corollarium quartæ quinti. Sicut itaque D ad A sic G ad E. Quod itaque sub extremis D & E æquum est ei quod sub mediis A & G, per decimamsextam sexti. Quod autem sub A & G certis potentiæ tantùm commensurabilibus, Medium est, per 21 huius. Quod itaque sub D E mediis potentia tantùm commensurabilibus ostensis, medium erit. Medias itaque inuenimus, &c.

Lemma.

Comperire duos quadratos numeros qui coniuncti quadratum numerum efficiant.

Sint bini numeri similes plani, simul pares aut simul impares A B & B G. Quoniam si a toto A B pari auferatur B G par, reliquus par erit A G, per 25 noni: similiter imparibus propositis si ab impari impar tollatur, reliquus par erit, per 27 noni. Secetur itaque bifariam reliquus ille A G in D, erit qui sub toto A B & B G adiuncto vnà cum quadrato D G, æqualis quadrato D B, per sextam secundi. Sed cum A B & B G sint similes plani, qui sub eis quadratus erit, per primam noni, qui verò ex D G quadratus est. Inuenti itaque sunt duo numeri quadrati, scilicet æqualis ei qui sub A B & B G cũ eo qui ex D G, quadratum qui ex D B componentes coniuncti.

Corollarium.

Inuenire duos quadratos numeros se quadrato excedentes. *Nam positis A B & B G similibus planis, inuenimus duos quadratos numeros scilicet qui ex B D & eum qui ex D G, quorum excessus (is scilicet qui sub A B B G) quadratus est. Quod si similes plani non fuerint ipsi A B & B G, excessus duorum quadratorum ex B D & D G, scilicet qui sub A B B G quadratus non erit. Nam si quadratus esset ipsi A B & B G similes essent plani, per secundam noni, contra hypothesim.*

Lemma secundum.

Comperire duos numeros quadratos, compositum non quadratum efficientes.

Disp

Disponamus vt prius numeros A B *&* B G *secto bifariam* A G *in* D. *Auferatur insuper ab ipso* D G *vnitas* D E *Dico duos quadratos, scilicet eum qui sub* A B B G *similibus planis, & eum qui ex* G E *non componere quadratum numerum, quoniam qui sub* A B B G *cum quadrato* D G *æquus est quadrato* D B, *vt ostendimus. Sequetur eundem qui sub* A B B G *cũ quadrato* G E, *minorem esse quadrato* D B, *gnomone quidem numerorum lateralium quo quadratus* G D *excedit quadratum* G E. *Cùm autem quadratus* B D *excedat quadratum* B E *alio & maiori gnomone, scilicet numerorum lateralium maioris quadrati* B D *quo excedit quadratum* B E. *Sequetur quadratum* B D *plus excedere quadratum* B E, *quam eum qui sub* A B B G *cum quadrato* G E. *Maior itaque erit qui sub* A B B G *cum quadrato* G E, *quadrato* B E. *Minor autem quadrato* B D, *inter quos* B D *&* B E *non cadit latus quadrati, cùm sola vnitate distent. Qui igitur sub* A B B G *similibus planis quadratus, cum quadrato alio* G E, *æquantur non quadrato numero qui inter quadratos* B D *&* B E *vnitate distantes reperitur, non igitur componunt quadratum numerum ipsi qui sub* A B B G *& qui ex* B E, *quadrati.*

MONITVM.

Animaduertendum curauimus quadratorum numerorum seriē, ex imparium serie ortam esse. Soli nempe impares ab vnitate coniuncti, quadratos efficiunt, ac quotlibet coniuncti doceamus exemplo, Sumatur vnitas quadratum referens (ea etenim quibuslibet subiectis adaptatur vt prima septimi diffinitione diximus) cui proximus addatur impar, qui quidem bina eius latera cum anguli complemento restituat, is erit ternarius, qui vnitati additus 4 producit, binary scilicet quadratum. Ilis item consequens impar quinarius addatur is proferet nouem, scilicet ternary quippe quadratum, cui additus quartus impar 7 facit 16 quaternary quippe quadratum, eidem porrò iungatur 9 fiet 25 quinary quadratum Rursus ipsi copuletur sequens impar 11 fiet 36 senary quadratum sicque infinitè ad quotuis procedemus quadratos, cum scilicet cuilibet quadrato additur gnomon, æquipollens duplicatæ radici, ac insuper vnitati quæ angulum gnomonis compleat, qui quidem gnomones singuli impares numeri sunt, eo quòd sese excedant tantum binario, vel quia bina quadrati æqualia latera augēt vnitate. Quare si eorum quadratorum vnitate tantùm augeantur latera, perspicuum est, ea serie omnes contineri quadratos, cùm nullus sit quadratus numerus nisi is cuius latus vnitatibus integris referri potest, in se multiplicatis ipsum producentibus. Nullius itaque quadrati latus inter duas vnitates cadet, & proinde inter eos cadentium, nullus quadratus erit ab ipsis alius, quorum infiniti rationem non habentes quam quadrati, varijs modis educi possunt, scilicet sumpto quadrato ad non quadratum, per corollarium vigesimæquintæ octaui, alijs in ratione superparticulari, ac superbipartiente, per corollarium octauæ octaui. Et demum omnibus dissimilibus planis, per corollarium nona huius. qui quidem infiniti sunt numero scilicet primi, per corollarium vigesimæsextæ octaui, qui sunt infiniti, per vigesimamprimam noni, nempe plures omni multitudine, ac alij dissimiles plani innumerabiles. Quod apponit autem græcum lemma huic, corollarium fuit sextæ huius.

Propositio vigesimanona. *Problema 6.*

Comperire binas Certas potētia tantum commensurabiles, quarum maior plus posSit minore, eo quod ex commensurabili sibi longitudine.

Sumatur ex secunda parte corollary primi lemmatis vigesimæ octaue huius, quadratus numerus G D, *excedens quadratum* D E *non quadrato* E G, *fiátque (per corollarium sextæ huius) sicut* G D *ad* G E *numerus, sic quod ex* A B *proposita ad id quod ex* A Z, *descripto namque super* A B *semicirculo, cui (per primam quarti) ipsi* A Z *æqualis coaptetur, connectatur* Z B *Dico* A B *&* A Z *certas esse potentia tantùm commensurabiles, quarum maior* A B *plus potest minore* A Z, *eo quòd ex* Z B *ipsi* A B *longitudine incommēsurabili. Quoniam quadratum* A B *excedit quod*

Dd iij

ex A Z, e[illegible] per 47 primi, numerus verò G D excedit numerum G E ipso E D, per hypothesim. Est autem quod ex A B ad quod ex A Z sicut G D ad G E. Erit igitur rationis conuersione (per corollarium decimænonæ quinti, quod ex A B ad quadratum Z B excessum, sicut G D ad excessum E D, quia vero quadrata rectarum A B A Z rationem non habent quam quadrati, scilicet ipsorum G D G E, ipsa A B A Z longitudine sunt incommensurabiles & ideo potentia tantum commensurabiles, cum A B sit proposita per nonam huius. Cùm autem quadratum A B ad quod ex Z B rationem habeat quam quadrati numeri G D E D, Ipsæ A B & Z B longitudine commensurabiles existunt, per eandem. Comperimus itaque binas rectas certas A B A Z potentia tantùm commensurabiles, quarum maior A B plus potest minore A Z, eo quod ex Z B sibi longitudine commensurabili.

Propositio trigesima. *Problema 7.*

Comperire binas Certas potẽtia tantum commẽsurabiles, quarum maior plus potest minore eo quod fit ex sibi longitudini incommensurabili.



Exponatur certa A B, ac (per secundum lemma 28 huius) comperiantur duo quadrati numeri G E E D non quadratum G D componẽtes, fiat autem sicut G D ad G E, sic quod ex A B ad quod ex A Z, per corollarium sexta huius. Descripto rursus super A B semicirculo, ipsi A Z æqualis, coaptetur, coniuncta Z B. Cùm enim sit G D ad G E, vt quod ex A B ad quod ex A Z, erit (vt in præfata ostendimus) quod ex A B ad excessum ex Z B vt G D ad excessum E D, per collarium decimænona quinti, sed G D ad vtrosque G E & E D, rationem habet quam non quadratus ad quadratum, per hypothesim. Igitur quod ex A B ad quod ex A Z, seu ex Z B, rationem habet quam non quadratus ad quadratum. Ipsa igitur A Z Z B ipsi A B potentia tantùm sunt commensurabiles, per nonam huius, & certa, cùm proposita fuerit A B certa. Comperimus itaque binas certas A B A Z potentia tantum commensurabiles, quarum maior A B plus potest minore A Z, eò quod ex Z B ipsi A B longitudine incommensurabili.

MONITVM.

Hæc eadem fuit prioris demonstratio, transposita tantum numerorum ratione, quæ eandem producat quadratorum ex lineis rationem, insuper lemma à Græco exemplari hic appositum, sat superque lemmate vigesimæprimæ huius, aperuimus, scilicet sicut linea ad lineam, sic quod sub illis ad quadratum vltimæ.

Propositio trigesimaprima. *Problema 8.*

Comperire binas Medias potentia tantum commensurabiles, Certum comprehendentes, quarum maior plus posit minore, eo quod fit à sibi longitudine commensurabili.

Sumantur (per 29 huius) binæ certa potentia tantùm commensurabiles A B quarum maior A plus posit minore B eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili. Ponatur autem (per decimamtertiam sexti) media proportionalis ipsis A & B quæ sit G, fiátque sicut A ad B sic G ad D, per duodecimam sexti Dico G & D esse medias potentia tantùm commensurabiles, certum comprehẽdentes, ipsamq́; G plus posse minore D, eo quòd fit à sibi commensurabili longitudine. Quoniam G recta est media ipsarum A & B certarum potentia tantùm commensurabilium. Quadratum rectæ G æquum est (per decimamseptimam sexti) ei quòd sub extremis A & B, quod sub A & B vero medium est, atque G recta illud potens media est, per 21 huius. Quia insuper est A ad B vt G ad D. Sed A ipsi B potentia est commensurabilis tantùm, & G ipsi D potentia tantum, per 13 huius, commensurabilis erit. Media autem est G, media igitur erit & D, per vigesimamtertiam huius. Cùm præterea A plus posit ipsa B eò quòd à sibi longitudine commensura-

mensurabilis, & G plus potest ipsa D, eò quod à sibi longitudine commensurabili, per 16 huius. Caeterùm positum est A esse ad B vt G ad D erit itaque vicißim A ad G vt B ad D, per 16 quinti. Sed vt A ad G sic G ad B fuit, vt igitur G ad B sic erit B ad D. Quare trium G B D proportionalium quod à media B, aequum est ei quod sub extremis G & D rectangulo, per 17 sexti. Sed quod a media B certum est, per octauam diffinitionem huius, cum B sit certa. Quod igitur sub G & D certum erit, Comperimus itaque binas medias G & D potentia tantum commensurabiles, certum comprehendentes, quarum maior G plus potest minore D eò quòd fit a sibi longitudine commensurabili.

Corollarium.

Eodem argumento patebit dari binas medias potentia tantùm commensurabiles, certum continentes, & quarum maior plus poterit minore eo quod fit à sibi longitudine incommensurabili. *Si ponamus (per trigesimam huius) certam A plus posse certa B quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Nam id idem sequentur G & D mediae, vt ostendimus.*

Lemma.

Si tres rectae in quauis ratione fuerint, erit sicut prima ad tertiam, sic quod sub prima & secunda, ad id quod sub secunda & tertia continetur.

Sint tres rectae in quauis ratione A B B G & G D. Et ex B G media fiat (per 46 primi) quadratum B Z T G, perficiantúrque rectangula A Z & D T. Quoniam (per primam sexti) rectangula A Z B T & T D sunt in rationibus rectarum A B B G & G D, erit aequa ratione A Z ad T D vt A B ad G D, per 22 quinti. Sed A Z continetur sub prima A B & secunda B G, cum sit illi B G aequalis Z B, quinetiam T D continetur sub B G secunda & G D tertia, cum T G ipsi B G sit aequalis. Sicut igitur A B prima ad G D tertiam, sic erit A Z sub prima & secunda, ad T D quod sub secunda & tertia.

MONITVM.

Hoc lemma ab altero Graecorum exemplarium tulimus, quod licet demonstrandis subsequentibus necessarium non sit, tamen demonstrationum compendio admodum vtile comperietur.

Propositio trigesimasecunda. Problema 9.

Inuenire duas medias potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eò quòd fit ex sibi cõmensurabili longitudine.

Sint tres certae potentia tantùm cõmensurabiles A B G, & possit A plus ipsa G quadrato sibi commensurabilis longitudine, per vigesimamnonam huius. Ipsis autem A & B media proportionalis (per decimãtertiam sexti) exhibeatur D. Ad rectam autem D aequum rectangulum ei quod sub B & G constituatur latitudinem efficiens E, per quadragesimamquintam primi: Dico rectas D E medias esse, quales inquirimus. Cum autem sit (per lẽma praecedens) sicut A ad G, sic quod sub A B ad id quod sub B & G, sed ei quod sub A B aequum est, quod ex D media, ei verò quod sub B G aequum est (ex hypothesi) quod sub D E, erit igitur sicut A ad G, sic quod ex D ad id quod sub D E, sed sicut quod ex D ad id quod sub D E, sic (per lemma vigesimae primae huius) fuit D ad E: sicut igitur A ad G, sic D ad E. Cùm autẽ D possit medium quod sub A & B, per vigesimam primam huius, ipsa D media erit, quia verò est A ad G vt D ad E, sed A ipsi G potentia tantùm cõmensuratur, & D ipsi E potentia tantùm commensurabitur, per 13 huius, media itaque erit E per vigesimamtertiam huius. Potest autem A plus ipsa G eo quòd à sibi longitudine commensurabili, & D plus ipsa E poterit, eò quod a sibi longitudine commensurabili, per decimamsextam huius. Praeterea quod sub B G medium est, per vigesimamprimam huius, quod ita-

quę sub D E *æquum illi positum, medium erit. Inuenimus igitur duas medias* D *&* E *potentia tantùm commensurabiles medium comprehendentes, quarum maior* D *plus potest minore* E *eò quod fit ex sibi longitudine commensurabili.*

Corollarium.

Haud secus harum mediarum maiorem plus posse minore eo quod fit à sibi incommensurabili longitudine ostendemus. *Ponẽtes scilicet* A *plus posse ipsa* G, *eo quòd fit* A *sibi longitudine incommensurabili, ex trigesima huius.*

Lemma.

In triangulis rectangulis ab angulo recto in basim perpendiculari demissa quatuor rectãgulorum eliciuntur æqualitates.



Esto triangulum rectangulum A B G, *à recto autem eius angulo* G A B, *in basim* B G *perpendicularis agatur* A D. *Dico ab hac triãguli descriptione quatuor oriri rectangulorum æqualitates.*

Prima.

Quod sub G B B D *æquum est ei quod ex* B A. *Cùm enim per corollarium octauæ sexti latus* B A, *quod ad segmentum* B D *sit media inter totam* G B *& segmẽtum* B D. *Quod igitur sub extremis* G B B D *æquum erit, per decimamseptimam eiusdem, ei quod à media* A B.

Secunda.

Quod sub B G G D *æquum est, ei quod ex* A G *quadrato, eodem quo prius argumento,* A G *media inter* B G G D *proportionalis erit, quare (per decimãseptimam sexti) sub* B G G D *æquum erit ei quod ex* A G *fit.*

Tertia.

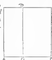
Quod sub B D D G *æquum est ei quod ex* A D. *Nam per* 13 *sexti media est* A D *perpẽdicularis inter* B D *&* D G *basis segmenta, & proinde sub extremis* B D D G *æquum erit ei quod à media* A D *fiet quadrato.*

Quarta.

Quod sub B G A D *æquum est ei quod sub* G A A B, *cùm sint (per quartam sexti) proportionales* B G *ad* G A, *ut* A B *ad* A D. *Erit (per decimamsextam sexti, quod sub extremis* B G A D *æquum ei quod sub medijs* G A A B *rectangulo: similiter sub* A B G D *æquum erit ei quod sub* A D A G.

Lemma.

Si recta secetur inæqualiter, quod sub tota & maiori sectione, ad id quod sub tota & minore, erit sicut maior ad minorem.



Excitetur ipsi A B *æqualis ad rectos* D G, *& perficiantur rectangula,* A D D B, *patet rectangulum* A D *quod sub tota* A B *(hoc est* D G*) & maiori* A G, *ad rectangulum* D B *sub eadem tota* D G *& minori* G B *esse, ut* A G *maior ad* G B *minorem, per primam sexti. Hoc lemma ab altero tantum Græcorum exemplari datum est.*

Propositio trigesimatertia. *Problema* 10.

Inuenire binas rectas potentia incõmensurabiles, conficientes compositum ex quadratis ipsarum certum, quod verò sub ipsis Medium.



Sint binæ certæ potentia tantùm commẽsurabiles A B B G, *per decimamquartam huius, quarum maior* A B *plus possit minore* B G *eo quod à sibi longitudine incommensurabili, per 30 huius super* A B *autem fiat semicirculus, sectáque* G B *bifariam in* D *ei quod ex* D B *æquũ ad ipsam* A B *applicetur, deficiens specie quadrata, per 28 sexti, sitq́ quod sub* A E E B, *Excitetúrque per* E *ipsi* A B *perpendicularis* Z E, *coniunctis* Z B Z A, *quoniam* A B *&* B G *sunt inæquales, & maior* A B *plus potest minore* B G *eò quod à sibi longitudine incommensurabili. Quartæ autem parti eius quod ex minore* B G *(hoc est quadrato* D B*) æquum, ad maiorem* A B *applicatum est (quod scilicet sub* A E E B *per hypothesim) deficiens specie quadrata incommensurabilis igitur est* A E *ipsi* E B, *per secundam partem decimæ octauæ huius. Est autem (per proximum lemma)* A E *ad* E B, *sicut quod sub* A B A E *ad id quod sub* E B A B *tota, quod autem sub* A E A B *æquum est (per primum lemma præcedentis) ei quod ex* A Z *quod verò sub* A B E B *æquum est (per idem lemma) ei quod ex* B Z. *Sicut igitur* A E *ad* E B *sic est quod ex* A Z *ad id quod ex* B Z, *incommensurabilis autem est* A E *ipsi* E B. *Incommensurabile igitur est quod ex* A Z *quadrato* B Z, *per decimamtertiam huius. Binæ igitur rectæ* A Z B Z *sunt potentia incommensurabiles, & efficiunt compositum ex earum quadratis certum, cùm sit æquum ei quod ex* A B *certa, per 47 primi. Cùm autem (per constructionem) quod ex* D B *æquũ sit ei quod sub* A E E B, *cui eidem æquum est (per primum lemma præcedentis) quod ex* E Z, *æquales erũt* D B *&* E Z, *Quod itaque sub* A B B D *æquum est ei quod sub* A B E Z. *Præterea cùm id quod sub* A B B G *sit Medium, per vigesimamprimam huius, sequetur eius dimidium, scilicet quod sub eadem altitudine* A B *& dimidia basi* D B *(per corollarium primæ sexti) esse Medium, per coroll. 23 huius, cui quidem sub* A B B D *Medio æquum ostensum est quod sub* A B E Z, *ei verò quod sub* A B E Z *æquum est quod sub* A Z B Z *per primum præcedentis lemma. Medium itaque erit quod sub* A Z B Z. *Inuenimus itaque binas rectas* A Z B Z *potentia incommensurabiles, conficientes compositum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis Medium.*

MONITVM.

Ponitur hic lemma ab altero Græcorum exemplarium, quod sub corollario primæ sexti comprehendimus quare subticendum illud esse rati sumus.

Propositio trigesimaquarta. *Problema 11.*

Binas rectas lineas potentia incommensurabiles, efficientes compositum ex earum quadratis Medium, quod verò sub ipsis Certum comperire.



Exponantur binæ mediæ potentia tantùm commensurabiles certum comprehẽdentes A B B G, *per 27 huius, quarũ maior plus possit minore, eo quod sibi à longitudine incommensurabili, per coroll. trigesimæprimæ huius, & reliqua disponantur vt in figura præcedentis, quoniam* A B *&* B G *sunt inæquales, & maior* A B *plus potest minore* B G *eò quòd à sibi longitudine incommensurabili. Quartæ autem parti eius quod à minore* B G *(hoc est quadrato dimidiæ* D B*) æquum, ad maiorem* A B *applicatum est, deficiens specie quadrata, scilicet quod sub* A E E B. *Incommensurabilis igitur est* A E *ipsi* E B, *per secundam partem 18 huius. Et cum sit* A E *ad* E B *sicut quod ex* A Z *ad id quod ex* Z B, *vt proxima demonstratione ostendimus, incommensurabile erit quod ex* A Z *quadrato* Z B, *& itaque potentia incommensurabiles erunt, rectæ* A Z Z B, *per decimamtertiam huius, efficiúntque compositum ex ipsarum quadratis medium, nam æquum et quod ex* A B *(per 47 primi) quæ est media ex hypothesi cum enim quod ex* D B *sit æquum ei quod sub* A E E B, *cui æquum est quod ex* E Z, *per 1 lemma 32 huius, rectæ* D B *&* E Z *ideo æquales erunt. Quod igitur sub* A B D B *ei quod sub* A B E Z *æquum erit ipsi autem sub* A B E Z *æquum est quod sub* A Z Z B, *per primum lemma trigesimæsecundæ huius. Quod itaque sub* A Z Z B *æquum erit ei quod sub* A B E D B. *Quod autem sub*

A B D E dimidium est eius quod sub A B B G, per coroll. primæ sexti, quod est certum, ex hypothesi, & igitur eius dimidium scilicet quod sub A B D E certum erit, & proinde ipsi æquale (quod sub A Z Z E) certum erit. Binas itaque rectas A Z Z E potentia incommensurabiles efficientes, &c. comperimus.

Propositio trigesimaquinta. *Problema 12.*

Comperire binas rectas lineas potentia incommensurabiles, efficientes compositum, ex earum quadratis Medium, & quod sub ipsis Medium, incommensurabile composito ex earum quadratis.

Sint (per coroll. 32 huius) binæ mediæ A B maior & B G minor, potentia tantum commensurabiles, medium comprehendentes, quarum maior plus possit minore, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili: reliqua verò ad figuræ descriptionem fiant iuxta duarum præcedentium tradita. Cùm autem ad maiorem A B applicatū sit, quod sub A E E B, æquum quartæ parti eius quod à minore G D, hoc est quadrato D B, deficiēs specie quadrata, & maior plus possit minore eò quòd à sibi longitudine incommensurabili per constructionem, incommensurabilis erit A E ipsi E B, per secundam partem 18 huius. Quia autem ostendimus esse A E ad E B vt quod ex A Z ad quadratum Z E, incommensurabile erit quod ex A Z quadrato Z B, quare ipsæ A Z Z B potentia incommensurabiles erunt, ac efficient compositum ex earum quadratis (æquum quidem quadrato ipsius A B Mediæ per 47 primi) Medium. Cùm autem in præfatis ostensum sit sub A Z Z B æquum esse ei quod sub A B B D quod autem sub A B B D Medium est, cū sit dimidium eius quod sub A B B G, per coroll. primæ sexti, quod fuit Medium, ex hypothesi. Quod igitur sub A Z Z B (ipsi quod sub A B B D æquum) Medium erit. Præterea incommensurabile erit cōposito ex ipsarum A Z Z B quadratis. Nam cùm D B sit ipsius G B dimidia, incommensurabilis autem sit A B ipsi G B, sequetur (per coroll. secundum decimæ huius) & D B eidem A B incommensurabilem esse: sed sicut A B ad D B sic quod ex A B ad id quod sub A B D B, per lemma 21 huius. Incommensurabile igitur erit quod ex A B ei quod sub A B D B et autē quod sub A B D B æquale ostensum est id quod sub A Z Z B, ei verò quod ex A B æquum fuit compositum ex earum A Z Z B quadratis, per 47 primi. Quod igitur sub A Z Z B incommēsurabile erit composito ex earum A Z Z B quadratis. Comperimus itaque binas rectas A Z Z B potentia incommensurabiles efficientes, &c.

Propositio trigesimasexta.

Si binæ Certę potentia tantùm commensurabiles compositæ fuerint, tota incerta est, vocetúrque Ex binis nominibus.

Sint binæ certæ potentia tantùm commensurabiles A B B G: Dico totam A G incertam esse, eamque vocari binomium, seu ex binis nominibus. Quoniam (per lemma vigesimæprimæ huius) est A B ad B G vt quod sub A B & B G ad quadratum B G, incommēsurabilis autem est recta A B rectæ B G. Quòd igitur sub A B B G ei quod ex B G, incommensurabile erit, per 13 huius. Cùm autem commensurabilia sint quæ ex B G & ex A B, per hypothesim, Compositum ex ipsis, vtrique ipsarum commēsurabile erit, per 11 huius. Et quia binarum, scilicet compositi & eius quod ex B G commensurabilium, altera (ex B G) alicui (quod scilicet sub A B B G) incommensurabilis fuit. Et reliqua (scilicet compositum ex earum quadratis) eidem quod sub ipsis contentum est, incommensurabilis erit, per corollarium secūdum decimæ huius, & (per idem coroll.) quod bis sub ipsis A B B G eidem composito ex earum quadratis, incommensurabile erit. Sed quod bis sub ipsis vnà cum composito ex earundem A B B G quadratis, totum quod ex A G (per quartam secūdi) componunt, Totum igitur ex A G vtrisque scilicet composito ex A B & B G quadratis, & ei quod sub ipsis, incommensurabile erit, per duodecimam huius. Atqui compositum ex quadratis A B B G certarum, certum est, per 8 & 9 diffinit. huius, Totum igitur ex A G ipsi composito incommensurabile incertum erit, per decimam diffinitionem huius. Quare recta

AG

A G ipsum incertum potẽs, incerta erit, per vndecimam diffinitionem huius, vocatur autem ex binis nominibus eò quòd ex binis certis longitudine tamen incommẽsurabilibus componatur. Si itaque binæ certa, &c.

Propositio trigesimaseptima.

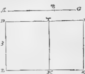
Si binæ Mediæ potentia tantum commensurabiles Certum comprehendentes componantur, tota incerta est, vocatur autem Ex binis mediis prima.



Sumantur binæ Mediæ potentia tantùm commensurabiles A B B G certum comprehendentes. Dico totam A G compositam incertam esse. Eodem ferè quo præcedentis argumento. Quoniam incommensurabiles sunt A B B G, sequetur (vt proxima ostendimus) quadrata ex A B & B G incommensurabilia esse, rectangulo bis sub ipsis A B B G comprehenso, per lemma vigesimæ, & primum coroll. decimæ huius. Quia verò ea quadrata & rectangula composita totum quod ex A G faciunt, per quartam secundi, sequetur (ex 12 huius) totum ex A G vtrique (composito scilicet ex quadratis A B B G & rectangulo sub eis bis sumpto) esse incommensurabile. Sed bis sub A B B G sumptum certum est, ex hypothesi, nempe A B B G certum comprehẽdunt. Totum igitur ex A G (ipsi bis sumpto sub A B B G certo incommensurabile) incertum erit, ex decima diffinitione huius, & proinde tota A G illud potens incerta erit, per 11 diffinit. huius. Quæ quidem Ex binis mediis prima dicitur ea de causa, quod binarum ex binis mediis genitarum, hæc ex mediis certum continentibus, prior feratur secunda, quæ ex mediis medium continentibus componetur. Quare hæc secunda illa verò prima dicta fuit, cùm sit certum incerto præstantius. Si itaque binæ Mediæ potentia tantùm, &c.

Propositio trigesimaoctaua.

Si binæ Mediæ potentia tantum commensurabiles Medium comprehendentes componantur, Tota incerta est, vocatur autem Ex binis mediis secunda.



Copulentur binæ Mediæ potentia tantum commensurabiles Medium comprehendentes A B B G: Dico totam A G incertam esse: quoniam longitudine incommensurabiles existunt A B B G, ex hypothesi. Patet (vt proximis prioribus) quadrata ipsarum A B B G rectangulo bis sub ipsis contento incommensurabilia esse. Et quia quadrata illa cum rectangulis, totum ex A G componunt, per quartam secundi, patebit (ex duodecima huius) totum ex A G vtrisque esse incommensurabile, scilicet quadratis A B B G & binis sub A B B G rectangulis Proponatur itaque certa D E, cui applicetur (per 45 primi) æquum quadratis A B B G, sitq; illud D E K T, & æquum aliud rectangulo bis sub A B B G sumpto quod sit T K Z I. Cum autem E T rectangulum, æquum sit positum quadratis ex A B B G mediis potentia commensurabilibus, Illud Medium erit, per coroll. 23 huius. Quia verò K I æquum est rectangule bis sub ipsis cõprehenso; Medio quidẽ ex hypothesi, & illud K I medium erit, ex eodem. Sed quadrata & rectãgula A B B G, totum ex A G faciunt, vt ostensum est. Rectangulũ igitur E I quadrato ex A G æquum erit. Cùm autem totum ex A G vtrisque (quadratis scilicet A B B G & rectangulo bis sub ipsis contento) incommensurabile ostensum sit, totum E I vtrisque E T K I incommensurabile erit. Quare E T E I inuicem incommensurabilia erunt. Et ideo (per primam sexti) rectæ D T T I D I longitudine incommensurabiles erunt. Sed media sunt E T K I, ad certam D E applicata, vt ostendimus, latitudines igitur D T T I certas (per 22 huius) efficiunt, longitudine tamen incommensurabiles. Potentia igitur tantùm commensurabiles. Tota itaque D I incerta erit, per trigesimamsextam huius. Et proinde rectangulum E I sub certa D E & incerta D I (per coroll. 21 huius) incertum erit. Quod quidem æquum ostensum est quadrato ex tota A G. Quadratum itaque ex A G incertum erit. Illúd-

que potens A G incerta erit, per undecimam diffinitionem huius. Quæ quidem ex binis medijs secunda ideo dicitur, quod ex medijs medium continentibus fiat. Postponenda vero est prima quæ ex medijs certum continentibus orta est, ut proxima diximus. Si itaque bina Media componantur, &c.

Propositio trigesimanona.

Si binę rectę lineę potentia incommensurabiles compositę fuerint, efficientes compositum ex quadratis quæ ab ipsis Certum, quod autem sub ipsis Medium, Tota recta linea incerta est, vocatur autem Maior.

Sumantur bina rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, per trigesimamtertiam huius, sintque A B B G: Dico totam A G incertam esse, quæ quidem dicitur Maior. Quoniam incommensurabiles sunt A B B G longitudine, per ultimam partem corollarij nonæ huius, patebit (per demonstrata tribus proximis) id quod bis sub A B B G composito ex quadratis A B B G incommensurabile esse, ac (per quartam secundi) utraque simul sumpta quadrato totius A G esse æqualia. Et ideo (per 12 huius) idem quadratum ex A G composito, ex quadratis A B B G esse incommensurabile. At compositum ex quadratis certum est, ex hypothesi. Incertum igitur erit ex A G quadratum, per decimam diffinitionem huius, & proinde illud potens recta A G incerta erit, per undecimam diffinitionem huius. Vocatur autem Maior, eò quòd maior pars suæ potentia, ex quadratis A B B G certis componatur, quæ semper maiora sunt rectangulo bis sub A B B G sumpto nam maiorem partem dimidia quadrati A G totius sibi sumunt, per coroll. septimæ secundi. Si itaque bina recta lineæ potentia incommensurabiles, &c.

MONITVM.

Reliquimus demonstrationem, qua Theon ostendere conatur, quadrata ex A B B G maiora esse rectangulo bis sub A B B G contento, prolixè admodum. Nos enim illud satis superque demonstrauimus corollario septimæ secundi, & ipsius A G quadrati (utraque potentis) plus dimidio sumere quadrata ex A B B G.

Propositio quadragesima.

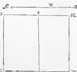
Si binę rectæ lineę potentia incommensurabiles compositæ fuerint, efficientes conflatum ex earum quadratis Medium, quod verò sub ipsis Certum, Tota recta linea incerta est, vocatur autem Certum mediúmque potens.

Sumantur bina rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum, per 34 huius, quæ sint A B B G: Dico totam A G incertam esse, eámque dici Certũ mediúmque potẽtem. Quoniã cõflatum ex quadratis A B B G medium est, quod verò sub ipsis certum, ex hypothesi, incõmensurabile erit idem conflatum, rectangulo sub ipsis bis sumpto. Et igitur totum, scilicet quòd ex A G per quartam secundi, rectangulo sub A B B G sumpto, certo quidem, incommensurabile erit, per duodecimam huius. Quare idem totum incertum erit, ex decima diffinitione huius. Rectáque A G illud potens incerta erit, per undecimam diffinitionem huius, vocatur autem ipsa A G Certum mediúmque potens, eò quòd eius potentia ex Certa & media componatur area. Si itaque bina recta lineæ potentia incommensurabiles, &c.

Proposi

Propositio quadragesimaprima.

Si binæ rectæ lineę potentia incommensurabiles compositę fuerint, efficiētes compositum ex earum quadratis Medium quod verò sub ipsis Medium, & insuper incommensurabile composito ex earum quadratis, tota recta linea incerta est, vocatur autem Bina media potens.



Sumantur per 35 huius, binæ rectæ potentia incommensurabiles &c. quales hypothesis optat, quæ sint A B B G*: Dico totam* A G *incertam esse, quæ quidem dicitur Bina media potēs. Proponatur Certa recta* D E*, cui (per 45 primi) constituatur æquum rectangulum cōposito ex quadratis* A B B G *quod sit* E I*, æquum verò rectangulo bis sub* A B B G*, quod sit* Z K*. Totum igitur* E K *æquum erit quadrato* A G*, per quartam secundi: quia verò incommensurabile est compositum ex quadratis* A B B G *ei quod bis sub ipsis, ex hypothesi, Incommensurabile erit,* E I *ipsi* Z K*, cùm sint incommēsurabilibus æqualia & ideò per primam sexti,* D I *ipsi* I K *longitudine incommensurabilis erit. Quia verò media sunt quadrata & rectangula ex* A B B G*, media erūt* E I Z K*, ipsis æqualia, quæ ad Certam* D E *proiecta, latitudines* D I *&* I K *Certas faciūt, per vigesimam secundam huius) potentia itaque commensurabiles, longitudine autem incommensurabiles ostensæ. Tota itaque* D K *incerta est, per 36 huius) rectāgulum igitur* E K *sub Certa & incerta* D E *&* D K *comprehensum (per corollarium 21 huius, incertum erit, & proinde* A G *illud potens (nempe quadratum* A G *ipsi* E K *æquale) incerta erit. Quæ ideo vocatur Bina media potens, quod eius potētia (hoc est quadratum* A G*) ex binis areis medijs componatur, scilicet ex quadratis* A G G B*, & rectangulo bis sub* A G G B *sumpto, inuicem incommensurabilibus. Si itaque binæ rectæ lineæ potentia, &c.*

MONITVM.

Cùm harum sex incertarum (his proximis theorematis expositarum) denominationes vnde ortæ sint nō satis lucidè Theonem explicasse quidā arbitrati sint, aliquas earum præter eas quas diximus differentias adferre non importunū erit. Quia igitur Euclides certarum prius traditionem cœpit, vt earum adminiculo ad incertas properet, ab incertis autem ad incertiores, hoc est, à certarum natura remotiores eo ordine seruato vergat, harum itaque sex incertarum quatuor Certum mediúmque potētes cōponit, scilicet eam quæ Ex binis nominibus, Ex binis medijs primā, Maiorem, Certum mediúmque potentem. Quæ licet potentias earum ex certa & media area singulæ componant, tamen in eo differunt, quod prior huiusmodi potentiam à lineis certis, potentia commensurabilibus educat. Secunda vero a lineis medijs potentia commensurabilibus, quæ iam a certis recedunt. Tertia à lineis longitudine & potentia omnino incommensurabilibus suam educit potentiam quæ tamen maiorem portionem certam habet, ea de causa Maior dicitur. Quarta autē ab eisdem lineis longitudine & potentia incommensurabilibus, quæ tamen maiorem potētiæ partem, ipsi Certum mediúmque potenti incertam tribuūt, nempe Mediam. Duas verò reliquas scilicet Ex binis medijs secundam, & Bina media potētem, seruato eodē ordine cōponit. Nam licet binas incertas areas, hoc est Medias incōmensurabiles, vtraque earum poßit, tamen prior scilicet Ex binis medijs secunda (quæ ex lineis potentia saltem commensurabilibus constat) reliquis anteponenda fuit (quæ ex lineis penitus incommensurabilibus componuntur) his nempe Maior, & Certū mediúmque potens, plus à certarum natura remotis. Harum autem duarum postremam omnium sex nouißimam, ac à certa remotiorem merito posuit Euclides, eam scilicet quæ potentiam ex incertis ac incommensurabilibus sibi inuicem assumit, longitudinem verò à lineis & longitudine & potentia penitus incommensurabilibus exigit, quam ideo tanquam ab incerta natura remotißimam, nouißimam ordine locauit Euclides.

Ex binis igitur nominibus priorem enūciat, quæ bina illa sua nomina Certas efficit lineas, eius verò potentiæ potißimam partem ex certa area sumit.

Ex binis autem medijs primam secundò ponit, eam quæ sua nomina incertas quidem, sed potentia saltem commensurabiles efficit lineas, eius verò potentiam ab incerta potißima parte susceptam, reliquam à certa area subfuratam componens.

Ex binis vero medijs secundam tertiò collocat, quæ licet aream incertam ex incertis areis sumat

in potentia, tamen longitudinem à lineis potentia saltem commensurabilibus suscipit.

Tres autem sequentes eodem ordine quo has priores inserit, sed potentiam quam priores à lineis potentia saltem commensurabilibus depromunt. Subsequentes similem potentiam à lineis penitus & longitudine & potentia incommensurabilibus (& proinde à certarum natura remotiores) assequuntur.

Lemma.

Quod autem præfatæ incertæ ad vnum signum tantùm secari possint, in eas linearum denominationes ex quibus compositæ præfatas species generant, hoc præassumpto lemmate demonstrabimus.

A——D——G——B

Secetur recta A B *inæqualiter in* D, *ac eadem* A B *rursus inæqualibus in* G. *Dico ex* A G G B *inæqualioribus quadrata, maiora esse quadratis reliquarũ* A D D B *æqualiorum, secetur* A B *bifariam in* E *quoniam inæqualiores sunt* A G G B *ipsis* A D D B, *maior erit* A G *ipsa* D B, *à quibus æquales tollantur ex* A G *scilicet* A E *& ab ipsa* D B *hæc* E B, *igitur reliqua* E G *maior erit ipsa* E D. *Quia verò recta* A B *secta est æqualiter in* E *& inæqualiter in* G, *quadrata ex* A G G B *dupla sunt eorum quæ à dimidia* E B *& ab ea quæ inter sectiones est* E G, *per nonam secundi. Similiter (per eandem) dupla erunt quadrata* B D D A *eorum quæ ab ipsis* B E E D. *atqui maiora sunt quæ ex* B E E G, *his quæ ex* B E E D, *cum maior sit ostensa* E G *quàm* E D. *Quæ igitur ex* A G G B *inæqualioribus (dupla maiorum) his quæ ex* A D D B *(duplis minorum) maiora erunt.*

Propositio quadragesimasecunda.

Quæ Ex binis nominibus ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

A——D——G——B

Esto A B *recta ex binis nominibus, quæ secta in* G *binas efficiat* A G G B *Certas potentia tantùm commensurabiles, quæ quidem sua sunt nomina: Dico rectam* A B *nullo alio signo posse secari, quo alias efficiat Certas potẽtia tantùm commensurabiles, quam in* G. *Quod si in alio secari possit, secetur in* D. *Sequetur singulas* A D D B *singulis* A G G B *æquales non esse, nã si æquales essent, eadẽ fieret sectio (contra hypothesim) nec bifariam secta est in* D *ipsa* A B, *nam longitudine commẽsurabiles essent* A D D B, *contra eandem hypothesim, inæquales igitur sunt* A D D B, *inæquales item* A G G B. *Cum autem (per quartam secundi) quadrata* A G G B *cum rectangulis bis sub* A G G B, *æqualia sint quadratis* A D D B *cum rectangulis bis sub* A D D B, *nempe vtraque quadrato* A B. *Sequetur quadrata tãto excedere quadrata, quanto reciprocè rectangula excedunt rectangula, quod enim tollitur à quadratis additur rectangulis, & è conuerso. Cùm enim quadrata ex Certis producta certa sint, & proinde inuicem commensurabilia, ipsa excessum ipsis commensurabilem (scilicet quem numeri) parient, per secundam communem sententiam septimi, & ideo certum, per nonam diffinitionem huius. Rectangula igitur (sub Certis potentia tantùm commensurabilibus comprehẽsa) media eodem excessu sese excedentia, sese certo excedent, contra 26 huius, quod fieri non potest. Non igitur secari poterit* A B *in alia sua nomina, quàm per signum* G *distributa, ipsa scilicet* A G G B. *Quæ itaque Ex binis nominibus ad vnum signum, &c.*

Corollarium.

Binæ certæ potentia tantùm commensurabiles compositæ, binis aliis certis potentia tantùm commensurabilibus coniunctis, æquales esse non possunt. *Nam vtraque binomium componerent, & proinde binomium in pluribus signis secaretur in nomina, quod fieri non posse hac ostensum est. Similiter sequetur in quinque proximis de binis singularum nominibus.*

Propositio quadragesimatertia.

Ex binis mediis prima, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.



Sit AB *ex binis medijs prima, quæ secetur in* G *in sua nomina, scilicet* AG GB *medias potentia tantum commensurabiles certum comprehendentes. Dico rectam* AB *vnico signo* G *in eius denominationis lineas secari, si enim aliò secari possit, esto in* D. *Constat autem (vt in præfata)* AD DB *inæquales esse ipsis* AG GB, *& adinuicem, ex hypothesi. Et insuper quadrata* AG GB *cum rectangulo bis sub ipsis contento, idem componunt quod quadrata* AD DB *cum rectangulo bis sub ipsis contento, per quartam secundi, nempe quadratum ex* AB. *Quanto igitur (vt in præcedenti diximus) quadrata excedunt quadrata, eodē (viceversa) rectāgula excedent rectangula, sed rectangula sunt certa, cùm nomina illa certum (ex hypothesi) comprehendant & igitur certo sese excedunt. Sequetur ideo & quadrata, quæ quidem ex medijs media sunt sese certo excedere, contra 26 huius, quod esset absurdum. Non igitur secatur* AB *aliter quàm in* G *in nomina. Ex binis itaque medijs prima, ad vnum duntaxat signum, &c.*

Propositio quadragesimaquarta.

Ex binis medijs secunda, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.



Esto AB *ex binis medijs secunda, secta in sua nomina* AG GB *Medias quidem potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes in signo* G. *Dico ipsam in alias eius nominis lineas, alio signo secari non posse. Quod si fieri posse credatur, sit in* D. *Exponatur certa* EZ *cui (per 45 primi) ei quod ex* AB *æquum constituatur* ZN, *à quo auferatur eis quæ ex* AG GB *æquum* EI. *Reliquum igitur* IN *æquum erit eis quæ bis sub* AG GB, *per quartam secundi & tertiam communem sententiam. Similiter ab eodem* ZN *auferatur æquum quadratis* AD DB *quod sit* EL. *Reliquum* LN *ei quod bis sub* AD DB *æquum erit. Cum enim* EI *(æquum quadratis mediarum* AG GB *sit medium, Et insuper* IN *æquum eis quæ sub ipsis medium continentibus) sit medium. Ea Media* EI IN *ad certam* EZ *constituta, latitudines* ET TN *certas efficiunt, potentia tantùm propositæ* EZ *commensurabiles, per 22 huius. Cùm autem sit (per lemma vigesimæprimæ huius) sicut* AG *ad* GB, *sic quod ex* AG *ad quod sub* AG GB, *incommensurabilis autem est* AG *ipsi* GB *longitudine, quod ex* AG *ei quod sub* AG GB *incommensurabile erit. Et proinde quod ex* GB *(eidem ex* AG *commensurabile) rectangulo sub* AG GB *contento incommensurabile erit, per coroll secundum decimæ huius. Et proinde quæ ex* AG *&* GB *eis quæ bis sub* AG GB *incommensurabilia erunt, per tertium coroll. 10. huius. Quod autem ex quadratis* AG GB *est rectangulum* EI, *quod autem bis sub* AG GB *est* IN, *incommensurabile itaque est* EI *ipsi* IN. *Recta igitur* ET *recta* TN *(ex prima sexti) incommensurabilis erit. Sed certæ fuerunt* ET TN. *Potentia tantùm itaque commensurabiles erunt ipsæ* ET TN. *Tota ideo* EN *ex binis nominibus erit, per 36 huius. Haud dissimili argumento patebit* EM MN *rectas, certas esse potentia tantùm commensurabiles, cùm rectangula* EL LN *æqualia sint quadratis* AD DB, *&* EI *quod bis sub ipsis posito, eò quòd recta* AD DB *eiusdem ponantur nominis, ac ipsæ* AG GB, *eisdem tamen inæquales. Quare sequeretur* EN *rectam ex binis nominibus secari posse, in duobus signis, scilicet* T *&* M, *per diuersas, certas potentia tantùm commensurabiles, ipsius quidem* EN *nomina, contra 42 huius, quod esset absurdum. Non igitur potest recta* AB *alio signo quàm* G, *secari in alia sua nomina. Ex binis itaque medijs, &c.*

Propositio quadragesimaquinta.

Maior ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.



Supponatur AB *recta maior, quæ (per 39 huius) constet binis* AG GB *potentia incommensurabilibus, efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium. Dico rectam* AB *in alias eius nominis rectas non posse diuidi, ad aliud signum quàm* G. *Siquidem fieri aliàs posse credatur, secetur* AB *per* D *in ea nomina* AD DB. *Cùm enim ostensum sit (quadragesimasecunda huius) quadrata ex* AG GB, *tanto excessu*

distare quadratis A D D B, *quanto rectangula quæ bis sub* A G G B *distant, a rec[...]is bis sub* A D *D B, eo quod ablatum a quadratis confertur rectangulis, sic diuidatur, per 4 secundi, quadratum totius* A B. *Quadrata ideo ex* A G *&* G B *distant à quadratis ex* A D *&* D B *certo, cum sint ex hypothesi certa. Rectangula igitur sub* A G G B *à rectangulis sub* A D D B *(bis sumpta) distabunt certo. Sed rectangula illa sunt (ex hypothesi) media. Medium igitur excedet medium certo, contra 26 huius, quod esset absurdum. Non igitur in alia nomina secari potest* A B *maior, quam per signum* G *in* A G G B. *Maior itaque ad vnum signum duntaxat, &c.*

Propositio quadragesimasexta.

Certum mediúmque potens, ad vnum duntaxat signum discinditur in nomina.

Esto recta A B *certum mediúm, que potẽs quæ secetur in* G *per sua nomina, quæ sint (per 40 huius) bine rectæ* A G G B *potentia incommensurabiles, efficientes compositum ex earum quadratis medium, quod vero sub ipsis certum. Dico* A B *in alia quam* A G G B *sua nomina, secari non posse. Si vero aliæ eius naturæ lineæ produci posse putentur, sint* A D D B, *secta* A B *in* D. *Sumpto etenim proxima argumento. Cùm quadrata ex* A G G B *eodem excedant quadrata* A D D B, *quo rectangula bis sub* A D D B *excedunt rectangula bis sub* A G G B. *Sed rectangula sese excedunt certo, cùm sint ex hypothesi Certa. Quadrata itaque sese excedẽt certo, quæ quidem (ex eadem hypothesi) sunt Media, quod obstat 26 huius, & proinde absurdum. Non igitur per aliud signum quàm* G *potest recta* A B *secari in sua nomina, nec ideo alia quam* A G G B *suscipere nomina. Certum itaque mediúmque potens ad vnum duntaxat signum, &c.*

Propositio quadragesimaseptima.

Bina media potens, ad vnum duntaxat signum diuiditur in nomina.

Supponatur bina media potens recta A B, *quæ (per 41 huius) secetur in* G *signo efficiens* A G G B *rectas potentia incommensurabiles, quarum compositum ex earum quadratis sit medium, quod verò sub ipsis medium ac incommensurabile composito ex earum quadratis: Dico totam* A B *aliter quàm per* G *non secari in ea nomina. Quod si fieri possit aliter, secetur in* D, *&, sumpto 44 huius argumento, applicetur ad certam* E Z *æquum quadrato* A B, *per 45 primi, quod sit* E K, *a quo subtrahatur æquum composito ex quadratis* A G G B, *sitque* E I, *reliquum* T K *erit quod bis sub ipsis* A G G B, *cùm quadrata & rectangula componant totum ex* A B, *per 4 secundi, æquũ ipsi* E K *positum. Similiter subtrahatur ab eodem* E K *æquum quadratis* A D D B *quod sit* E L, *reliquum* M K *æquum erit ei quod bis sub* A D D B *quoniam (per constructionem)* E I *æquũ est quadratis* A G G B, *&* T K *rectangulo sub ipsis æquum est, similiter* E L *æquum est quadratis* A D D B, *&* M K *rectangulo bis sub ipsis* A D D B *æquum. Cùm autem quadrata rectangulis (ex hypothesi) sint incommensurabilia, incommensurabile erit* E I *ipsi* T K, *ac similiter* E L *ipsi* M K, *& proinde recta* E M *ipsi* M N *ac* E T *ipsi* T N *(per primam sexti) incommensurabiles erunt. Quia verò media sunt* E I, T K, E L, M K, *ad certam* E Z *applicata latitudines* E T, T N, E M, M N, *certas efficiunt, per 22 huius. Potentia igitur tantum commensurabiles erũt* E T *ad* T N *(cum sint longitudine ostensæ incommensurabiles) haud secus* E M *ad* M N, *potentia tantùm sunt commensurabiles adinuicem. Tota igitur* E N *ex binis nominibus dicetur, per 36 huius, quæ quidem in duobus signis* M *&* T *secatur in binas certas, potentia tantùm cammensurabiles, sua scilicet nomina, contra 42 huius, quod esset absurdum. Non igitur aliter potest secari* A B *in sua nomina, quàm per signum* G. *Bina itaque potens media, ad vnum duntaxat signum, &c.*

Rectarum quæ ex binis nominibus diffinitiones,

Supponendum tribus prioribus.

Proposita Certa & ea quæ Ex binis nominibus diuisa in nomina, cuius maius

ius nomen plus posit minore, eò quòd fit ex ſibi loogitudine commenſurabili.

Diffinitio prima, hoc ſuppoſito.

Si maius nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus prima.

Diffinitio ſecunda.

Si minus nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine cõmenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus ſecunda.

Diffinitio tertia.

Si neutrum nominum propoſitæ Certę fuerit longitudine commeoſurabile, ea vocatur Ex biois nominibus tertia.

Quoniam diuerſæ ſunt binomiorum ſpecies, ſex eorum diffinitiones ponit Euclides, Suppon ẽs pro tribus prioribus, maius nomen excedere minus, eo quòd fit à ſibi longitudine commenſurabili. Pro ſequentibus verò tribus poſtremis oppoſitum ſupponit, maius ſcilicet nomen excedere minus, eo quòd fit ex ſibi longitudine incommenſurabili, quæ ſola eſt priorum trium à tribus poſterioribus diſcrepantia, ſingularum à ſingulis.

Supponendum tribus poſtremis.

Si autem maius nomen plus poſsit minore, eò quòd fit à ſibi longitudine incommenſurabili.

Diffinitio quarta, hoc ſuppoſito.

Si maius nomen propoſitæ Certæ fuerit longitudine commenſurabile, tota vocatur Ex binis nominibus quarta.

Diffinitio quinta.

Si minus nomen propoſitę Certę fuerit longitudine commenſurabile, ea vocetur Ex binis nominibus quinta.

Diffinitio ſexta.

Si neutrum nomen expoſitæ Certę longitudine fuerit commeoſurabile, ea vocetur Ex binis nominibus ſexta.

Hec ordine binomiorum differentias à maioris, vel minoris, aut equidem neutri nominis commenſuratione, vel incommenſuratione, ad expoſitam cõſtituit Euclides, cùm duo nomina eidem longitudine commenſurabilia eſſe poſſe non fateatur. Nam ſi eidem commenſurarentur, & adinuicem commenſurarentur, per decimam huius, quod obſtaret 36 huius, quæ eas incommenſurabiles longitudine eſſe præcipit. Addit inſuper alterum Græcorum exemplar, Euclidem ideo tres priores ſub commenſurabili poſitas, tribus poſtremis ſub incõmenſurabili deſcriptas, præfeciſſe, quòd præſtantius ſit commenſurabile incommenſurabili. Trium verò ſingulorum ordinum priores, ſequentibus hac de cauſa præmiſiſſe, quòd præſtãtius ſit maius nomẽ minore, indignius verò vtroque neutrũ. Nos autem arbitrati ſumus alia cauſa, hoc ordine binomia digeßiſſe Euclidem, vt ſcilicet cœptũ iam antea ordinem ſequatur, quo quidem ſub Certa & ſingulis hoc ordine binomiis, areas ſex præfatarũ incertarum ſuo ordine ſeruato comprehenderet, vt patebit 54 & 5 eam ſequentibus ſequi ordinem 36 & 5 eam ſequentium. Ac inſuper, vt eidem ordini futuras apothomarum generationes, ac alia-

rum incertarum subiiceret, & eodem ordine apothomes diffiniret. Quare potius ut methodi conseruaret se[illegible] hoc ordine binamia disposuisse Euclidem censendum erit, quam ut tantùm præstantius indigniori præficeret: is nanque geometriam, non autem politicam edocet.

Propositio quadragesimaoctaua. *Problema 13*

Inuenire Ex binis nominibus primam.

Sumatur (ex corollario primi lemmatis 28 huius) numerus quadratus A B, *excedens quadratum* G B *non quadrato* A G. *Sit item proposita Certa* D, *cui longitudine commensurabilis esto* E Z, *fiat autem (per corollarium sextæ huius) sicut* A B *ad* A G *numeri, sic quod ex* E Z *ad quod ex* Z I. *Cùm autem* A B *sit quadratus,* A G *verò non, quod ex* E Z *ad quadratum ex* Z I *rationem ipsorum* A B *ad* A G *habentes, non habent rationem quam quadrati numeri, per corollarium vigesimæquintæ octaui. Incõmensurabiles itaque longitudine erunt, ipsæ* E Z Z I, *per nonam huius, potentia vero commensurabiles, per sextam huius, Certa autem est* E Z, *ipsi nanque propositæ* D *ex hypothesi commensurabilis. Certa igitur erit & Z I, bina igitur* E Z Z I *Certæ sint potentia tantùm inter se commensurabiles. Tota itaque* E I *Ex binis est nominibus, per 36 huius. Rursus quia maior est* E Z *ipsa* Z I *per 14 quinti, cùm earum potentia habeant rationem totius* A B *ad ablatum* A G, *inueniatur per 15 huius, quo plus potest maior minore, sitq; quod ex* T. *Cùm autem quod ex* E Z *excedat quadratum* Z I *quadrato ipsius* T. *Est autem* A B *ad* A G *vt quod ex* E Z *ad quadratum* Z I: *erit conuersione rationis sicut* A B *ad* B G *excessum, sic quod ex* E Z *ad quod ex* T *excessum quo antecedens ex* E Z *excedit suum consequens ex* Z I, *per corollarium decimanonæ quinti, sed* A B *ad* B G *(ex hypothesi) rationem habet quadratorum numerorum. Igitur* E Z *ad* T *excessum rationem habebit quadratorum numerorum, & ideo ipsæ* E Z *ad* T *erũt longitudine commensurabiles, per nonam huius. Atqui quadratum* E Z *excedit quod ex* Z I *minore, eò quòd ex* T. *Maius igitur nomen* E Z, *plus potest minore* Z I, *eò quod ex* T *sibi longitudine commensurabili. estque maius nomen* E Z *propositæ* D *longitudine commensurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus primam, per primam diffinitionem binomiorum.*

Propositio quadragesimanona. *Problema 14.*

Inuenire Ex binis nominibus secundam.

Eadem cum præcedentis hypothesis sumpta, scilicet sit (per corollarium primi lemmat. 28 huius) A B *numerus quadratus, excedens quadratum* G B *non quadrato* A G *aut equidem* A B G B *non quadrati similes plani, sese excedentes quadrato* A G *(vtraque enim hypothesis idem profert) proponatur item Certa* D, *cui commensurabilis existat longitudine* Z I, *quæ certa igitur erit. Sicut autem numerus* A G *ad* A B, *sic (per corollarium sextæ huius) fiat quod ex* Z I, *ad quod ex* Z E, *Certa igitur erit* Z E *& longitudine ipsi* Z I *incommensurabilis, per vltimam partem nonæ huius, cùm habeant* Z I *&* Z E *rationem non quam quadrati, per corollarium 25 octaui. Nam vnus ipsorum* A B *vel* A G *quadratus est, reliquus verò non, ex hypothesi, potentia tantùm itaque commensurabiles sunt inter se* Z I *&* Z E *rectæ. Tota igitur* E I *Ex binis est nominibus, per 36 huius Dico quod & secunda, cùm sit vt* A G *ad* A B, *sic* I Z *ad* Z E. *Excedit autem* A B *ipsum* A G *numero* G B, *igitur* E Z *excedet potentia rectam* Z I *aliquo, quod sit (per 15 huius) id quod ex* T. *Erit igitur conuersione rationis (per corollarium 19 quinti) sicut* A B *antecedens ad excessum* G B *quo* A B *excedit* A G *consequens, sic (potentia)* E Z *antecedens ad excessum* T, *quo* E Z *excedit (potentia) ipsum* Z I *cõsequens, sed* A B *ad* G B *rationem habent quam quadrati, per 26 octaui, cùm sint (ex hypothesi) similes plani. Quod igitur ex* E Z *ad id quod ex* T, *rationem habent quã quadrati & proinde (per nonam huius) latera scilicet rectæ* E Z *&* T *habent longitudine commensurabiles. Maius itaque nomen* E Z *plus potest minore* Z I *ipso quod ex* T *sibi longitudine commensurabili. Est autem minus nomen* Z I *longitudine propositæ* D *commensurabile, ex hypothesi. Inuenimus itaque* E I *Ex binis nominibus secundam, per secundam diffinitionem binomiorum.*

Propos.

Propositio quinquagesima. *Problema 15.*

Inuenire Ex binis nominibus tertiam.

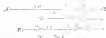
Sumpta praecedentiũ hypothesi, sumatur (per coroll. primi lẽmatis 28 huius) numerus A B *quadratus, excedens* B G *quadratum non quadrato* A G. *Sumatur item alius non quadratus, vnitate vel binario ab ipso* A G *distans, qui sit* D. *Exponatur item Certa* E, *cuius quadratum sit ad quadratum* Z I *sicut* D *numerus ad* A B, *per coroll. sextae huius, & sicut* A B *ad* A G *sic fiat (per idem coroll.) quod ex* Z I *ad quod ex* I T, *quoniam quadratum* E *certae ad quadratum* Z I *habet numerorum* D *ad* A B *rationem, certa erit* Z I, *quia verò quadratum* Z I *ad quadratum* I T *est vt* A B *ad* A G *numeri, certa item erit* I T. *Cũ autem* A B *sit quadratus,* A G *verò non, ipsae* Z I I T *longitudine incommensurabiles erunt, per 9 huius. Certa itaque* Z I I T *potentia tantum commensurabiles erunt, & proinde tota* Z T *Ex binis erit nominibus, per 36 huius. Dico quod & tertia, cùm sit quod ex* Z I *ad quadratum* I T, *vt* A B *ad* A G, *maior erit* Z I *ipsa* I T, *cùm maior sit* A B *ipso* A G *numero, quod igitur ex* Z I *plus possit eò quòd ex* I T, *quadrato rectae* K, *per decimamquintam huius. Erit igitur sicut antecedens* A B *ad excessum* G B *quo excedit suum consequens* A G, *sic per coroll. 19 quinti) conuersione rationis, quadratum* Z I *ad quadratum ipsius* K, *quo quod ex* Z I *excedit suum consequens quod ex* I T, *sed* A B *ad* B G *rationem habent quam quadrati, ex hypothesi quod igitur ex* Z I *ad id quod ex* K *(eandem rationem habens) efficit latera* Z I *&* K *longitudine commensurabilia, per nonam huius. Maius itaque nomen* Z I *plus potest minore* I T *eò quòd fit ex* K *sibi longitudine commensurabili. Praeterea cum sit vt* D *ad* A B *sic quadratũ* E *ad quod ex* Z I, *vtque* A B *ad* A G, *sic* Z I *ad* I T *quadrata, erit aequa ratione, vt* D *ad* A G *sic quod ex* E *ad quod ex* I T, *per 22 quinti. Cùm insuper* D *numerus sit (ex hypothesi) non quadratus, is ad ipsum* A B *quadratum non habet rationem quam quadrati, per coroll. 25 octaui. Quia verò idem* D *vnitate aut binario distat à numero* A G, *ipsi rationem superparticularem, aut superbipartientem habent, & proinde nec rationẽ quam quadrati habent, per coroll. 26 octaui. Sed* E *proposita certa posita fuit potentia ad ipsas* Z I *&* I T *in ratione numeri* D *ad numeros* A B A G, *Ipsius itaque* E *potentia ad potẽtias ipsarum* Z I I T *singularum, rationẽ non habet quã quadrati numeri. Ipsarum igitur* Z I *&* I T *neutra est proposita* E *certae longitudine commensurabilis, per nonam huius, fuerunt autem* Z I I T *certa potentia tantum commensurabiles, quarum maior* Z I *plus potuit minore* I T, *eò quòd ex sibi longitudine commẽsurabili. Inuenimus igitur Ex binis nominibus tertiam, per tertiam diffinitionem binomiorum.*

MONITVM.

Quoniam huius hypothesim voluit fulcire Campanus per primum numerum, quem proponit, vt is ad alium quemuis rationem quam quadrati non habeat, concludere volens quod si is primus ad aliquem rationem haberet, quam quadrati numeri, inter eos medius caderet, per 18 octaui, eò quòd similes essent plani, ex coroll. 27 octaui, quod existimat absurdum, cũ primus numerus planus nõ sit. Proponit itaque numerum primum B *& quadratum* C *diuisibilem in quadratum* D *& non quadratum* E *& infert, cùm* B *sit primus, non habet ad numerum* E *rationẽ, quam quadrati, quod ex hac figura falsum patet. Cùm itaque eius demonstrationis hypothesis fuerit insufficiens. Theonis verò hypothesis non probata, aliam cogimur afferre hypothesim, qua idem consequamur demonstratum. Si verò primus numerus planus sit, huius solutionem (post septimi principia monito ad finem circa) deduximus.*

Propositio quinquagesima prima. *Problema 16.*

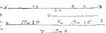
Inuenire Ex binis nominibus quartam.



Sumatur numerus quadratus A B, *qui secetur in duos non quadratos* A G G B. *Exponatur autem certa* D, *cui longitudine commensurabilis existat* E Z, *fiat vero (per coroll. sextæ huius) vt* A B *ad* A G *sic quod ex* E Z *ad quadratum* Z I. *Commensurabiles igitur potentia erunt* E Z Z I *rectæ, per sextam huius, & potentia tantum, habent enim rationem nō quam quadrati* A B A G, *per coroll. 25 octaui, latera itaque* E Z Z I *longitudine incommensurabilia erunt, per nonam huius, ipsa quidem* E Z *(propositæ* D *certæ commensurabilis) certa erit, & proinde* Z I *ipsi* E Z *commensurabilis certa erit, per sextam diffinitionem huius. Certæ igitur potentia tantùm commensurabiles erunt* E Z Z I, *& exinde tota* E I *ex binis nominibus erit. Dico quod & quarta, cum maior sit* A B *ipso* A G, *est autem vt* A B *ad* A G, *sic quod ex* E Z *ad quod ex* Z I, *maior erit* E Z *ipsa* Z I, *per 14 quinti. Plus itaque possit* E Z *ipsa* Z I *quadrato, quod ex* T, *per 15 huius, erit sicut antecedens* A B *ad consequens* A G, *sic antecedens ex* E Z *ad consequens ex* Z I. *Conuersione igitur rationis erit* A B *antecedens ad* G B *excessum, quo excedit consequens* A G, *sicut potentia* E Z *ad* T *excessum, quo excedit suum consequens* Z I, *per coroll. 19 quinti. Sed* A B *ad* G B *non habent rationem quadratorum, cum alter tantum sit quadratus, per coroll. 25 octaui. Nec proinde* E Z *ad* T *rationem potentiæ quam quadrati habebunt, longitudine igitur sunt incommensurabiles ipsæ* E Z *&* T, *per nonam huius. Plus igitur potest maior* E Z *minore* Z I, *eò quod ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Atqui maius nomen* E Z *fuit propositæ certæ* D *longitudine incommensurabile. Inuenimus igitur ex binis nominibus quartam, per quartam diffinitionem binomiorum.*

Propositio quinquagesimasecunda. *Problema 17.*

Inuenire Ex binis nominibus quintam.



Sumpta eadem prioris hypothesi numerorum, scilicet vt totus A B *numerus ad neutrum ipsorum* A G G B *rationem habeat quam quadrati, Sint duo quadrati* A G *&* G B *non quadratum* A B *componentes, per secundum lemma vigesimæ octauæ huius, hac tribus postremis sufficit hypothesis, veluti eadem alia tribus prioribus conueniebat. Sit ideo proposita certa* D, *cui longitudine commensurabilis, fiat* Z I. *Sicut verò* A G *ad* A B *sic sit (per coroll. sextæ huius) quadratum* Z I *ad quod ex* E Z. *Potentia igitur tantùm commensurabiles erunt* E Z Z I, *rationem quidem habentes quam numerus quadratus* A G *ad non quadratum* A B, *per coroll. vigesimæquintæ octaui. Et certæ, cùm* Z I *sit longitudine ipsi* D *propositæ commensurabilis, per sextam diffinitionem huius, &* E Z *potentia ipsi* Z I. *Tota igitur* E I *ex binis est nominibus, per 36 huius: Dico quod & quinta. Cum enim sit* A G, *ad* A B, *vt quadratum* Z I *ad quod ex* E Z, *erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti)* A B *ad* A G, *vt quod ex* E Z *ad quod ex* Z I, *Maior autem est* A B *ipsa* A G. *Maius itaque erit quod ex* E Z *eò quòd ex* Z I, *per 14 quinti. Esto maius quod ex* E Z *eò quòd ex* Z I *quadrato ex* T, *per 15 huius. Cùm sit* A B *antecedens ad* B G *consequens, vt quod ex* E Z *ad quod ex* Z I. *Erit conuersione rationis (per coroll. 19. quinti)* A B *ad* G B *excessum, quo* A B *excedit suum consequens* A G, *sicut quod ex* E Z *antecedens ad quod ex* T *excessum, quo quadratum* E Z *excedit suum consequens quod ex* Z I. *Sed* A B *non quadratus ad* G B *quadratum habet non quam quadrati rationem, per coroll. 25 octaui. Quod itaque ex* E Z *ad quod ex* T, *non habet rationem quam quadrati. Ipsæ igitur* E Z *&* T *sunt (per nonam huius) longitudine incommensurabiles. Maius ideo nomen* E Z *plus potest minore* Z I *eò quod fit ex* T *sibi longitudine incommensurabili. Atqui minus* Z I *est propositæ* D *(ex hypothesi) longitudine commensurabile. Inuenimus igitur Ex binis nominibus quintam, per quintam diffinitionem binomiorum.*

Propositio quinquagesimatertia. *Problema 18.*

Inuenire Ex binis nominibus sextam.

Sit

A —— B
D ——
E Bo 12
Z Bo 16 I Bo 10 T K Bo 6

Sit iuxta duarum proximarum hypothesim, numerus A B *quadratus, qui diuidatur in duos* A G G B *non quadratos. Sit præterea numerus* D *non quadratus, vnitate vel binario distans ab ipso* A G, *non quadrato. Proponatur insuper* E *certa, cuius quadratum sit ad quadratum ex* Z I, *sicut* D *ad* A B, *per coroll. sextæ huius. Esto præterea sicut* A B *maior ad* A G *minorem, sic quod ex* Z I *ad quadratum* I T. *Maius igitur erit quod ex* Z I *ipso ex* I T, *per 14 quinti. Sit ideo maius, eo quòd ex* K, *per decimamquintam huius. Quoniam (ex hypothesi)* Z I *habet ad certam* E *potentia rationem numerorum, commensurabiles erunt (per 6 huius) ipsa* Z I *&* E, *& ideo (per sextam diffinitionem huius) certa erit* Z I, *ipsi* E *potentia commensurabilis. Similiter certa erit* I T, *ipsi* Z I *potentia commensurabilis. Cùm autem rectæ* Z I I T *sint in ratione quadrati* A B *ad non quadratum* A G *potentia. Potentia igitur tantùm commensurabiles certæ erunt, per nonam huius. Tota ideo* Z T *ex binis erit nominibus, per 36 huius Dico quod & sexta. Quoniam fuit vt* A B *maior ad* A G *minorem, sic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *Erit conuersione rationis (ex coroll. 19 quinti) sicut antecedens* A B *ad excessum* G B, *quo excedit suum consequens* A G, *sic quod ex* Z I *ad quadratum ipsius* K, *quo excedit suum consequens quod ex* I T. *Sed* A B *ad* G B *non habet rationem quam quadrati, per coroll. vigesimaquintæ octaui. Nec igitur quadratum* Z I *ad quadratum* K *rationem habebit quam quadrati. Rectæ igitur* Z I *&* K *longitudine incommensurabiles erunt, per nonam huius. Maius itaque nomen* Z I *plus potest minore* I T *eò quòd ex* K *sibi longitudine incommensurabili. Et neutrum ipsorum* Z I I T *longitudine est ipsi* E *propositæ commensurabile. Nam sicut fuit* D *non quadratus ad* A B *quadratum, sic quod ex* E *certa ad quod ex* Z I. *Sicut insuper* A B *quadratus ad* A G *non quadratum, sic quod ex* Z I *ad quod ex* I T. *Æqua igitur ratione erit (per vigesimamsecundam quinti) sicut* D *ad* A G, *sic quod ex* E *ad quod ex* I T. *Sed* D *ad* A B *non habet rationem quam quadrati numeri, per coroll. vigesimaquintæ octaui, nec igitur quadrata ex* E *&* Z I *rationem habent quadratorum. Præterea* D *ad* A G *(sibi vnitate vel binario proximum) non habet rationem quadratorum, per coroll. 26 octaui, cùm sint in superparticulari vel superb. partiente ratione. Igitur nec quadratum* E *ad quadratum* I T *rationem habebit quam quadrati numeri. Ipsorum itaque* Z I *&* I T *nominum neutrum est propositæ* E *certæ longitudine commensurabile, per nonam huius. Inuenimus igitur ex binis nominibus sextam, per sextam diffinitionem binomiorum.*

Corollarium.

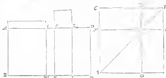
Hinc fit, datam rectam in nomina cuiuslibet sex prædictarum ex binis nominibus rectarum secare. *Nam si proponatur datā rectam secari in binomij primi nomina, inueniemus (ex quadragesimaoctaua huius) ex binis nominibus primam, cui (sic secta) datam rectam (per decimam sexti) similiter secabimus, haud secus in reliquis quinque sequentibus.*

MONITVM.

Apposuit Theon lemma huic theoremati, quod à vigesimaquinta huius facilè produci potuit corollarij denominatione: nos itaque illud breuissimum ex vigesimaquinta huius assumptum, huic subijcere cogemur.

Propositio quinquagesimaquarta.

Si areola comprehendatur sub Certa ac Ex binis nominibus prima, quæ areolam potest incerta est, Ex binis nominibus vocata.



Comprehendatur areola A B G D *sub certa* A B *& ea quæ ex binis nominibus prima* A D *Dico eam rectã quæ aream* A G *potest, esse ex binis nominibus. Cũ* A D *quæ ex binis nominibus, ad vnum tantum signum secetur in nomina, sit illud signum* E, *per 42 huius secetur item minus nomen* E D *bifariã in* Z. *Quadrato autem ex* E Z *æquum applicetur ad maius nomen* A E, *deficiẽs specie quadrata, per vigesimamoctauam sexti. Sitq́; quod sub* A I I E, *per coroll. eiusdem. Cum autem* A D *sit ex binis nominibus prima, maior* A E *plus potest minore* E D *eo quòd sit à sibi longitudine commensurabili, & maius nomen* A E *est propositæ certæ* A B *longitudine commensurabile, per primam diffinitionem binomiorum. quia verò maior* A E *plus potest minore* E D *eo quod a sibi longitudine commensurabili. Quartæ autẽ parti eius quod ex minore* E D *æquum (hoc est quadrato ex* E Z*) ad maiorem* A E *applicatur, deficiens specie quadrata, quod scilicet sub* A I I E, *recta igitur* A E *secatur in commensurabiles longitudine in signo* I, *per secundam partem 17 huius, scilicet in rectas* A I *&* I E. *Ducantur per signa* I E Z *ipsis* A B *&* D G *parallelæ* I T E K Z L, *ipsi autem* A T *æquum quadratum fiat* M N O S, *per 14 secundi, ipsi verò* I K *æquum (per eandem) sit* R N X P *circa eandem dimetientem* S N P *positum, per 18 sexti. Cõpleatúrque parallelogrammum* S P, *quod quidem* S P *quadratum erit, per 24 sexti. Cùm autem quod sub* A I I E *æquum sit (per constructionem) ei quod ex* E Z, *tres rectæ* A I E Z I E *proportionales erunt, per 17 sexti. Tria igitur* A T E L I K *rectangula (per primam sexti) proportionalia erunt. quia verò medium proportionale est* E L *inter* A T *&* I K, *mediũ erit idem* E L *inter* M O *&* R X, *ipsis* A T I K *æqualia posita, per secundam partem septimæ quinti, atqui inter* M O *&* R X *mediũ est similiter quod sub* O N N X, *scilicet* O X, *per coroll. 25 huius Quadratum igitur* M O *ad* E L *eandem habet quam ad* O X *rationem, nempe dimidiam quam ad tertium* R X, *per decimam diffinitionem quinti, ipsa igitur* E L *&* O X *sunt æqualia, per nonam quinti. Cum insuper dupla sit* E D *ipsius* E Z, *duplum erit* E G *ipsius* E L *per primam sexti. Quia verò supplementa* O X M R *sunt æqualia, per 43 primi, duplum igitur erit conflatum ex binis* O X M R *ipsius* O X, *& proinde æqualium* O X E L *dupla, scilicet bina* M R O X, *ipsi* E G *æqualia erunt. Totum igitur* S P *toti* A G *æquum erit, cùm* A K *quadratis* M O R X *æquum fuerit. Cæterùm quoniam* A E *longitudine fuit certa* A B *commensurabilis, certum erit* A K, *per 19 huius, & igitur certum erit conflatum ex quadratis* M O R X *ipsi certo æqualibus. quia vero commensurabiles fuerunt longitudine* A I I E *rectæ, commensurabilia erunt adinuicem* A T I K, *per primam sexti, & toti* A K *per vndecimam huius. Commensurabilia igitur erunt* M O R X *quadrata, toti ex eis conflato, & adinuicem, & igitur certa, cum conflatum certum fuerit, per nonam diffinitionem huius. Certæ igitur fuat* O N N R *rectæ, ipsa certa quadrata potentes, per octauam diffinitionem huius, quoniam autem incommensurabiles sunt lõgitudine* A E E D *rectæ, nomina quidem binomij, incommensurabilia erunt* A K E G *rectangula, per primam sexti, quia verò bina* E G E L *sunt cõmensurabilia, nempe vt duplum dimidij. Alterum autem eorum* E G *alicui* A K *est incommensurabile, & reliquum* E L *eidem* A K *incommensurabile erit, per coroll. secundum decimæ huius. Similiter quia binorum* A T A K *commensurabilium, alterum* A K *alicui* E L *est incommensurabile, & reliquum* A T *eidem* E L *incommensurabile erit, per idem coroll. & proinde* M O *&* M R *(vel* O X*) ipsis* A T E L *æqualia, incommensurabilia erunt. Et ideo (per primam sexti) rectæ* O N N R *longitudine incommensurabiles erunt· quæ certæ potentia commensurabiles ostensæ sunt. Tota igitur* O R *vel* M X *ex binis nominibus erit, per 36 huius, quæ quidem potest rectangulum* A G *sub certa & binomio comprehensum, cùm posit quadratum* S P *eidem* A G *æquale ostensum. Si igitur areola comprehendatur sub certa ac Ex binis nominibus prima, &c.*

Propositio quinquagesimaquinta.

Si areola comprehendatur sub Certa, & Ex binis nominibus secũda quę areolam potest incerta est, vocatúrque Ex binis mediis prima.

Comp

Comprehendatur area ſub certa A B *& ex binis nominibus ſecunda* A D, *quæ ſit* A B G D: *Dico rectam potentem aream* A B G D *eſſe ex binis medijs primam, quoniam præcedēti demõſtratione ſatis prolixè docuimus· harum figurarum conſtructionem ne tędioſa vteremur hac & ſequentibus repetitione, vna tantùm differentia ſuppoſita, ſcilicet rectam* A D *binomium ſecundum, quod antea primum fuit, efficiemus, ſequenti verò tertium, & ſic deinceps manente eadem figuræ conſtructione: quoniam* A D *ex binis nominibus eſt ſecunda ſecta in* E, *minus nomen* E D, *longitudine eſt certæ* A B *commenſurabile,* A B *verò eidem* A B *longitudine incommenſurabile, per ſecundum corollarium decimæ huius. Certum igitur erit* E G, *per 19 huius. Et proinde* E L *eius dimidium certum, per nonam diffinitionem huius: medium verò erit* A K, *per 21 huius ſub* A E A B. *Præterea cùm* A E *plus poßit minore* E D, *eò quod ſit à ſibi longitudine commenſurabili, per ſecundam diffinitionem binomiorum, ſequetur (ex ſecunda parte 17 huius)* A E *ſecari in* I *per commenſurabilia* A I I E *longitudine, & ideo (per primam ſexti) commenſurabilia erunt* A T I K *rectangula media, & proinde* A T *incommenſurabile erit ipſi* E L *certo, quoniam commenſurabilia ſunt & media* A T I K, *media erunt* M O R X *quadrata eis æqualia & commenſurabilia. Media igitur erunt* M N N X *illa potentes, & potētia commenſurabiles· quia item certum eſt* E L, *certum erit* O X, *ſibi æquum, & igitur incommenſurabile ipſi* M O *medio. Quare (per primam ſexti)* M N N X *(eandem rationem ipſis* M O O X *habentes) incommenſurabiles erunt longitudine, ſed ſunt potentia commenſurabiles. Binæ igitur* M N N X *mediæ ſunt potentia tantùm commenſurabiles, & certum comprehendentes, comprehendunt enim* O X *certum, cùm ipſi* M N *æquale ſit* N O *aliud quadrati latus. Tota igitur* M X *ex binis medijs prima erit, per 37 huius, quæquidem poteſt rectangulum* A G *ſub certa* A B *& ex binis nominibus ſecunda* A D *comprehenſum, cùm poßit quadratum* S P *ſibi æquum: aream igitur* A B G D *potens, eſt ex binis medijs prima. Si itaque areola comprehendatur ſub certa, & ex binis nominibus ſecunda, &c.*

Propoſitio quinquageſimaſexta.

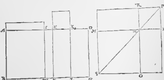
Si areola comprehedatur ſub Certa, & Ex binis nominibus tertia, quæ areolam poteſt incerta eſt, appellatur Ex binis medijs ſecunda.

Comprehendatur area A B G D *ſub certa* A B *& ex binis nominibus tertia* A D: *Dico aream* A B G D *potentē, vocari ex binis medijs ſecundam, ſuppoſita præcedentiũ conſtructione, quoniã* A D *ex binis medijs tertia eſt, neutrum eius nomen* A E E D *erit longitudine ipſi propoſitæ* A B *commenſurabile, per tertiã diffinitionem binomiorum, & tamen ſunt certæ* A E E D, *nomina. Quæ igitur ſub ipſis rectãgula* A K E G *media ſunt (per 21 huius) & incommenſurabilia, per primam ſexti, cùm* A E E D *ſint longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia tertium binomium eſt* A D *maius nomē* A E *plus poteſt minore, eò quòd ſit à ſibi longitudine commenſurabili. Secabitur itaque (per ſecundam partem 17 huius)* A E *per* I *in* A I I E *longitudine commenſurabiles. Quare* A T *ipſi* I K *(per primam ſexti) commenſurabile erit: & proinde* M O *ipſi* R X *commenſurabile, & vtrumque medium, per corollarium 23 huius, cùm ſint commenſurabilia toti conflato ex quaratis* M O R X *ipſi* A K *æqualibus, per vndecimam huius. Mediæ ita-*

que potentia commensurabiles erunt, MN NX. Cùm autem binæ EL EG sint commensurabilia, dimi dium nempe toti, alterum autem ipsorum EG alicui AK sit incommensurabile, & reliquum EL eidem AK incommensurabile erit, per coroll secundum decimæ huius. Similiter duorum AK AT reliquum AT ipsi EL esse incommensurabile, & proinde MO OX ipsis AT EL æqualia, incommensurabilia pa tebunt. rectæ itaque MN NX (per primum sexti) longitudine incommensurabiles existent. Me dæ igitur potentia tantùm commensurabiles erunt MN NX quæ quidem medium comprehendunt, quod sub ON NX æquũ ipsi EL medio, cum MN sit æqualis ipsi ON reliquo lateri quadrati. Tota igitur MX ex binis mediis secunda erit, per 38 huius. Quæ cùm possit quadratum SP, æquum ipsi rectan gulo ABGD, ipsa MX (ex binis mediis secunda) poterit ipsum rectangulum ABGD sub certa AB & ea quæ ex binis nominibus tertia AD comprehensum. Si itaque areola sub certa, & ex binis nomini bus tertia comprehendatur, quæ areolam, &c.

Propositio quinquagesimaseptima.

Si areola comprehendatur sub Certa, ac Ex binis nominibus quarta, quę areolam potest, incerta est, vocatúrque Maior.



Comprehendatur areola ABGD sub certa AB & ea quæ ex binis nominibus quarta AD Dico aream ABGD potentem, esse eam quæ dicitur Maior. Supposita nanque priorum figurarum constructione, quoniam ex binis nominibus quarta est AD secta in E, maius eius nomen AE plus potest minore ED, eò quod à sibi longitudine incommensurabili, per 4 binomiorum diffinitionem, & ideo quartæ parti eius quod à minore ED æquum ipsi AE comparatum, secat ipsam AE in I per incommensurabilia longitudine, per secundã partem 18 huius. Incommensurabilia igitur erunt AT & IK (per primam sexti) adinuicem, & to tis AK, per 12 huius. Rursus quia AD est ex binis nominibus quarta, maius nomen AE ipsi propositæ certæ AB longitudine commensurabile erit, per eandem 4 diffinitionem, sub AB & AE igitur com prehensum AK certum est, per 19 huius. Diuisum quidem in AT IK incommensurabilia, igitur qua drata MO RX (ipsis AT IK æqualia) incommensurabilia erunt. Recta itaque MN NX potentia in commensurabiles erunt, efficientes conflatum ex quadratis earum MO RX certum, cùm sit æquũ ipsi AK certo. Cæterùm quia binarum longitudine commensurabilium AE AB, altera AE alicui ED est longitudine incommensurabilis, sunt enim nomina binomij, & reliqua AB eidem ED longitudine in commensurabilis erit, per corollarium secundum decimæ huius. quæ quidem cùm certæ sint, potentia igitur tantùm sunt commensurabiles, sub ipsis igitur comprehensum EG medium est, per 21 huius, & EL (ipsi EG commensurabile) medium, per coroll. 23 huius, nempe totius EG dimidium. & ideo medium erit OX, æquale ipsi EL positum, & sub ipsis MN NX (hoc est NO NX) comprehensum sed ipsi OX æquum est MR, per 43 primi, totum igitur conflatum ex MR OX (bis scilicet sub ipsis MN NX) medium est, per idem coroll. 23 huius. Tota itaque MX ex binis MN NX potentia incommensu rabilibus composita, efficientibus conflatum ex earum quadratis MO RX certum, quod autem bis sub ipsis OX MR medium, dicetur maior, per 39 huius, quæ quidem cùm possit quadratum SP, æquum rectangulo ABGD, ex hypothesi, ea poterit idem rectangulum ABGD, sub certa AB & ex binis no minibus quarta AD, comprehensum. Si itaque areola comprehendatur sub certa, &c.

Propositio quinquagesimaoctaua.

Si areola comprehendatur sub Certa ac Ex binis nominibus quinta, quę areolam potest, incerta est, vocata Certum mediúmque potens.

Esto

Esto areola ABGD *comprehensa sub certa* AB *ac ex binis nominibus quinta* AD: *Dico rectam quæ aream* ABGD *potest incertã esse, quæ dicitur certum mediúmque potens. Repetamus priorum cõstructionem, quoniam ex binis nominibus quinta est* AD *secta in* E, *minus eius nomen* ED *proposita certæ* AB *est longitudine commensurabile, per quintam binomiorum diffinitionem, sub certa* AB *& eadem* ED *igitur comprehensum,* EG *certum est, ex 19 huius, quare eius dimidium* EL *certum erit, & proinde certa erunt* OX MR, *ipsis* EL ZO *æqualia. Cum autem binarum* AE ED *commensurabilium, altera* ED *sit alicui* AE *longitudine incommensurabilis, & reliqua* AE *eidem* AB *longitudine erit incommensurabilis, per secũdum coroll. decimæ huius. Quod igitur sub ipsis* AK *medium est, cùm sint ideo certa potentia tantùm commensurabiles, per 21 huius cùm autem* AD *sit quinta, maius nomen* A *plus potest minore, eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per quintam diffi. binomiorum, quartæ igitur parti eius quod à minore* ED *æquum, ad ipsam* AE *protectum eam secabit in* I *per incommensurabiles* AI IE *longitudine, per secundam partem 18 huius & ideo* AT IK *incommensurabilia erunt, per primam sexti, totum* AK *medium componentia. Et proinde* MO RX *quadrata (ipsis* AT IK *æqualia) incommensurabilia erunt, conflatum ex ipsis medium efficientia. Rectæ igitur* MN *&* NX *(ea incommensurabilia potentes) potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis* MO RX *medium quod autem bis sub ipsis (hoc est* OX MR*) ostensum est certum. tota itaque* MX *incerta est, vocata certum mediúmque potens, per 40 huius, quæ quidem potest quadratum* SP *rectangulo* AG *ex hypothesi, æquũ ea igitur* MX *quæ aream* ABGD *(sub certa* AB *& ex binis nominibus quinta* AD *comprehensam) potest, vocatur certum mediumq; potens. Si itaque areola comprehendatur sub certa, & ex binis nominibus quinta, &c.*

Propositio quinquagesimanona.

Si areola comprehendatur, sub Certa & Ex binis nominibus sexta, quæ areolam potest, incerta est, quæ dicitur Bina media potens.

Sub certa proposita AB *& ea quæ ex binis nominibus sexta* AD, *comprehẽdatur areola* ABGD: *Dico rectam potentem areã* ABGD *incertam esse, quæ dicitur bina media potens, sumpta nanque priorũ constructione, quoniam* AD *ex binis nominibus est sexta, neutra binarum certarum* AE ED *ipsi propositæ* AB *est commensurabilis, per sextam diffinitionem binomiorum, quare vtrunque* AK EG *medium erit, per 21 huius: quia verò incommensurabiles sunt longitudine* AE ED, *binomij nomina, incommensurabilia erũt media illa* AK EG *adinuicem, per primam sexti, & proinde ipsis* AK EG *æqualia (scilicet* MO RX *quadrata, &* OX MR *rectangula) media erunt, & conflatum ex quadratis, rectangulis simul sumptis incommensurabile erit, per 13 huius. Rursus cum* AD *sit sexta, maius eius nomen* AE *plus potest minore* ED, *eo quod à sibi longitudine incommensurabili, per eãdem sextam diffi. binomiorum. Quarta igitur parti eius quod à minore* ED *æquum (hoc est ipsi ex* EZ*) ad maiorem* AE *comparatum, deficiens specie quadra-*

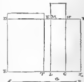
ta, ipsam A E *secabit per incommensurabiles longitudine* A I I E, *per secūdam partem 18 huius, quare incommensurabilia erunt (per primam sexti)* A T I K, *æqualia quidem quadratis* M O R X *& idcirco ipsa* M O R X *quadrata incommensurabilia erunt. Rectæ itaque* M N N X *(eorum latera) potentia incommensurabiles erunt, efficientes quidem conflatum ex earum quadratis* M O R X *medium, quod autem bis sub ipsis rectangulum* O X *&* M R *medium, & incommensurabile insuper ipsi composito ex quadratis, vt ostensum est. Tota ideo* M X *recta bina media potens dicitur, per 41 huius, quæ cum possit quadratum* S P *æquum rectangulo* A G *ea* M X *poterit idem rectangulum,* A B G D *sub certa* A B *& ea qua ex binis nominibus sexta* A D, *comprehensum. Si igitur areola comprehēdatur sub certa, & ex binis nominibus sexta, &c.*

MONITVM.

Reassumit hic Theon lemma non suo loco, scilicet quadrata inæqualium sectionum alicuius rectæ maiora esse rectangulo bis sub eis comprehenso. Nam eodem vsus est demonstrans 39 huius, quo loco satis supérque monuimus huius demonstrationem lemmatis, frustra igitur illud idem repeteremus, quod corollario septimo secundi diximus.

Propositio sexagesima.

Quod ex ea quę Ex binis nominibus ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus primam.



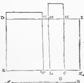
Esto recta ex binis nominibus A G B, *cuius maius nomen sit* A G, *minus verò* G B. *Exponatur autem certa* D E, *cui (per 45 primi) applicetur æquum quadrato ex* A B, *sitq́;* D E Z I *latitudinem efficiens* D I: *Dico* D I *esse ex binis nominibus primam. Constituatur rursus ad rectam* D E *æquum quadrato* A G, *sitq́;* D E T K. *Æquū verò quadrato* G B *quod sit* K T L M, *per eandem 45 primi. Reliquum igitur* M Z *ei quod bis sub* A G G B *æquum erit, per quartam secundi. Cùm totum ex* A B *æquetur toti* D Z, *& minus ipso* D L *erit* M Z, *cùm quadrata ex* A G G B *inæqualibus sint maiora rectangulo bis sub ipsis comprehenso, per coroll. septimæ secundi. Cum autem* A G G B *nomina sint certæ potentia commensurabiles, earum quadrata erunt certa, & commensurabilia. Quare* D T K L *rectangula (eis æqualia) certa erūt, & inuicem cōmensurabilia, & igitur (per primam sexti) rectæ* D K K M *longitudine commensurabiles. Cùm autem certum sit totum* D L, *ex certis* D T K L *compositum, & ad certam* D E *comparatum latitudinem* D M *certam longitudine ipsi* D E *certa commēsurabilem (per 20 huius) efficiet. Quia verò sub* A G G B *medium est, per 21 huius, ad quod bis sub ipsis medium erit, per coroll. 23 huius, & proinde* M Z *(ipsis æquum) medium erit, & ad certam* D E *comparatum, latitudinem* M I *certam potentia tantùm ipsi* D E *commensurabilem efficiet, per 22 huius. Quia verò binarium* D E D M *commensurabilium, altera* D E *alicui* M I *longitudine incommensurabilis est, vt modo patuit. Et reliqua igitur* D M *eidem* M I *incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius. Sed cum certæ sint* D M M I, *potentia tantum commensurabiles erunt. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit, per 36 huius. Secetur igitur* M I *bifariam, ducta* N C *parallela, ipsis* D E I Z, *duplum erit* M Z *ipsius* M C, *per primam sexti. Ipsi verò* M Z *æquum est duplum eius quod sub* A G G B. *Æquum igitur erit* M C *ei quod sub* A G G B. *Sed quod sub* A G G B *medium proportionale est, inter quæ ex* A G *&* G B *quadrata, per coroll. 25 huius. Igitur* M C *medium proportionale erit inter* D T K L *ipsis quadratis æqualia. Quare &* M N *media inter* D K *&* K M *proportionalis erit, per primam sexti. Quod itaque sub extremis* D K K M, *æquum est ei quod à media* M N, *per 17 sexti. Sunt igitur binæ rectæ* D M M I *inæquales. Quartæ autem parti eius quod à minore* M I *æquum (scilicet ei quod ex* M N*) ad maiorem* D M *comparatum, quod scilicet sub* D K K M, *defficiens specie quadrata, per coroll. 28 sexti, & ipsam* M N *maiorem per commensurabilia longitudine* D K K M *distribuit. Maior igitur* D M *plus potest minore* M I, *eò quòd à sibi longitudine commensurabili, per 17 huius, fuit autem maius nomen* D M *propositæ certæ* D E *longitudine commensurabile.*

rabile. Tota igitur D M I *eſt ex binis nominibus prima, per 1 binomiorum diffinitionem. Quod itaque ex ea quæ ex binis nominibus ad certam comparatum, &c.*

Propoſitio ſexageſimaprima.

Quod ex ea quæ Ex binis mediis prima, ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus ſecundam.

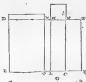
Eſto A B *ex binis mediis prima, diuiſa in* G, *cuius maius nomen ſit* A G. *Exponatur verò certa* D E, *cui (per 45 primi) applicetur æquum ei quod ex* A B, *quod ſit* D E Z I: *Dico* D I *latitudinem effectam, eſſe ex binis nominibus ſecũdam. Sit (vt præcedenti diximus) ipſis quadratis ex* A G & G B *æquum* D T & K L, *his verò quæ bis ſub ipſis, ſint æqualia* M C & N Z, *ſectæ* M I *biſariam in* N, *ſitq́; quod ex* M N *æquum ei quod ſub* D K K M, *quod ad* D M *proiectum deficiat, ſpecie quadrata, &c. Manifeſtum eſt (vt in præcedẽti)* D L *(æquũ quadratis ex* A G G B*) maius eſſe ipſo* M Z, *æquali eiſque bis ſub ipſis, per coroll. ſeptimæ ſecundi, & ideo* D M *ipſa* M I *maiorem eſſe, per primam ſexti. Cùm autem* A B *ſit ex binis mediis prima, quod ſub* A G G B *certũ eſt, per 37 huius, certum igitur erit* M Z *eius duplum. Quod quidem ad certam* D E *proiectum, latitudinem* M I *certam longitudine ipſi* D E *commenſurabilem efficit, per 20 huius. Quia verò duarum* A G G B *mediarum quadrata, ſunt commenſurabilia, &* D T K L *(ipſis æqualia) erunt commenſurabilia, & media. Et proinde totum* D L *vtrique commenſurabile, per vndecimam huius, medium erit, per coroll. 23 huius. Et ideo (per primam ſexti) rectæ* D K K M *longitudine commenſurabiles erũt, & cùm* D L *ſit medium, ad certam* D E *applicatum, latitudinem* D M *efficit certã, ſed longitudine incõmenſurabilem ipſi* D E: *quia verò* D E & M I *ſunt cõmẽſurabiles, &* D E *ipſi* D M *incõmenſurabilis eſt. Et reliqua* M I *eidem* D M *incommenſurabilis erit, per ſecundum coroll. 10 huius. Binæ itaque* D M M I *certæ, potentia tantùm commenſurabiles, totam* D I *ex binis nominibus, per 36 huius, efficiunt: Dico quod & ſecundam, cùm maior oſtenſa ſit* D M *ipſa* M I. *Ipſa verò* M I *(minus nomen) oſtenſa ſit propoſitæ certæ* D E *longitudine commenſurabilis, inſuper binarum rectarum inæqualium* D M M I, *æquum quartæ parti eius quod à minore* M I *(ſcilicet quadrato ex* M N*) ad maiorem applicatum ſit, quod ſub* D K K M, *deficiens ſpecie quadrata & per commenſurabilia longitudine ipſam* D M *(per* D K K M*) diuiſerit. Maior* D M *plus poterit minore* M I, *eò quòd ex ſibi longitudine commenſurabili, per 17 huius. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit ſecunda, per ſecundam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis mediis prima ad certam comparatum, &c.*



Propoſitio ſexageſimaſecunda.

Quod ex ea quæ Ex binis mediis ſecunda ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus tertiam.

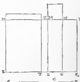
Sit ex binis mediis ſecunda A B *ſecta in* A G *maius &* G B *minus, nomina. Sit inſuper certa propoſita* D E, *cui (per 45 primi) comparetur æquum quadrato quod ex* A B *rectangulum* D E Z I, *latitudinem efficiens* D I: *Dico* D I *rectam eſſe, ex binis nominibus tertiam, conſtruantur (vt binis præcedentibus diximus)* D T & K L *æqualia quadratis ex* A G G B. *Inſuper* M C N Z *æquũ rectangulis quæ bis ſub* A G G B, *ſecta biſariam in* M N. *Proiecto inſuper ad ipſam* D M *rectangulo æquali, quadrato ex* M N, *quod ſit ſub* D K K M, *deficiente ſpecie quadrata, & reliquæ ex prius oſtenſis. quoniam* A B *eſt ex binis mediis ſecunda, ea fit ex binis* A G G B *mediis, & medium comprehẽdentibus, per 38 huius. Quare* D L *æquum quadratis mediis commenſurabilibus (ex* A G G B*) medium erit ac* M Z *æquũ ei medio quod bis ſub ipſis* A G G B, *mediũ erit quæ quidẽ media ad cer-*



tam D E *protecta, latitudines certas quidem* D M M I *efficiunt, sed longitudine ipsi* D E *incommensurabiles, per 22 huius. Cùm autem sit vt* A G *ad* G B, *sic quod ex* A G *ad quod sub* A G G B, *per lemma 21 huius quadratum igitur ex* A G *rectangulo sub* A G G B *incommensurabile erit, nam* A G G B *longitudine sunt incommēsurabiles mediæ, per 38 huius: & proinde* D T *ipsi* M C *incommensurabile erit cum sint incommensurabilibus æqualia & igitur (per primum corollarium decimæ huius) totum* D L *ipsi* M C, *necnō totum* M Z *ipsi* D L *incommensurabile erit. Quare (per primam sexti)* D M M I *certa rectæ longitudine incommensurabiles erunt, potentia igitur tantùm erunt ipsi* D M M I *commensurabiles, cùm sint certa. Tota igitur* D I *ex binis est nominibus, cuius quidem neutrum nomen* D M *vel* M I *propositæ* D E *commensurabile fuit. Cum autem* D T K L *sint æqualia quadratis* A G G B *commensurabilibus, ipsa* D T K L *commensurabilia erunt, & proinde (per primam sexti) rectæ* D K K M *longitudine cōmensurabiles erunt. Ad ipsam igitur* D M *maiorem quod sub* D K K M *protectum æquale quartæ partis eius quod à minore (hoc est quadrato ex* M N) *ipsam* D M *in longitudine commēsurabiles distribuit, deficiens specie quadrata, maior igitur* D M *plus potest minore* M I, *eò quòd à sibi lōgitudine commensurabili. Tota itaque* D I *ex binis nominibus erit tertia, per tertiam diffinitionē binomiorum. Quod igitur ex ea quæ ex binis medijs secunda, &c.*

Propositio sexagesimatertia.

Quod ex Maiore ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quartam.

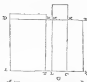


Esto maior A B, *cuius maius nomen sit* A G, *sit certa* D E, *quod ex* A B *vero ad* D E *certam applicatum, per 45 primi, latitudinē efficiat* D I, *& reliqua, vt proximis docuimus, cōstruantur. Dico rectam* D I *esse ex binis nominibus quartam. Cùm enim* A B *sit maior, conflatum ex quadratis* A B B G *certum erit, quod verò sub ipsis medium, per 39 huius, certū igitur erit* D L, *æquum quadratis, medium verò* M Z, *duplum eius, quod sub ipsis, per corollarium 23 huius: & idcirco certæ erunt,* D M *&* M I *recta, quarum* D M *proposita* D E *longitudine commmensurabilis est, per vigesimam huius:* M I *verò longitudine eidem* D E *incommensurabilis, per 22 huius. Quoniam autem* D M *&* D E *sunt cōmensurabiles, altera quæ earum* D E *alicui* M I *est incommensurabilis, reliqua* D M *eidem* M I *(per secundum corollarium decimæ huius) incommensurabilis erit longitudine. Potentia tantùm igitur commensurabiles sunt, certa* D M M I, *& proinde tota* D I *ex binis nominibus: Dico & quarta, nam ostensum est nomen maius esse* D M, *cùm* D L *æquale sit quadratis ex* A G G B, *maioribus per corollarium septimæ secundi, proposita* D E *certa longitudine commensurabile. Præterea cùm bina* A G G B *sint potentia incommensurabiles, per eandem 39 huius, quæ ex ipsis quadrata (seu* D T K L *ipsis æqualia) incommensurabilia erunt, & proinde recta* D K K M *(per primam sexti) longitudine incommensurabiles erunt: diuisa autem per applicationem eius quod sub* D K K M, *quod æquatur quartæ parti eius quod à minore* M I, *iuxta 18 huius, itaque maior* D M *plus potest minore* M I, *eo quòd à sibi longitudine incommensurabili: ipsa igitur* D I *ex binis nominibus est quarta, per quartam diffinitionem binomiorum. Quod ergo ex maiore ad certam comparatum, &c.*

Propositio sexagesimaquarta.

Quod ex Certum mediúmque potente, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Ex binis nominibus quintam.

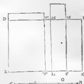
Esto certum mediúmque potens A B recta, cuius maius nomen sit A G. Quod autem ex A B applicetur (per 45 primi) ad expositam certam, quæ sit D E, latitudinem efficiens D I. Reliqua item vt prioribus construximus. Dico rectam D I esse ex binis nominibus quintam. Cùm A B sit certum mediúmque potens compositum ex quadratis A G G B medium erit, & proinde D L medium. Quod verò sub ipsis A G G B certum erit (per 40 huius) & proinde M Z duplum, eius quod sub ipsis certum erit. Quare latitudo M I recta certa longitudine ipsi propositæ D E commẽsurabitur, per 20 huius. Recta vero D M certa longitudine eidem D E propositæ certæ incõmensurabilis erit, per 22 huius. Sed duarum D E M I commensurabilium, altera D E alicui D M incommensurabilis est, & reliqua M I eidem D M (per secundum coroll. 10 huius) longitudine incommensurabilis erit. Potentia itaque tantùm commensurabiles certæ erunt D M M I, Tota igitur D I ex binis erit nominibus. Dico quod & quinta. Nam minus nomen M I ostensum est propositæ D E longitudine commensurabile. Cùm autem A G G B sint potentia incommensurabiles, per 40 huius, D T K L (ipsis potentiis æqualia) incommensurabilia erunt. Et proinde (per primam sexti) D K K M incommensurabiles erunt longitudine. Quare comparatum sub D K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore M I, deficiens specie quadrata, ac per incommensurabiles ipsam D M secans in K, efficit (ex 18 huius) maiorem D M plus posse minore M I eò quòd à sibi longitudine incommensurabile. Recta igitur D I erit ex binis nominibus quinta, per quintam diffinitionem binomiorum. Quod itaque ex certum mediúmque potente, ad certam, &c.



Propositio sexagesimaquinta.

Quod ex Bina media potente ad Certam comparatum latitudinem efficit Ex binis nominibus sextam.

Sit recta A B bina media potens, cuius maius nomen esto A G. Exponatur certa D E, cui (per 45 primi) constituatur æquum quadrato ex A B, sitq́ latitudinem efficiens D I, & reliqua priorum more construantur. Dico rectam D I esse ex binis nominibus sextam. Cùm autem recta A B sit bina media potens, quadrata sectionum A G G B componunt medium, scilicet D L. Quod insuper sub ipsis medium, per 41 huius, & proinde M Z (duplum ei) medium. Quæ quidem media ad certam D E apposita, vtrasque latitudines D M M I certas longitudine propositæ D E incommensurabiles efficiunt, per 22 huius. Præterea (ex eadem 41 huius) quod sub ipsis medium, scilicet M Z, est incommensurabile medio composito ex quadratis, ipsi scilicet D L. Et ideo (per primam sexti) certæ D M M I longitudine incommensurabiles erunt. Potentia igitur tantùm commensurabiles. Tota proinde D I ex binis est nominibus, per 36 huius. Dico quod & sexta. Cum (ex præfata 41 huius) quadrata rectarum A G G B sint incommensurabilia, & proinde ipsis æqualia D T K L rectangula. Sequetur (ex prima sexti) rectas D K K M longitudine incommensurabiles esse. Quare ad maiorem D M rectam comparatur quod sub D K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore M I quadrato scilicet M N, deficiens specie quadrata, ac ipsam D M (per incommensurabilia) longitudine distribuit in K. Maius igitur nomen D M, plus potest minore M I, per 18 huius, eò quod sit à sibi longitudine incommensurabili. Sed neutrum ipsorum nominum D M vel M I, ipsi propositæ D E longitudine fuit commensurabile. Tota itaque D I ex binis nominibus recta dicetur sexta, per sextam diffinitionem binomiorum. Quod igitur ex bina media potente ad certam comparatum, &c.



Propositio sexagesimasexta.

Ei quæ Ex binis nominibus longitudine commensurabilis, ipsa quoque Ex binis nominibus est, ac in ordine eadem.

Sit ex binis nominibus cuiusuis ordinis A B, *maiúsque eius nomen sit* A G. *Eidem porrò* A B *commensurabilis esto* E D. *Dico* E D *ex binis nominibus esse, & insuper eiusdem ordinis cum ipsa* A B. *Secetur* E D *(per decimam sexti) in* Z *similiter ipsi* A B. *Erit igitur* A G *ad* G B *vt* E Z *ad* Z D, *& componendo sicut* A B *ad* G B *sic* E D *ad* Z D, *per 18 quinti, vicissimque (per 16 quinti) erit* A B *ad* E D *sicut* G B *ad* Z D, *& ideo (per 19 quinti) reliquum* A G *ad reliquum* E Z, *sicut* A B *ad* E D. *Cõmensurabiles autem sunt* A B E D, *ex hypothesi, commensurabiles igitur erunt* G B *ipsi* Z D, *&* A G *ipsi* E Z, *per 13 huius. Certæ item sunt* A G G B, *per 36 huius, certæ igitur erunt* E Z Z D, *per sextam diffinitionem huius. Quia verò* A G *ipsi* G B *longitudine est incommensurabilis, &* E Z *ipsi* Z D *longitudine incommensurabilis erit, per secundam partem 13 huius. Potentia igitur tantùm erunt commensurabiles certæ* E Z Z D. *Tota igitur* E D *ex binis est nominibus. Ostendamus quod eiusdem sit ordinis* E D *cum ipsa* A B. *Si enim* A G *plus possit minore* G B *à sibi longitudine commensurabili, &* E Z *ipsa* Z D *simile maius poterit, per 16 huius. Si quidem maius nomen* A G *propositæ fuerit commensurabile longitudine, &* E Z *ipsi propositæ commensurabile longitudine erit, per decimam huius. Nam proposita &* E Z *eidem* A G *sunt commensurabiles, & sic erit vtraque prima. Si minus* G B, *& minus* Z D, *per eandem, sicque vtraque secunda. Si verò neutrum propositæ commensuretur ipsorum* A G G B *nominum, & neutrum ipsorum* E Z Z D *eidem propositæ commensurabitur, per coroll. secundum decimæ huius. Nam binæ* A G E Z *sunt commensurabiles ostensa, similiter &* G B Z D *inter se, & sic vtraque erit tertia. Si quidem maior* A G *plus possit minore* G B *à sibi longitudine incommẽsurabili, &* G Z *ipsa* Z D *eodem plus poterit, per secundam partem 10 huius. Hoc quidem transposito, si maius propositæ commensuretur, & maius ipsius* E D *eidem proposita commensurabitur (vt patuit) & sic quarta. Si minus, & minus, & sic quinta. Si verò neutrum, & neutrum, sicque sexta. Ei itaque quæ ex binis nominibus longitudine commensurabilis, &c.*

Propositio sexagesimaseptima.

Ei quæ Ex binis mediis longitudine commensurabilis, & ipsa Ex binis mediis est, & in ordine eadem.

Sit ex binis medijs recta A B, *cuius maius nomen esto* A E, *ipsi autem* A B *commensurabilis esto longitudine* G D. *Dico* G D *rectam ex binis medijs esse, & in ordine eandem ipsi* A B. *Secetur (per decimam sexti)* G D *in* Z *similiter ipsi* A B. *Erit* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D, *& componendo (per decimamoctauam quinti)* A B *ad* B E *sicut* G D *ad* D Z. *Et vicissim* A B *ad* G D *vt* E B *ad* D Z, *per 16 eiusdem. Et (per 19 eiusdem) reliquum* A E *ad* G Z *sicut* A B *ad* G D. *Commensurabilis autem est* A B *ipsi* G D, *per hypothesim, commensurabilis igitur erit* D Z *ipsi* B E, *ac* G Z *ipsi* A E, *per 13 huius. Quia verò* A E *ipsi* E B *longitudine incommensurabilis est, & (per eandem)* G Z *ipsi* Z D *longitudine incommensurabilis erit. Cùm autem potentiæ mediarum* A E E B *sint commensurabiles, per 37 & 38 huius, & ipsarum* G Z Z D *potentiæ commensurabiles erunt, per 13 huius. Cùm linearum proportionalium quadrata sint proportionalia, per 22 sexti. Mediæ autem sunt* A E E B, *mediæ igitur erunt* G Z Z D, *per 23 huius. Ex binis itaque medijs erit* G D. *Quod autem eiusdẽ ordinis sit ipsi* A B *dicamus. Quoniã est* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D, *erit (per lemma vigesimæprimæ huius) quadratũ ex* A E *ad quod sub* A E E B, *sicut quadratũ ex* G Z *ad quod sub* G Z Z D. *Et vicissim (per 16 quinti) sicut quadratũ ex* A E *ad quadratũ ex* G Z, *sic quod sub* A E E B *ad quod sub* G Z Z D. *Cõmensurabile autem est quadratũ* A E *et quod ex* G Z, *per illationem nonæ huius, commẽsurabile igitur erit quod sub* A E E B *et quod sub* G Z Z D, *per 13 huius. Si igitur certum sit quod sub* A E E B *certum erit quod sub* G Z Z D. *Et sic vtraque* A B *&* G D *erit prima ex binis medijs, per 37 huius. Si verò quod sub* A E E B *medium fuerit, medium erit quod sub* G Z Z D, *per coroll. 23 huius.*

Sicq;

Sicque vtraque A B & G D *erit secunda, ex binis medijs, per 38 huius. Ei itaque quæ ex binis medijs longitudine commensurabilis.&c.*

Corollarium

Ei quæ Ex binis medijs potentia tantùm commensurabilis, ea Ex binis medijs est, & in ordine eadem. *Sit* A B *ex binis medijs prima, aut secunda, cui commensurabilis esto* G D. *Sit item certa* E Z, *cui (per 45 primi) applicetur æquum quadrato ex* A B, *sitq;* E Z F C, *æquũ vero quadrato* G D *esto* C F I H, *quoniam* E F *rectangulum est, quod ex binis medijs sit prima, illud ad certã protectum, latitudinem* E C *efficit binomium secundum, per 61 huius, Quia verò (ex hypothesi) commensurabilia sunt quadrata* A B G D, *commensurabilia erũt (eis æqualia)* E F C I *rectangula, & ideo (ex 1. sexti) cõmensurabiles longitudine rectæ* E C C H, *atqui* E C *fuit ex binis nominibus secũda, et igitur* C H *ex binis nominibus secũda erit, per 66 huius, quod autẽ* C I, *sub certa* E Z *vel* C F *& ex binis nominibus secunda* C H *comprehenditur, illud potens, est ex binis medijs prima, per 55 huius, quæ quidẽ illud potens fuit* G D *quæ ideo est eiusdem ordinis ipsi* A B. *haud secus ostendetur si* A B *fuerit ex binis medijs secunda, ea etenim efficiet latitudinem* E C *Binomium tertium, cui longitudine commensurabilis erit* C H, *& ideo* C H *erit tertium, sub quo & certa comprehensa areola, sit potentia eius quæ ex binis medijs secunda, quæ quidem fuit ipsa* G D. *Ei igitur quæ ex binis medijs longitudine aut potentia tantùm commensurabilis, ea ex binis medijs erit eiusdémque ordinis.*

MONITVM.

Secus sentiendum est in binomijs, eorum etenim potentia tantùm commensurabiles, eundem binomij ordinem produci non cogunt, sed tantùm vtrasque in tribus prioribus aut certæ tribus posterioribus simul inueniri, vt exemplo aperiamus. Sit ex binis nominibus prima A B, *cuius maius nomen esto* A G, *ipsi verò* A B *potentia tantùm commensurabilis sit* D Z: *Dico* D Z *non esse eiusdem ordinis ipsi* A B. *Nam si fieri posset, sit* D Z *eiusdẽ ordinis ipsi* A B. *Ipsa igitur* D Z *similiter secabitur in* E, *vt ipsa* A B *in* G, *per demonstratum sexagesima sexta huius. Non igitur aliter secabitur, per 42 huius: cùm ideo sit* A B *ad* D Z, *vt* A G *ad* D E, *sed* A G *&* D E *(maiora nomina) commensurabilia sunt adinuicem longitudine, per decimam huius, cum sint eidem propositæ certæ commẽsurabiles, per primam binomiorũ diffinitionem. Ipsæ igitur* A B *&* D Z, *longitudine commensurabiles erunt, per 13 huius, sed & potentia tantùm, ex hypothesi, quod fieri non potest. Eodem argumento patebit, si posuerimus* A B *ex binis nominibus secundam: nam minora nomina* G B *&* E Z *eidem propositæ, & igitur adinuicem commensurarentur, & proinde ipsæ* A B D Z *eandem habentes rationem commensurarentur, contra suppositum. Præterea si comparentur ipsarum* A B *&* D Z *quadrata, ad certam* C F, *scilicet* C I H L, *ipsa efficient latitudines* C H H K *ex binis nominibus primas, per sexagesimam huius, cuiuscunque ordinis fuerint* C I *&* H L *applicata. Quare sub certa & binomio primo, patet omnes binomiorum contineri potentias (ex 54 huius) confusè. Non igitur necessariò potentiarum sola commensuratio, eundem binomiorum pariet ordinem. Idem patebit, si supponantur* A B *&* D Z *binomium, quartum aut quintum, quorum potentiæ tantùm commensurabiles, similiter vt priorum diuersum pariunt ordinem. Quoniam autem potentiæ* A G G B *&* D E E Z *commensurabiles sunt & proportionales, facilè patet, si* A G *ipsa* G B *maius possit à sibi longitudine commensurabili, &* D E *maius ipsa* E Z *eodem posse, per 16 huius, vt sint binæ* A B D Z, *simul ex tribus prioribus binomijs. Si verò ab incommensurabili, & reliqua ab incommensurabili maius poterit, per eãdem, vt sint simul trium posteriorum. Cur autem de tertio & sexto binomijs, nihil in exemplo meminerimus id causæ est. Nam tertia & sexta neutrum nomen longitudine commensurabile est ipsi* C F *propositæ quare longitudinis incommensuratio, ipsarum* A B *&* D Z *inter se non repellit mutuam commensurationem binorum ad certam nominum. Nec obstat ipsis* A G G B *eidem* C F *incommensurabilibus existentibus simul & reliquas* D E E Z *eidem* C F *incommensurabiles existere, latior etenim multo est incommensuratio com-*

mensuratione. Licet autem decima huius eidem commensurabiles adinuicem commensurari cogat. Attamen eidem incommensurabiles, inter se incommensurabiles esse cogi non poterunt, nec quidem commensurabiles esse, ob immensam incommensurabilium libertatem. Hac igitur de causa Euclides sex binom a sub vna tantùm incertarum denominatione compescebat, cum non ideo inter seut cæteræ, distent quæquidem cætera, nec longitudine néve potentia vlla communicãt, vt proximo Supero fauente, dicemus. Ostendimus enim ex binis mediis primã & secundam eousque inter se discrepare, vt ne potẽtia tantùm commensurari possint, præcedenti corollario, cui simile sequentes habere patebit, vt earum sex singulas propriam sibi quantitatis vendicare naturam concipiamus.

Propositio sexagesimaoctaua.

Maiori commensurabilis, ea quoque Maior est.

Esto maior AB, cuius maius nomen sit AE, ipsi verò AB quauis arte (saltem potentia) commensurabilis existat GD: Dico GD vocari maiorem, secetur GD similiter ipsi AB in Z, per decimam sexti erit itaque AE ad EB vt GZ ad ZD, & componendo (per 18 quinti) AB ad BE vt GD ad DZ, & vicissim (per 16 quinti) AB ad GD vt BE ad DZ. Reliquum igitur AE ad reliquum GZ erit, vt AB ad GD, per 19 quinti, & proinde earum quadrata proportionalia erũt, ex 22 sexti, scilicet quod ex AE ad quod ex EB, sicut quod ex GZ ad quod ex ZD, incommensurabilia autem sunt quæ ex AE & ex EB, incommensurabiles enim sunt potentia AE EB, per 39 huius, incommensurabilia itaque erunt quæ ex GZ & ex ZD, per 13 huius, ipsæ igitur GZ ZD rectæ potentia sunt incommensurabiles, quia vero fuit quod ex AE ad quod ex EB, sic vt quod ex GZ ad quod ex ZD, erit componendo quæ ex AE & ex EB, ad quod ex EB, sicut quæ ex GZ & ex ZD, ad quod ex ZD, per 18 huius, & vicissim quæ ex AE & ex EB ad quæ ex GZ & ex ZD, sicut quod ex EB ad quod ex ZD, quia rursus fuit AB ad GD vt EB ad ZD, erit (per eandem 22 sexti) quod ex AB ad quod ex GD, sic quod ex EB ad quod ex ZD. Commensurabile autem est quod ex AB ei quod ex GD, ex hypothesi, commensurabile quod ex EB ei quod ex ZD, per decimamtertiam huius, sed sicut quod ex EB ad quod ex ZD, sic fuerunt composita ex AE EB quadratis, ad composita ex GZ ZD quadratis. Compositum igitur ex AE EB quadratis, commensurabile erit composito ex GZ ZD quadratis, per eandem 13 huius, certum autem est compositum ex AE EB quadratis, per 39 huius, cùm sit AB maior, certum igitur erit compositum ex GZ ZD quadratis, per sextam diffinit. huius. Binæ itaque GZ ZD rectæ potentia incommensurabiles sunt, efficientes compositum ex earum quadratis certum. Cæterum cùm fuerit AE ad GZ vt AB ad GD, erit (per 22 sexti) quod ex AE ad quod ex GZ, sicut quod ex AB ad quod ex GD cõmensurabile autem est quod ex AB ei quod ex GD, ex hypothesi. Commensurabile igitur erit quod ex AE ei quod ex GZ, quia verò est vt AE ad EB sic GZ ad ZD, erit (per lemma 21 huius) quod ex AE ad quod sub AE EB, sicut quod ex GZ ad quod sub GZ ZD, & vicissim quod ex AE ad quod ex GZ sicut quod sub AE EB ad quod sub GZ ZD, per 16 quinti, quod autem ex AE et quod ex GZ commensurabile fuit. Quod igitur sub AE EB et quod sub GZ ZD commensurabile erit, per decimamtertiam huius: medium autem est quod sub AE EB, per 39 huius, medium itaque erit quod sub GZ ZD, per vigesimamtertiã huius, ipsæ itaque GZ ZD binæ rectæ potentia incommensurabiles, efficiunt conflatum ex earum quadratis certum, quod autẽ sub ipsis medium. Tota igitur GD (per trigesimamnonam huius) incerta erit, quæ vocatur maior. Maiori itaque commensurabilis (quauis arte) maior erit.

MONITVM.

Duas proximè sequentes eodem huius argumento demonstrare possumus, scilicet certũ mediumq; potentem, & bina media potentem. Posita enim (ex hypothesi) potentiarum commensuratione, ex cõstructione autem simili sectione, per eadem theoremata, optatum consequemur. Quare has alia via demonstrabimus, vt luculentior euadat disciplina.

Propositio sexagesimanona.

Certum mediúmque potẽti commensurabilis, & ipsa certum mediúmque potens est.

Prop

Proponatur recta certum mediúmque potens A B, *cui commensurabilis esto* G D. *Dico* G D *esse rectã, quæ dicitur certum mediúmque potens, exponatur certa* C F, *cui (per quadragesimam quintam primi) comparetur æquum quadrato ex* A B, *rectangulũ* C F I H. *Item æquum quadrato* G D *quod sit* H I K L, *latitudines efficientia* C H H L, *quoniam* G D *ipsi* A B *commẽsurabilis est, saltem potentia tantum, commensurabilia erunt* C I *&* H K, *eorum quadratis æqualia, & proinde (per primam sexti) commensurabiles erunt rectæ* C H H L *longitudine, quia vero* C I *(æquum ei quod ex* A B *certum mediúmque potente) ad certam* C F *comparatur, latitudinem efficiens* C H, *ipsa* C H *est ex binis nominibus quinta, per 64 huius, cui quidem* C H *fuit commensurabilis longitudine* H L, *ipsa itaque* H L *est ex binis nominibus quinta, per 66 huius. Cùm autem areola* H K *comprehendatur sub certa* C F *(hoc est* H I*) & ea quæ ex binis nominibus quinta* H L, *quæ areolam* H K *potest, scilicet* G D *ex hypothesi, appellatur certum mediúmque potens, per 58 huius. Certum igitur mediúmque potenti commensurabilis, &c.*

Propositio septuagesima.

Bina media potenti commensurabilis, & ipsa Bina media potens est.

Esto recta A B *bina media potens, cui cõmensurabilis sit* G D. *Dico* G D *esse Bina media potentem. Repetatur prioris descriptio, quoniam* C I *æquum est ei quod ex* A B *ad certam proiectum latitudinem* C H *efficit ex binis nominibus sextam, per sexagesimamquintam huius, quia vero* C I *&* H K *(æqualia quadratis* A B *&* G D *commensurabilibus) commensurabilia sunt, rectæ* C H *&* H L *longitudine commensurabiles erunt, per primam sexti, fuit autem* C H *binomium sextum, igitur* H L *erit binomium sextum, per 66 huius, quia porro* H K *continetur sub certa* C F *& binomio sexto,* H L, *quæ aream* H K *potest, scilicet recta* G D, *bina media potens est, per 59 huius. Bina itaque media potenti, &c.*

Sckolium.

Huc vsque septem egimus theorematum senaria, his sex præfatis incertis intelligendis necessaria. Priore senario inuentionem linearum (sex illas incertas generantium) septem propositionibus à vigesimanona huius inchoantes exposuimus, quarum priores binæ, vnica tantùm facilè tradi potuerunt, vt sex inuentionibus tantũ, sex incertæ generari dicantur. Secundo senario ex inuentarum cõpositione, sex incertas produci documus. Tertio senario cuiuslibet earum sex incertarum, vnam tãtum fieri posse diuisionem, in lineas eam incertam generantes. Quarto senario (prioris earum sextupla diffinitione præposita, eam in sex species distribuente) prioris specierum singularum inuentionem protulimus. Quinto senario certam cum singulis sex prioris speciebus, singulas (eodem ordine) sex incertarum potentias comprehendere discußimus. Sexto quidem senario, conuersim, sex incertarum singulas potentias certæ rectæ comparatas, suis latitudinibus præfatas, sex prioris species singulas exprimere conclusimus. Septimo tandem senario quamlibet rectam vni earum incertarum quauis arte commensurabilem, ipsius illico denominationem consequi monstrauimus, cuiusquidem senarij quinque tantum fuerunt theoremata, eo quòd huius senarij secundum & tertium, vnico expediantur theoremate, quæ quidem theoremata septuagesima complentur propositione, subsequuntur demum bina theoremata quibus patet ex certa & medijs areis præfatarum sex incertarum potentias componi. A 73 verò ad centesimumseptimum vsque theorema, alias sex produci docebimus incertas, per earundem linearum abstractionem, per quarum copulationem præfatæ incertæ compositæ sunt, earúmque similes prioribus actiones & paßiones, totidem sex senarijs eundem ordinem seruãtibus, priorum incertarum ordini, per 107 completo. Succedent tandem similiter tria theoremata, quibus elucidabimus ex certa & medijs areis per abstractionem, harum sex generari incertarũ potentias, sicut per earum adiunctionem, priorum potentias genitas fuisse diximus. Sex tandem theorematibus hunc decimum concludẽtes, insuper inest his incertis aliud, quo scilicet inter alicuius harum incertarum nomina, media proportionalis arithmetica ratione cadens, eiusdem suscipit deno-

minationem. Sit exemplo A B *aliqua incertarum, eius vero maius nomen* A G, *totius vero dimidia sit* A D *vel* D B, *quia arithmetica progressione patet, quanto maius nomen* A G *excedit dimidiam* A D *(hoc est ipso* D G*) eodem* D G *dimidia* D B *excedit minus nomen* G B. *Totius igitur dimidia* A D, *ipsorum nominum* A G G B *media est proportionalis, arithmetica ratione, & toti commensurabilis longitudine. Ipsa igitur dimidia* A D *eiusdem erit denominationis, cum tota* A B, *per hanc & quartam praecedentes. Huiusce scholij aliqua meminit alterum Graecorum exemplar tãtum, quae ampliori aut saltem faciliori expositione digessimus, ut generalem intelligentiam facilitemus.*

Propositio septuagesimaprima.

Certum mediúmque composita, quatuor incertarum arearum vnam efficiunt, scilicet eam quę Ex binis mediis nominibus, quæ Ex binis mediis primam, Maiorem, aut Certum mediúmque potentem.

Componant vnam aream A D *certum* A B *& medium* G D: *Dico ipsam* A D *aream esse potentiam unius quatuor incertarum, scilicet eius quae Ex binis nominibus, Ex binis medijs primae, Maioris, aut equidem Certum mediúmque potentis. Exponatur Certa* E Z, *cui comparetur (per 45 primi) aequum ipsi* A B, *illud* E Z L T, *aequum verò ipsi* G D, *rectanlum* T L I K. *Quia porro certum est* A B *certum erit* E L, *quia item medium est*, G D *medium erit* T I. *Quae* E L *&* T I *ad certam* E Z *applicata, latitudines efficiunt, scilicet* E T *Certam longitudine ipsi* E Z *commensurabilem, per vigesimam huius, ac* T K *Certam longitudine incommensurabilem eidem* E Z, *per 22 huius. Et quia incommensurabile est* E L *certum medio* T I, *incommensurabiles erũt (per primam sexti) longitudine ipsa* E T T K *Certa, & igitur potentia tantùm commensurabiles, totáque* E K *Ex binis nominibus, per 36 huius. Cuius* E T *nomen aut maius est, aut minus. Siquidem maius, aut plus potest minore*, T K *à commensurabili aut incommensurabili. Si à commensurabili, tota* E K *erit Ex binis nominibus prima. Si ab incommensurabili, eadem* E K *erit quarta. Si verò* E T *sit minus & commensurabile ipsi* E Z *Certae existat, aut* T K *maius, plus eo poterit à commensurabili, & sic erit secunda Ex binis nominibus. Si verò ab incommensurabili, ipsa* E K *erit quinta, per binomiorum diffinitiones. Quauis igitur sumptione semper* E K *erit binomium, aut primum, aut secundum, aut quartum, aut quintum. Si itaque area* E I *comprehendatur sub certa* E Z *& binomio primo* E K *aream potens erit binomium, per 54 huius. Si sub certa* E Z *& binomio secundo* E K, *aream* E I *potens erit ex binis medijs prima, per quinquagesimamquintam huius. Siquidem sub certa* E Z *& binomio quarto* E K, *aream* E I *potẽs dicetur maior, per 57 huius. Si verò sub certa & binomio quinto, aream* E I *potens vocabitur certum mediúmque potens, per 58 huius. Sed potens aream* E I *potest sibi aequalem (ex hypotesi) aream* A D. *Ipsa igitur* A D *est potentia eius quae ex binis nominibus, eius quae ex binis medijs prima, maioris, aut certum mediúmque potentis. Certum itaque & medium composita quatuor, &c.*

Propositio septuagesimasecunda.

Bina Media adinuicem commensurabilia composita, reliquarum duarum incertarum alteram efficiunt aream, eam scilicet quæ Ex binis mediis secundam, aut Bina media potentem.

Comp

Componatur area AD ex binis medijs AB & GD adinuicem incommensurabilibus. Dico aream AD aut ex binis medijs secundam, aut bina media potentem esse. Exponatur certa EZ, cui (per 45 primi) comparetur æquum ipsi AB, sitq́ EZ LT, æquum verò ipsi GD illud TI, latitudines efficientes ET TK. Quoniam media incommensurabilia sunt AB & GD, media erunt EL & TI, ac incommensurabilia, quæ quidem latitudines ET ac TK certas efficiunt, longitudine tamen propositæ certæ EZ incommensurabiles, per vigesimamsecundam huius. Insuper easdem ET TK inter se longitudine incommensurabiles, per primam sexti. Potentia itaque tantùm sunt ipsa certa ET TK commensurabiles. Tota igitur EK ex binis est nominibus, per 36 huius, diuisa in sua nomina, ET TK. Sed cùm neutrum nomen ET vel TK sit expositæ EZ commensurabile. Necesse est eam EK esse binomium quidem, sed tertium aut sextum, per tertiam & sextam binomiorum diffinitionem. Tertium enim si maius nomen plus possit minore, à sibi longitudine commensurabili. Sextum verò si ab incommensurabili, per easdem diffinitiones. Si igitur EK sit tertium binomium, sub ipso & EZ certa comprehensum EI, poterit aliqua incerta quæ dicitur ex binis medijs secunda, per 56 huius. Si autem EK fuerit sextum binomium, sub eo & certa EZ comprehensum EI, poterit bina media potens. Itaque aream EI potest, aut ex binis medijs secunda, aut bina media potens. Et proinde aream AD (ipsi EI æqualem) poterit eadem, quæ igitur erit ex binis medijs secunda, aut bina media potens. Bina igitur media, &c.

Corollarium ex præcedentibus.

Hinc sequitur septem præhabitas incertas non esse easdem, sed singulas sibi inuicem à singulis differre. *Nam mediæ quadratum Certæ applicatum, latitudinem certam producit, per vigesimamsecundam huius. Eius verò quæ ex binis nominibus quadratum, eidem certæ applicatum, latitudinem ex binis nominibus primam efficit, per sexagesimam huius. Eius quidem quæ ex binis medijs prima, latitudinem efficit binomium secũdum, per 61 huius. Eius verò quæ ex binis medijs secunda, latitudinem efficit binomium tertiũ, per 62 huius. Quod enim ex maiori, latitudinem efficit Binomium quartum, per 63 huius. Quod autem ex certum mediúmque potente, latitudinem producit binomium quintum, per 64 huius, quod ex bina media potente eidem certæ applicatum, latitudinem producet binomium sextum, per 65 huius. Cum igitur præfatæ latitudines à prima certa, & inter se differant, cùm sint diuersorum ordinum manifestum est sub ipsis comprehensas areas inter se differre. Insuper & manifestius erit, quod per 66 & quatuor eam sequentes, patuit, ipsas scilicet eousque inter se distare, vt ne longitudine, ne quidem potentia tantùm sibi commensurari valeãt, nam si commensurarentur eadem essent, vt celeberrimè fuit ostensum. Sed forsan, vt quibusdam placeat exemplum demonstrãs subiiciamus. Esto certa AB cui omnes incertæ comparentur potentiarum species, sitq́ AC medium, DE verò ei quod ex binis nominibus æquum, FG ei quod ex binis medijs prima, HI ei quod ex binis medijs secunda, KL maiori, MN certum mediúmque potenti, OP tandem bina media potenti sit æquum. Manifestum est (ex 22 huius) AD certã esse reliquas autẽ DF FH HK KM MO OQ. patet ex sexagesima & quinque eam sequentibus sex esse binomia, quæ quidem longitudine inter se differunt, nam si aliqua alteri longitudine commensurabilis esset, ea esset eadẽ cum reliqua, per 66 huius, & ideo quandoque eidem certæ longitudine commensurabilis, & incommensurabilis esset, vel quandoque plus posset à commensurabili, & ab incommensurabili, quæ essent vera chimera, vt patuit ex diffinitionibus binomiorum, singulæ itaque ipsarum septem sibiinuicem longitudine erunt incommensurbiles. Quare (per primam sexti) & potentiæ AC DE FG HI KL MN & OP incommensurabiles erunt, & proinde septem rectæ incertæ eas potentes, dicentur potentia singulæ adinuicem incommensurabiles. Siquidẽ potentia fuerint, & longitudine erũt, per vltimã partem allationis nonæ huius. Licet itaque hæc incerta eiusdẽ sint generis quoad quãtitatẽ, & ideo rationem habere dicantur, nam multiplicata sese excedere possint, tamen quia non cadit interea numerorum*

comparatio, quæ vnica est quantitatum discretio ipsa rationem non discretam, siue cognitam: sed equidem surdam & inexplicabilem vlla discretione quantitatis habere dicentur. Non enim ratione priuantur, sed tantùm commensuratione.

INCIPIVNT SENARIA INCERTARVM per ablationem genitarum.

Propositio septuagesimatertia.

Si à Certa Certa auferatur potētia tantùm commensurabilis existens toti, Reliqua incerta est, vocatur autem Apotome.

A ——— G ——— B

Esto certa A B *à qua detrahatur certa* B G, *toti* A B *potentia tantùm commensurabilis existens. Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ quidem dicetur Apotome seu residuum: quoniā quod ex* A B *cum quadrato* B G, *æquum est ei quod bis sub* A B B G *cum quadrato* A G, *per septimam secundi. Certum autem est compositum ex quadratis* A B B G, *cum vtraque certa ex hypothesi supponatur. Medium verò est quod sub* A B B G, *per 21 huius, & proinde eius duplum quod bis sub* A B B G *medium erit, per corollarium 23 huius, & igitur incertum quare erit incommensurabile composito certo ex quadratis* A B B G. *Sed si totum scilicet compositum ex quadratis* A B B G *vni eorum (scilicet et quod bis sub* A B B G*) fuerit incommēsurabile, & reliquo (scilicet quadrato* A G*) incommensurabile erit, per corollarium 12 huius, certum autem fuit compositum. Huic igitur incommensurabile (quadratum ex* A G*) incertum erit, ex diffinitione decima huius: quare illud potens* A G *incerta erit, per lemma vigesima huius. Si itaque à Certa Certa auferatur potentia tantùm, &c.*

Propositio septuagesimaquarta.

Si à Media auferatur Media, potētia tantùm commensurabilis toti, cum tota verò certum comprehendens, reliqua incerta est, vocatur autem Mediæ apotome prima.

A ——— G ——— B

Sit media A B, *à qua auferatur* B G *quæ quidem sit media potētia tantùm ipsi* A B *commensurabilis, & cum ipsa* A B *certum comprehendens, per 27 huius: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ dicitur Media apotome prima. Cùm quadrata ex* A B B G *medijs sint commensurabilia, compositum ex ipsis est medium, quod quidem æquatur, per septimam secūdi, ei quod bis sub* A B B G, *& quadrato* A G. *Sed quod bis sub* A B B G *(ex hypothesi) certum est, cùm sit duplum eius quod sub* A B B G. *Quod igitur sub ipsis* A B B G *certum, incommensurabile est composito ex* A B B G *quadratis medio, igitur per secundam partem duodecimæ huius, incommensurabile erit quod ex* A G *ei quod bis sub* A B B G. *Ea etenim totum efficiunt compositum ex quadratis* A B B G. *Quod igitur ex* A G *(ipsi quod bis sub* A B B G *certo incommensurabile) incertū erit, per decimam diffinitionem huius: & proinde recta* A G *illud potens incerta erit, per lēma vigesimæ huius, quæ dicitur Mediæ apotome prima. Si igitur à media auferatur media, potentia, &c.*

Propositio septuagesimaquinta.

Si à Media auferatur Media potentia tantum commensurabilis existens toti, cum tota verò medium comprehendens, reliqua incerta est, vocatur verò Mediæ apotome secunda.

Ame-

A media A B *auferatur media* G B, *potentia tantùm commensurabilis existens toti* A B, *cum ipsa verò medium comprehendens quod sub* A B B G. *Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ dicitur Mediæ apotome secunda. Exponatur nanque certa* D C, *cui comparetur (per 45 primi) æquum cōposito ex* A B B G *quadratis, quod sit* D C E I. *Rursus vero æquum ei quod bis sub ipsis* A B B G, *quod sit* Z T E I, *reliquum igitur* D T *æquum erit quadrato ex* A G, *per septimam secūdi, ea enim composito ex* A B B G *quadratis æquātur. Quoniam enim media sunt quadrata ex* A B B G *mediis, medium erit* D E *ipsis æquum. quia verò medium est quod sub* A B B G, *ex hypothesi, medium erit* Z E, *ipsius duplum, sed medium* D E *non excedis medium* Z E *certo, per 26 huius, incertum itaque erit* D T *(excessus) cui quidem æquum fuit quod ex* A G *quadratum: incertum igitur erit quod ex* A G, *& proinde illud potens recta* A G, *incerta erit, per coroll. vigesimæ huius, dicta media apotome secunda. Si itaque à media auferatur media potentia tantùm, &c.*

MONITVM.

Prolixiori argumento discussit hanc Theon, per comparationem linearum, D I D Z *&* Z I *ipsi* D C *propositæ, concludens incertam esse* D Z, *quare sub certa* D C *& incerta* D Z *comprehēsum* D T, *incertum esse, probare conatur, per lemma vigesimæ huius, quod aliud agit negotium. Nos itaque breuiorem (ne tædio distrahantur ingenia) elegimus methodum, quo fere vsus est Campanus.*

Propositio septuagesimasexta.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, cum tota verò efficiens quod ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium. Reliqua incerta est, appellatúrque Minor.

A recta A B *auferatur recta* B G *potentia ipsi* A B *incōmensurabilis, efficiens verò compositum ex quadratis* A B *&* B G *certum, quod verò sub ipsis medium. Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ appellatur minor, quoniam compositum ex quadratis* A B B G *certum est, quod verò sub ipsis medium, ex hypothesi, incommensurabile erit compositum ex* A B B G *quadratis ei quod bis sub* A B B G *medio, cum autem ex* A B B G *quadrata ei quod bis sub* A B B G, *cum quadrato* A G *æqualia sint, ex septima secundi. Totum autem compositum ex* A B B G, *vni eorum (quod bis sub* A B B G*) incommensurabile est, & reliquo (per coroll. duodecimæ huius) incommensurabile erit, quadrato ex* A G, *quod itaque ex* A G *incertum erit, per decimam diffinitionē huius, illud igitur potens recta* A G *reliqua (per lemma vigesimæ huius) incerta erit, appellata minor. Si itaque à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, &c.*

Propositio septuagesimaseptima.

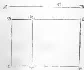
Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existēs, & cum tota efficiens conflatum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod verò sub ipsis Certum. Reliqua incerta est, vocata Cum certo mediū totum efficiens.

Auferatur à recta A B *recta* B G, *potētia toti* A B *incommensurabilis, cùm tota verò* A B *efficiens conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum: Dico reliquam* A G *incertam esse, quæ vocatur cum certo medium totum efficiens, cùm autem medium sit quod ex* A B B G *quadratis compositum, quod verò sub ipsis certum, per hypothesim, compositum verò ex quadratis* A B B G *æquum sit ei quod bis sub ipsis cum quadrato* A G, *per septimam secundi, totum autem compositum certum vni eorum (quod bis sub* A B B G *medio) incommensurabile sit quæ in principio igitur (scilicet quod bis sub* A B B G, *& quadratum* A G *(per secundam partem duodecimæ huius) incommensura-*

bilia erunt, atque certum est quod bis sub A B B G, ex hypothesi, quod igitur ex A G quadratum huic incommensurabile, incertum erit, per decimam diffinitionem huius, illud itaque potens recta A G incerta erit, per lemma vigesimæ huius, quæ quidem dicetur cum certo medium totum efficiens. Si igitur à recta linea recta auferatur potentia toti incommensurabilis, &c.

Propositio septuagesimaoctaua.

Si à recta linea recta auferatur, potentia toti incommensurabilis existens, & cum tota efficiens conflatum ex ipsarum quadratis medium, quod verò sub ipsis medium. Insuper incommensurabile, conflato ex ipsarum quadratis. Reliqua incerta est, appellatur autem Cum medio medium totum efficiens.



A recta A B auferatur recta B G potentia toti A B incommensurabilis, &c. qualis optatur, ex hypothesi & 35 huius. Dico reliquam A G incertam esse, quæ dicitur cum medio medium totum efficiens. Exponatur certa D C, cui (per quadragesimamquintam primi) comparetur æquum conflato ex quadratis A B B G sitq; D E latitudinem efficiens D I. Æquum verò ei quod bis sub ipsis A B B G sit Z E. Reliquum igitur D T æquum erit quadrato ex A G, per septimam secundi. Nam quod bis sub ipsis cum quadrato A G æquum est conflato ex earum A B B G quadratis. Cum autem medium sit conflatum ex quadratis A B B G, medium erit D E sibi æquum, quia verò medium est, quòd bis sub ipsis A B B G, cùm sit duplum medij quod sub ipsis, medium erit Z E sibi æquum, sed medium D E non excedit medium Z E certo, per 26 huius. Excessus itaque D T incertum producet, æquum quidem ei quod ex A G, per constructionem. Igitur A G recta (illud potens) incerta erit, per lemma vigesimæ huius, quæ quidem dicitur cum medio medium totum efficiens. Si igitur à recta linea recta, &c.

MONITVM.

Eadem breuitate vsi sumus huic septuagesimæoctauæ, qua septuagesimæquintæ. Nam harum (scilicet mediæ apothome secundæ, & cum medio medium totum efficientis) genitura, in hoc tantùm differunt, quod hæc à binis rectis potentia incommensurabilibus nascatur, illa verò à binis medijs potentia commensurabilibus. Quarum vtraque, quæ ex ipsis & sub ipsis, medium incommensurabile medio componunt, quare in eo tantùm sibi distant quod diximus. His autem 77 & 78 reliquimus hanc particulam (bis) vt sequamur trigesimamquartam & trigesimamquintam, earum originem.

Scholium.

Harum sex incertarum ortum à priorum origine duci inuariato earum ordine descripsit Euclides, vt omnium genituram prius à certa recta, postmodum verò à certa & media (quam mediam iam ante genuit certa) ortam, seruato priorum ordine, in earum actionibus ac passionibus explicandis, eandem esse propalaret. Nam harum singulæ, reliquarum singularum sunt tantum excessus, quibus maiora nomina excedunt minora. Prior etenim hac de causa apothomes nomen sibi sumpsit absolutum, quod alij residuum dicunt, eo quòd à præstantiori linea certa quidem (à qua certa tollitur) sit nata, ab eadem oritur ea quæ ex binis nominibus, sed hæc per copulationem, illa verò per detractionem. Cùm enim à maiori binomij nomine detrahitur minus, reliqua erit hæc vocata apothome, absoluta denominatione. Cum autem à maiori nomine eius quæ ex binis medijs prima aufertur minus, reliqua similiter dicitur apothome prima, sed mediæ recta inquam. Ab ea verò quæ ex binis medijs secunda, producitur apothome secunda, (Mediæ) A maiore autem producta, Minor dicetur, vt præstantiorem iudicemus priorem ordinem secundo, veluti maiorem minori præcellimus. A certum mediúmque potente, eiusdem ferè denominationis, fit quinta harum, quæ cum certo medium totum efficiens dicitur. A bina media potente autem sexta & vltima, cùm medio medium totum efficiens nascetur, singulæ itaque genitæ singularum gignentium denominationem proximè

imitantur

imitantur. Omnes autem à sex linearum inuentionibus (29 huius cum ex eã sequentibus descriptis) ortæ, hæ quidem per detractionem, illæ vero per cõpositionem. Cæterum cùm harum sex ac priorum ordo illud præ se ferat, vt trium priorũ cuiuslibet senary nomina eadem quæ ex ipsis quadrata & sub ipsis rectangula (certa vel media) describant, quæ & nomina trium posteriorum eiusdem senary describunt, apud quosdam eãdem viderentur sectari quantitatis naturam. Ad hæc dicemus tres priores à tribus postremis vtriusque senary (coniunctarum scilicet & ablatarum) in hoc potissimum discrepare, quod tres piores à potentiis commensurabilibus, postremæ vero ab incommensurabilibus nascantur, ac insuper earum potentiæ ad ceram rectam applicatæ, latitudines efficiunt eandem sequentes naturam, scilicet trium priorum latitudinum maius nomen plus minore potest à sibi longitudine commensurabili, trium vero posteriorum ab incommensurabili. Qua de causa tandẽ singulæ singulis penitus incommensurabiles patebunt.

Lemma.

Si quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

Hoc est, Si quatuor magnitudinũ prima tanto excedat secundam vel deficiat, quanto eodem tertia excedit quartam, vel deficit, & vicissim prima tantò excedet tertiam, vel deficiet, quãto eodẽ secũda excedet quartã vel deficiet. Sint quatuor magnitudines A B C D, *quarum prima* A *eodem excedat* B *secundam, vel eodem deficiat, quanto* G *tertia excedit quartam* D, *vel ab ea deficit. Dico vicissim primam* A *eodem excedere tertiam* C *vel deficere, quo secũda* B *excedet quartam* D, *vel deficiet ab ea. Tollantur excessus æquales quibus* A *&* C *differunt ab ipsis* B *&* D, *sintque* E *&* G. *Aequales igitur* A *&* B *ab æqualibus* C *&* D *æquis differũt excessibus, qui sint* H *&* I: *æquales igitur supererunt* A *&* B *(per tertiam communem sententiam) ipsis* C *&* D. *sed & adinuicem* A *&* B *fuerunt æquales, quatuor igitur* A B C D *inuicem sunt æquales relicta. Si igitur æqualibus* A *&* C *æquales addantur* E *&* G, *tota* A E *&* C G *æquales erunt (per quartam communem sententiam) sed &* B *&* D *sunt æquales. Addatur itaque æqualibus* A E *&* C G *excessus* H, *æqualibus verò* B *&* D *excessus* I *sed* H *&* I *sunt æquales ostensi excessus. Quo igitur prima* A *excedit tertiam* C, *vel ab ea deficit, scilicet ipso* H, *tanto secunda* B *excedit quartam* D *vel ab ea deficit, scilicet ipso* I. *Si igitur quatuor magnitudines arithmetica ratione proportionales, &c.*

MONITVM.

Campanus solus hoc lemma post septuagesimamtertiam sui scripti posuit, eousque tamen confusè vt discentibus sit difficile, an excessum proportionis geometricæ aut arithmeticæ intellexerit diiudicare. Nam eisdem terminis differentias comparat, quibus differentiæ siue rationes geometricæ comparari solent & insuper ab eo descripta figura, rationem geometricam, nõ autem arithmeticam insequitur, principiúmque citat, quo extremorum differentias, à mediorum differentiis componi dicit, quod in rationibus geometricis alias discussimus receceptum esse, quandoquidem excessus proportionales existunt, sed quando hi sunt æquales nondum extremos sequi medios Euclidẽ dixisse memoramur. Nam mediorum excessus compositi, non semper extremorum producunt excessum, veluti rationes, maximè si inter eos reperiantur maioris simul & minoris inæqualitatis rationes. Tamen cernẽtes futuris demonstrandis commodiorem nobis affuturam arithmeticam rationem geometricæ huius arithmeticæ rationis excessus æquales esse, demonstratione geometrica quam lucidè licuit protulimus.

Propositio septuagesimanona.

Apotome vna tantum congruit recta linea, Certa potentia tantum toti commensurabilis existens.

Esto apotome A B *cui congruat recta* B G *certa potentia tantũ toti* A G *commensurabili existens. Dico nullam ei aliam certam protentia tantum toti commensurabilem posse congruere. Quod si fieri posse credatur, congruat ipsi* A B *recta* B D, *potentia tantum toti* A D *commensurabilis existens. Cùm quadrata*

ex A G G B æquè excedant rectangulum bis sub A G G B comprehensum, veluti quadrata ex A D D B, excedūt rectangulū bis sub A D D B comprehensum, nempe quadrato reliqui segmenti A B, per septimam secundi. Sequetur vicißim, arithmetica progreßione, quadrata eodem excedere quadrata, quo rectangula excedunt rectangula, per lemma præfatum, sed quadrata sese excedūt certo, cum sint certa, ex certis potentia tantùm commensurabilibus ex hypothesi. Rectāgula igitur quæ sunt media (per 21 huius) sese excederent certo, contra 26 huius, quod esset absurdū. Vnica igitur solum B G (potentia tantum commensurabilis toti A G) certa, ipsi A B congruet. Apotome itaque vna tantum congruit, &c.

MONITVM.

Hanc demonstrans Theon, conatur æquos excessus quadratorum & rectangulorum vicißim posse concludi, per 16 quinti, quæ quatuor magnitudines proportione geometrica coniunctas, non autem arithmetica supponit, quæ quo sibi intersint, cuique discernendum relinquimus. In illud autem erroris incidit, penuria omißi proximi lemmatis, quod huic ac sequentium maximè conferet negotio.

Propositio octuagesima.

Mediæ apotome primæ vna tantum congruit recta linea Media, potētia tantum commensurabilis existens toti, & cum tota certum comprehēdens.

Esto A B apotome prima mediæ cui congruat B G media, potentia tātum toti A G cōmensurabilis existens, Cùm tota verò A G certum comprehendens, quod sub A G G B. Dico nullam ipsi A B aliam à recta B G eius naturæ cōgruere posse. Quod si posse dicatur, cōgruat ipsi A B recta B D, eiusdem naturæ ipsius B G. Quoniam (vt præcedenti ostendimus) quadrata ex A G G B eò excedunt rectangula bis sub A G G B, quo quadrata ex A D D B excedunt rectangula bis sub A D D B, scilicet quadrato A B, per septimam secundi. Sequetur igitur vicißim (per lemma 78 huius) quadrata eodem excedere quadrata, quo rectangula rectangula sed rectangula sese excedunt certo, cùm sint, ex hypothesi certa, sub medijs certum comprehendentibus. Quadrata igitur quæ sunt media (cum sint potentiæ mediæ, & commensurabiles) sese excedent, certo quod opponitur 26 huius, & proinde absurdum quare ipsi A B mediæ potentia tantùm toti commensurabilis, & cùm ipsa tota certum comprehendens, nulla congruet alia ab ipsa B G. Media igitur apotome prima vna, &c.

Propositio octuagesimaprima.

Mediæ apotome secundæ, vna tantùm congruit recta linea Media, potentia tantū toti commensurabilis existens, & cum tota medium comprehendens.

Fiat A B mediæ secunda apotome, cui congruat B G, vt sint A G G B media potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendentes. Dico ipsi A B nullam aliam congruere eiusdem naturæ ipsi B G, cuius oppositum si fieri poßit, congruat ipsi A B alia D B. Ipsæ igitur A D D B mediæ erunt potentia tantùm commensurabiles, medium comprehendētes. Exponatur certa E Z cui (per 45 primi) constituatur æquū quadratis A D D B, sit q; E Z C N, æquum verò quadratis A G G B, illud E Z I M, æquum autem quadrato A B sit E Z L T, latitudines efficientes E N E M E T, quoniam E I sit æquum eis quæ ex A G G B, sed E L est æquum ei quod ex A B, Reliquum itaque T I æquum erit ei quod bis sub A G G B. Nam bis sub A G G B cum quadrato A B æquum est quadratis ex A G G B, per septimam secundi, haud secus ostendemus cùm E C sit æquum quadratis A D D B, æquum verò sit E L quadrato A B, reliquum T C æquum esse ei quod bis sub A D D B, per eandem, cùm autem quadrata ex A D D B sint (ex hypothesi) media, & commensurabilia, compositum ex ipsis scilicet E C medium erit, per coroll. 23 huius. & simili argumento E I quadratis A G G B

æquum

æquum, medium erit, quæ quidem media, ad certam E Z *comparata, latitudines* E N E M *certas potẽtia tantum ipsi* E Z *proposita commensurabiles efficiunt, per 22 huius. similiter quia rectangula sub* AD DB *& sub* AG GB *sunt media, eadem bis sumpta media erunt, per coroll. 23 huius, & idcirco* T C *ipsi quod bis sub* AD DB *æquum, &* T I, *ei quod bis sub* AG GB *æquum, media erunt. Rectæ igitur* T M T N *(latitudines) certa potentia tantum ipsi* E Z *commensurabiles erunt cum enim* AG GB *sint (ex hypothesi) longitudine incommensurabiles, sit autem vt* AG *ad* GB, *sic quod ex* AG *ad quod sub* AG GB, *per lemma 21 huius, incommensurabile erit quod sub* AG GB *quadrato* AG, *quod autẽ ex* AG *ei quod ex* GB *est (per hypothesim) commensurabile, quod autem sub* AG GB, *ei quod bis sub* AG GB *est item commensurabile, dimidium duplo. Duobus igitur (scilicet ei quod ex* AG *& ei quod sub* AG GB *incommensurabilibus cõmensurabilia, quæ ex* AG GB *& quæ bis sub* AG GB, *per tertium coroll. decimæ huius, incommensurabilia erunt, & proinde* E I *&* T I *(ipsis æqualia) incommensurabilia erunt, & ideo (ex prima sexti)* E M *&* T M *rectæ incommensurabiles erunt longitudine, potentia itaque tantum commensurabiles erunt,* E M T M *cùm sint certæ ostensæ. Reliqua igitur* E T *est apotome, per 73 huius, haud dissimili via patebit* E N T N *certas esse potentia tantum commensurabiles, & proinde reliquam* E T *esse apotome, ipsi itaque* E T *apotome plures congruunt* T M T N *certæ, potentia tantùm toti commensurabiles existentes, quod fieri non potest, per 79 huius non itaque alia quàm* G B *ipsi* A B *mediæ apotome secunda cõgruet. Mediæ igitur apotome secundæ vna tantũ, &c.*

Propositio octuagesimasecunda.

Minori vna tantũ congruit tecta linea, potentia toti incommensurabilis existens, & efficiens cum tota compositum ex earum quadratis Certum, quod verò sub ipsis Medium.

Sit recta A B *minor, ipsi verò congruat* G B *qualis supponitur hoc theoremate: Dico ipsi* A B *nullam (qualem optat theorema) aliam ab ipsa* G B *cougruere, si enim fieri possit, congruat ipsi* A B *recta* D B, *erunt igitur* A D *&* D B *rectæ potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis certum, quod verò sub ipsis medium, cùm (ex hypothesi) quadrata* A G G B *certum componant, quæ verò sub ipsis medium, similiter & quæ ex* A D D B *certum, quæ verò sub ipsis medium suscipiunt, quare (vt proximis prioribus 79 & 80 huius patuit, quadrata ex* A G G B *& ex* A D D B *eodem sese excedunt, quo rectangula sub* A G G B *bis sumpta, & ea quæ bis sub* A D D B, *per septimam secundi & lemma 78 huius, atqui quadrata cùm sint certa (ex hypothesi) sese certo excedunt. Rectangula igitur (ex eadem hypothesi) media, sese certo excederent, contra 26 huius, quod fieri non potest, non igitur alia ab ipsa* G B *ipsi* A B *congruet. Minori itaque vna tantùm congruit recta, &c.*

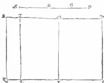
Propositio octuagesimatertia.

Cum certo medium totum efficienti vna tantum congruit recta linea, potentia toti incommensurabilis subsistens, & cum tota efficiens conflatum, ex ipsarum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum.

Esto cum certo medium totum efficiens A B, *cui congruat* G B, *qualis hic supponitur: Dico ipsi* A B *nullam aliam eius denominationis ab ipsa* G B *posse congruere. Si secus fieri possit congruat* D B *recta. Erunt itaque* A D D B *rectæ potentiæ incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum. Quare ne diutius ingenia torqueamus simili præhabitorum argumento patebit. Quadrata ex* A D D B *media (ex hypothesi) eodem excedere quadrata ex* A G G B *media, quo rectangula sub* A D D B *bis sumpta certa, rectangula bis sub* A G G B *sumpta, certa excedunt, scilicet certo, cum sint certum comprehendentia, per hypothesim. Quod fieri non potest, contra 26 huius. Non igitur ipsi* A B *alia quam recta* B G *congruet eius nominis. Efficienti itaque cum certo medium totum, vna, &c.*

Propositio octuagesimaquarta.

Cum medio medium totum efficienti vna tantum congruit recta linea, potentia toti incommensurabilis existens, & cum tota efficiens conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis medium, & incommensurabile conflato ex earum quadratis.



Esto cum medio medium totum efficiens A B, *sibi verò congruat* G B, *quæ eius sit naturæ, vt exoptat theorema: Dico nullam aliam eiusdem naturæ ipsi* G B, *rectæ* A B *congruere, quod si fieri posse credamus, congruat ipsi* A B *recta* D B. *Itaque* A D D B *rectæ, potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis medium, & insuper incommensurabile conflato ex earum quadratis. Huius & octuagesimaprimæ eadem erit demonstratio. Exponatur certa* R Z, *cui applicetur (per 45 primi) æquum quadratis ex* A D D B *quod sit* R C, *æquum verò quadratis* A G G B, *sitq́;* R I, *æquum autem quadrato* A B *sit* R L. *Quoniam patuit (ex septima secundi) si à quadratis ex* A D D B *tollamus quadratum* A B, *supererit quod bis sub* A D D B. *Quare ab ipso* R C *ablato* R L, *reliquum* T C *est quod bis sub* A D D B *æquum erit, similiter &* T I *est quod bis sub* A G G B. *Cùm enim media sint quadrata ex* A D D B, *& ex* A G G B, *nec non sub ipsis rectangula, ex hypothesi, media erunt* R C R I T C T I *ipsis æqualia, quæ ad certam* R Z *comparata, latitudines* R N R M T N T M *certas efficiunt, per vigesimamsecundam huius. Quia rectangula bissumpta incommensurabilia sunt (ex hypothesi) quadratis, incommensurabilia erunt eis æqualia, scilicet* R C *ipsi* T C *ac præter hæc* R I *ipsi* T I. *Et idcirco (per primam sexti) incommensurabiles longitudine erunt* R N *ipsi* T N *&* R M *ipsi* T M. *Quæ quidem certa fuerunt. Ipsa itaque* R N N T *certæ potentia tantùm sunt commensurabiles, & proinde reliqua* R T *apotome, per septuagesimãtertiam huius. Nec secus ipsæ* R M M T *certæ potentia tantùm sunt commensurabiles. Et proinde reliqua* R T *erit apotome, cui quidem congruerent binæ* T N T M *certæ, potentia toti tantùm commensurabiles, contra septuagesimamnonam huius, quod est absurdum. Non itaque alia quadam ipsi* A B *congruet quam* B G *eius nominis. Efficienti igitur cum medio medium totum, vna tantùm congruit, &c.*

APOTOMARVM DIFFINITIONES.

Trium priorum suppositio.

Supposita certa & Apotome, si quidem tota congruente maius possit eò quòd fit ex sibi longitudine commensurabili.

Diffinitio prima hoc posito.

Si tota suppositę certę longitudine fuerit commensurabilis, appellatur Apotome prima.

Diffinitio secunda.

Si congruens suppositę certę longitudine fuerit commensurabilis, vocatur Apotome secunda.

Diffinitio tertia.

Si neutra propositæ certæ longitudine commensurabilis fuerit, tertia appellatur

appellatur Apotome.

Trium posteriorum suppositio.

Supposita Certa & Apotome, si tota congruente maius possit eò quòd fit ex sibi longitudine incommensurabili.

Diffinitio quarta.

Si tota expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, appellatur Apotome quarta.

Diffinitio quinta.

Si congruens expositæ Certæ fuerit longitudine commensurabilis, dicetur Apotome quinta.

Diffinitio sexta.

Si autem neutra expositæ Certæ longitudine fuerit commensurabilis, vocatur Apotome sexta.

Priorum incertarum ordinem sequuntur hæ ab ipsis genitæ, quo scilicet prima harum incertarũ (quæ apotome dicta est) senaria acceptione diffinita fuit, veluti binomium, quæ priorum incertarum sex prima, sextupla diffinitione exposita fuit, vtroque tamen ordini, tribus prioribus, maius nomen plus posse minore, eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili, ascriptum est. Tribus posterioribus verò ab incommensurabili, quæ sola est trium priorum à tribus postremis discrepantia apud vtrasque, vt iam antea diximus.

Propositio octuagesimaquinta. *Problema 19.*

Inuenire primam Apotomen.



Exponatur certa A *sint verò duo numeri, quadrati* D E D Z *sese excedentes non quadrato (per coroll. primi lemmatis 28 huius)* Z E, *ipsi* A *longitudine fiat commensurabilis* B I, *fiat autem sicut* D E *ad* E Z, *sic quod ex* B I *ad id quod ex* I G, *per coroll. sextæ huius, excedat autem quadratũ* B I *id quod ex* I G, *quadrato quod ex* T. *Cùm autem* D E *quadratus, ad* E Z *nõ quadratum rationem non habeant quam quadrati numeri, per coroll. 25 octaui, quadrata* B I *&* I G *(eam rationem habentia, ex hypothesi) potentia tantùm sunt commensurabilia, per quartam partem nonæ huius, sed* B I *(certæ à longitudine cõmensurabilis) certa est, & igitur certa erit* I G, *per sextã diffini. huius. Certæ itaque potentia tantùm commensurabiles* B I I G, *efficiunt reliquam* B G *apotomen, per 73 huius. Dico quòd & primam, cùm enim sit quod ex* B I *antecedens ad quod ex* I G *consequens, sicut* D E *antecedens ad* E Z *consequens, erit quod ex* B I *ad quod ex* T, *quo excedit suum consequens* I G, *sicut* D E *ad excessum* D Z, *per coroll. 19 quinti, sed* D E *ad* D Z *quadrati, rationem habent quadratorum, igitur* B I *ad* T *rationem habent quam quadrati numeri, & proinde latera longitudine habent commensurabilia, per nonam huius. Quod itaque ex* B I *tota, maius potest congruente* I G, *eò quòd ex* T *sibi longitudine commensurabili, tota verò* B I *expositæ à longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque* B G *erit apotome prima, per primam diffinitionem apotomarum. Inuenimus igitur primam apotomen.*

Propositio octuagesimasexta. *Problema 20.*

Inuenire secundam Apotomen.

Exponatur certa A, sit præterea (vt in præfata) numerus DE quadratus, excedens quadratum EZ non quadrato DZ per coroll. primi lemmatis 28 huius, ponatur item linea recta GI, longitudine propositæ certæ A commensurabilis, quæ igitur certa erit (per sextã diffinitionem huius) fiat autem (per coroll. sextæ huius) sicut DZ ad DE, sic quod ex GI ad quod ex IB, quorum maius BI plus possit minore GI eò quòd ex T, quoniam (per coroll. 25 octaui) DZ ad DE non habent rationem quã quadrati, quadrata ex GI & IB (eandem rationem habentia) erunt potentia tantùm commensurabilia, per nonam huius. Certæ autem sunt binæ BI IG, per sextam diffinitionem huius. fuit enim IG certa, reliqua igitur BG apotome erit, per 73 huius: Dico quod secunda, quoniam enim fuit vt DZ ad DE, sic quod ex GI ad quod ex IB, erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti) DE ad DZ, sicut quod ex IE ad quod ex IG. Igitur conuersione rationis erit (per coroll. 19 quinti) DE ad EZ excessum, quo excedit consequens DZ, sicut quod ex IB ad quod ex T excessum, quo excedit suum consequens quod ex GI, sed DE ad EZ habet rationem quadratorum, cùm sint ex hypothesi quadrati, quod igitur ex IB ad quod ex T rationem habet quadratorum numerorum, lateræ itaque BI & T longitudine commensurabilia erunt, per nonam huius, tota itaque BI maius potest congruente IG eò quod ex T sibi longitudine commensurabili, congruens verò GI propositæ A longitudine fuit commensurabilis. Reliqua igitur BG erit apotome secunda, per secundam diffinitionem apotemarum. Inuenimus itaque secundam Apotomen.

Propositio octuagesimaseptima. Problema 21.

Inuenire tertiam Apotomen.

Esto certa proposita A, sint etiam bini numeri quadrati BG BD sese non quadrato DG excedentes. Sit item non quadratus numerus ipsi DG vnitate vel binario proximus E, fiat autem sicut E ad BG sic quod ex A ad quod ex ZI. Sicut verò BG ad GD, sic quod ex ZI ad quod ex IT. Possit autem ZI maius, recta IT quadrato K. Quoniam A certa ponitur ad ZI (potentia) sicut numerus E non quadratus ad BG quadratum, rationem quadratorum non habentes, per coroll. 25 octaui. Ipsæ A & ZI longitudine incommensurabiles erunt, per nonam huius. Quia verò fuit sicut E ad BG, sic quod ex A ad quod ex ZI, sicut verò BG ad GD sic quod ex ZI ad quod ex IT. Erit æqua ratione sicut E ad DG, sic quod ex A ad quod ex IT, per 22 quinti. Sed E ad DG non habẽt rationẽ quam quadrati, cum sint in ratione superparticulari aut superbipartiẽte, per coroll. vigesimæsextæ octaui. Quadrata igitur ex A & IT non habent rationẽ quadratorum. Ipsæ itaque A & IT rectæ, longitudine incommensurabiles existunt, per nonam huius. Neutra igitur ipsarum ZI IT propositæ A longitudine commensurabilis erit. Potentia tamen commensurabiles ipsi A erunt, cum habeant ad ipsam A rationem numerorum. Quare certæ erunt ZI IT, & inter se longitudine incommensurabiles, cum earum quadrata sint sicut quadratus BG, ad non quadratum DG numerum, per nonam huius. Binæ itaque ZI IT certæ, potentia tantùm commensurabiles, efficiunt reliquam ZT apotomen, per 73 huius: Dico & tertiam. Quoniam positum est esse sicut BG ad GD, sic quod ex ZI ad quod ex IT. Erit (ex coroll. 19. quinti) sicut BG ad excessum BD, quo excedit suum consequens GD, sic quod ex ZI ad quod ex K excessum, quo excedit suum consequens quod ex IT. Sed BG & BD habent quadratorũ rationem, cum sint quadrati. Igitur quod ex ZI & quod ex K rationem habebunt quadratorum. Longitudine igitur commensurabiles erunt rectæ ZI & K. Binarum igitur certarum ZI & IT potentia tantùm commensurabilium ostensarum, maior seu tota ZI, maius potest minore IT, eò quòd ex K sibi longitudine commensurabili. Neutra verò ipsarum ZI & IT longitudine ipsi A propositæ commensurabilis, fuit. Reliqua itaque ZT erit apotome tertia, per tertiam diffinit. apotomarum, inuenimus igitur ZT apotomen tertiam.

Propositio octuagesimaoctaua. Problema 22.

Inuenire Apotomen quartam.

Expo

Exponatur certa A cui commensurabilis existat B I, quæ ideo certa erit. Sit autem numerus non quadratus compositus ex duobus quadratis, per secundum lemma vigesimæoctauæ huius, vel quadratus sectus in duos non quadratos, quod idem proferet, sitq́ D E sectus in Z. Sit autem (per coroll. sextæ huius) sicut D E ad E Z, sic quod ex B I ad quod ex I G. Plus tamen possit B I ipso I G quadrato rectæ T. Commensurabile erit quod ex B I ei quod ex I G, per sextã huius. Certa igitur erit I G, per sextam diffinitionem huius. Quia verò B I ad I G quadrata, rationem habẽt quam quadratus D E, ad non quadratum E Z, eorum latera, recta scilicet B I & I G, longitudine incommensurabilia erunt. Binæ itaque B I I G certæ potentia tantùm commensurabiles erunt. Reliqua igitur B G apotome dicetur, per septuagesimãtertiã huius Dico quod & quarta. Cùm enim fuerit ità D E ad E Z vt quod ex B I ad quod ex I G. Erit conuersione rationis D E ad excessum D Z, vt quod ex B I ad quod ex T excessum, quo excedit suum consequens quod ex I G, per coroll. 19 quinti. Sed D E quadratus ad E Z non quadratum, non habet rationem quam quadrati numeri per coroll. 25. octaui. Quod igitur ex B I ad quod ex T non habet rationem quam quadrati numeri. Nec ideo (per nonam huius) latera B I & T longitudine commensurabilia erunt. Binarum igitur certarum B I I G potentia tantùm commensurabilium. Tota B I plus potest ablata I G, eò quòd ex T sibi longitudine incommensurabili. Tota verò B I propositæ certa A longitudine fuit (ex hypothesi) commensurabilis. Reliqua igitur B G apotome erit quarta, per quartam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque quartam apotomen.

Propositio octuagesima nona — *Problema 23.*

Inuenire apotomen quintam.

Proposita certa esto A, cui commensurabilis existat G I longitudine, quæ ideo certa erit. Sit insuper vt proxima priore diximus, numerus non quadratus constans duobus quadratis D Z Z E, hic D E, per secundum lemma vigesimæoctauæ huius. Sit autem quadratum B I ad id quod ex I G sicut D E ad E Z, per coroll. sextæ huius. Ipsæ itaque B I & I G certæ potentia commensurabiles erunt, per sextam huius, rationem numerorum habentes, sed potentia tantùm, cum numerorum non quadrati ad quadratum rationem habeant, & latera igitur longitudine incommensurabilia, per nonam huius. Reliqua proinde B G apotome erit, per septuagesimamtertiam huius. Dico quod & quinta, possit recta B I maius ipsa I G eò quòd ex T, cum sit quadratum B I ad quod ex I G, sicut D E ad E Z. Erit igitur (per coroll. 19 quinti) quadratum B I ad quod ex T excessum, sicut D E ad D Z excessum, qui quidem D E & D Z rationem non habent quadratorum. Nec igitur B I ad T potentia, rationem habebit quadratorum, nec ideo ipsa B I & T latera, longitudine commensurabilia erunt, per nonam huius. Tota igitur B I plus potest congruente I G eò quòd ex T sibi longitudine incommensurabili. Congruens autem (ex hypothesi) propositæ A longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque B G apotome, dicetur quinta, per quintam diffinitionem apotomarum. Inuenimus itaque apotomen quintam.

Propositio nonagesima. — *Problema 24.*

Inuenire Apotomen sextam.

Esto proposita certa A, sit verò (vt proximis prioribus) quadratus numerus B G, diuisus in B D & D G non quadratos. Sit item alius non quadratus vnitate vel binario distans ab ipso D G, qui sit E. Sit autem sicut E ad B G, sic quadratũ certæ A ad quod ex Z I, certa ideo erit Z I. Sicut verò B G ad G D, sic quod ex Z I ad quod ex I T, per corol sextæ huius, certa erit I T, per sextam diffinitionem huius, quoniam enim maior est B G ipsa G D, maius erit quod ex Z I eo quòd ex I T, sit eò quòd ex K, quoniã numerus E non quadratus ad quadratũ B G est in ratione quadrati A ad quod ex Z I, ipsarum A & Z I potentia rationem quadratorum non habent, & proinde

ipsæ A *&* Z I *longitudine incommensurabiles erunt. quia similiter* E *ad* G B, *&* B G *ad* G D *fuerint ut quadrata* A *ad* Z I, *&* Z I *ad* I T. *Erit æqua ratione (per 22 quinti)* E *ad* D G, *sicut quadrata* A *ad* I T, *sed* E *ad* D G *rationem non habet quadratorum, per corollarium 26 octaui. Quadrata igitur* A *&* I T *rationem quadratorum numerorum non habebunt, & proinde (ex nona huius) incommensurabiles erunt lõgitudine ipsæ* A *&* I T. *Certæ tamen potentia tantùm cõmensurabiles ideo erunt ipsæ* Z I I T, *cùm habeant ad se rationẽ numerorum* B G *&* G D, *qui quadratorũ rationem non habẽt. Reliqua igitur* Z T *apotome erit, p 73 huius. Dico quod & sexta: nã cùm sit* B G *ad* G D *sicut quadrata* Z I *ad* I T, *Erit* B G *ad excessum* B D, *sicut quadratum* Z I *ad excessum, quod ex* K, *quo excedit suum consequens ex* I T *conuersione rationis, per corollarium 19 quinti: sed* B G *ad* B D *non quadratum, ratione quadratorum caret, per corollarium 25 octaui. Quadrata igitur* Z I *&* K *rationem quaratorum numerorum non habẽt, nec proinde latera* Z I *&* K *longitudine commẽsurabilia, per nonam huius. Tota itaq;* Z I *maius potest congruente* I T, *eò quod ex* K *sibi longitudine incommensurabili sed neutra ipsarum* Z I *&* I T *longitudine propositæ certæ* A *fuit commensurabilis, ut ostendimus, reliqua igitur* Z T *apotome erit sexta, per sextam apotomarum diffinitionem. Inuenimus itaque apotomen sextam.*

Propositio nonagesimaprima.

Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome prima, quæ areolã potest, Apotome est.

Cõtineatur areola A B *sub certa* A G *& apotome primæ* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *potest esse apotome, cùm* A D *sit apotome, ipsi una tantùm congruet recta, per 79 huius, quæ quidem sit* D I *secta bifariam in* E. *Ei vero quod à dimidia ipsius* D I *(hoc est* D E, *vel* E I) *æquum ad totam* A I *comparetur, deficiens specie quadrata, per 28 sexti, sitque quod sub* A Z Z I, *Per signa verò* D E Z I *ipsi* A G *parallelæ ducãtur* B D T E C Z K I *& producta* G B *in* K, *perficiatur rectãgulum* A K, *ipsi porro* A C *æquum fiat (per 14 secundi) quadratum* L M, *à quo ablatũ quadratum æquum ipsi* Z K, *cõmunem habẽs angulũ* L O M *toti quod sit* N X: *illud quippe (per 26 sexti) circum eandem dimetientem est toti* L M, *sit itaque dimetiẽs* R O, *perficiatúrque* S O H *gnomon, productis* N H *&* X S. *Cùm autem æquum sit* A C *quadrato* L M, *&* Z K *æquũ ipsi* N X, *totum* A K *binis* L M N X *quadratis æquum erit quia verò (per constructionem) æquum est quod sub* A Z Z I *quadrato* E I, *vel* D E. *Ipsa* D E *inter rectas* A Z Z I *media proportionalis erit, per secundam partem 17 sexti: & igitur (per primam sexti) medium proportionale erit* D T, *inter* A C *&* Z K. *sed quoniam ipsis* A C *&* Z K *æqualia sunt quæ ex* L O *&* N O, *quadrata scilicet* L M N X, *inter quæ medium est proportionale, quod sub ipsis scilicet* L X, *per corollarium 25 huius. Aequum igitur erit* L X *ipsi* D T, *sunt enim æqualium extremorum media proportionalia: quia verò ipsius* D T *duplum est* D K, *per primam sexti. Est enim* D E *dimidia ipsius* D I, *at ipsius* L X *duplus est gnomon* S O H *cum quadrato* N X, *cùm sint æqualia* N S *et* X H *supplemẽta per 43 primi. Totum igitur* D K *æquũ erit gnomoni* S O H *cum quadrato* N X, *sed totum* A K *æquum fuit toti* L M, *& quadrato* N X *reliquum igitur* S H *quadratum reliquo* A B *æquum erit. Cum insuper* A D *sit prima apotome, certæ potentia tantum commensurabiles erunt* A I I D, *totáque* A I *ipsi* A G *expositæ longitudine commensurabilis, ac tota* A I, *congruente* D I *maius potest, eò quod fit ex sibi longitudine commensurabili, per primam apotomarum diffinitionem, & igitur (per secundam partem 17 huius) quod sub* A Z Z I *æquum quartæ parti eius quod à minore* D I, *secat maiorem* A I *in* Z *per commensurabilia longitudine. Vtraque igitur* A Z *&* Z I *toti* A I *longitudine commensurabiles erunt, per undecimam huius. Ipsi verò* A G *commensurabilis fuit tota* A I *longitudine, & eidem itaque* A G *utraque* A Z *&* Z I *commensurabilis erit (per secundum corollarium decimæ huius) longitudine. Quæ igitur sub ipsis scilicet* A C A K Z K *certa erunt, per 19 huius, quare quadrata* L M N X *ipsis certis æqualia certa erunt, & ideò recta* L O *&* N O *(quadrata certa potentes) certæ erunt. Caeterùm quia* A I *&* D I *sunt potentia tantùm commensurabiles, ipsæ longitudine incommensurabiles erunt: & proinde (ex prima sexti) incommensurabilia erunt* A K *&* D K, *Quia vero* Z K *ipsi* A K *commensurabile fuit, incommensurabile erit idem* Z K *ipsi* D K, *per secundum*

corollar

corollarium 10 huius, & ipsius D E dimidio E K, incōmensurabile, [illegible] erit idem Z K, per præfatū corollariū. Incommensurabilia igitur adinuicem erunt L X & N X, ipsis E K & Z K æqualia & ideo rectæ L O O N longitudine (per primam sexti) incommensurabiles erunt sed illæ certa ostensæ sunt. Potentia tantum itaque commensurabiles erunt, certæ L O O N. reliqua igitur L N apotome erit, per 73 huius, quæ quidem potest quadratum S H ipsi A B æquum ostensum. Si itaque areola A B sub certa A G, & apotome prima A D comprehendatur, quæ areolā potest, scilicet L N apotome erit. Huius fusiorem discussimus demonstrationem, ut eius constructio quinque sequentibus subsidietur.

Propositio nonagesimasecunda.

Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome secunda, quę areolam potest, Mediæ est apotome prima.

Comprehendatur nanque areola A B sub certa A G & apotome secunda A D. Dico rectā quæ areolam A B potest, esse apotomē primam mediæ. Cùm enim A D sit apotome, ipsi una tantùm cōgruet, quæ sit (per 79 huius) D I, reliqua item more præcedentis construantur. Cōgruens igitur D I, ipsi propositæ A G longitudine commensurabilis erit, totáque A I maius congruente D I poterit à sibi longitudine commensurabili, per secundam diffinitionem apotomarum. Igitur D K, sub A G & D I comprehensum, certum erit, per 19 huius, & proinde eius dimidium E K certum erit. Cùm autem A G & D I sint longitudine commensurabiles, alteráque earum D I cuidam A I incommensurabilis existat, nomina sunt enim apotomes. & reliqua A G eidem A I incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius quare (per 21 huius) medium erit A K. Quia vero A I maius potest ipsa D I à commensurabili lōgitudine, recta A I secatur in Z, per commensurabilia longitudine, ut proxima diximus, per 17 huius quare tota A I utrisque ipsarum A Z Z I longitudine commensurabilis erit per undecimam huius & proinde totum A K medium, utrique A C & Z K (per primam sexti) commensurabile erit. Et ideo media erunt (per corollarium 23 huius A C & Z K: quare media erunt quadrata, L M & N X, per constructionem eis æqualia. Mediæ itaque erunt L O & N O ipsa media potentes, per vigesimam primam huius. Cùm autem L X sit æquale ipsi E K certo, ipsum L X certum erit, medium verò fuit N X. Ipsa igitur L X & N X incommensurabilia erunt, & idcirco (per primam sexti) rectæ L O O N longitudine incommensurabiles erunt. Mediæ autem fuerunt L O & O N potētia commēsurabiles, certum L X comprehendentes, cum sint N O O X rectæ æquales. Reliqua igitur L N erit per 74 huius, mediæ apotome prima, quæ quidem potest quadratum S H, æquum ipsi A B, sub certa A G & apotome secunda A D cōprehenso, ipsa itaque L N ipsum A B potest. Si igitur areola comprehendatur, &c.

Propositio nonagesimatertia.

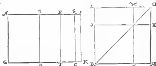
Si areola comprehendatur sub certa & apotome tertia, quę areolam potest, Mediæ est apotome secunda.

Areola nanque A B sub certa A G & apotome tertia A D cōprehendatur: Dico rectam quæ aream A B potest, esse mediæ apotomen secundam. Construantur etenim quæ prioribus proximis, ut ipsius A D apotomes congruēs sit D I, certæ itaque potētia tantùm commensurabiles erunt A I D I, quia verò tertia est apotome

AD tota AI maius poterit congru[illegible] DI, eo quod sit à sibi commensurabili longitudine, & insuper ipsarũ AI DI neutra proposit[a]e AG longitudine cõmensurabilis erit, per tertiam diffinitionem apotomarum. Media igitur erunt AK & DK, per 21 huius, sibique inuicem incommensurabilia, per primam sexti, cum AI & DI longitudine sint incommensurabiles, per constructionem, cùm autem (ut proximis ostendimus) tota AI secta sit in Z per commensurabiles longitudine, AZ ZI, per applicationem æqualis ei quod à dimidia DE minoris DI, scilicet quod sub AZ ZI, commensurabilia erunt (per primam sexti) ACZK adinuicem, & toti AK per undecimam huius, cum autem AK & DK fuerint incommensurabilia, ipsi autem AK commensurabile fuit ZK, ipsi vero DK commensurabile fuit EK, eius dimidium, ipsa itaque ZK & EK incommensurabilia erunt, per coroll. tertium decimæ huius, cæterùm cùm media sint AC ZK, media erunt quadrata LMNX (eis æqualia constructa) & cõmensurabilia sicuti, & illa ACZK. Binæ igitur LO ON (illa potentes) mediæ erunt (per 21 huius) & potentia commensurabiles, & tantùm, nam rectangula LXNX æqualia sunt (per constructionem) ipsis EKZK incommensurabilibus ostensis, & ideo (per primam sexti) recta LO ON in ipsorum LXNX ratione, erunt longitudine incommensurabiles. Binæ igitur mediæ LO ON potentia tantùm cõmensurabiles, comprehendunt LX medium, cum sit æquum ipsi EK, medij DK dimidio, reliqua igitur LN erit apotome secunda, media, per 75 huius, quæ quidem LN potest quadratum SH æquum constructum ipsi AB. Eadem itaque LN mediæ apotome secunda, poterit ipsum AB sub certa AG & apotome tertia AD comprehensum. Si igitur areola comprehendatur, &c.

Propositio nonagesimaquarta.

Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome quarta, quæ areolam potest, Minor est.



Supponatur areolam AB sub certa AG et apotome quarta AD contineri. Dico rectam hanc areolam potentem, minorem dici, congruat ipsi AD apotome unica DI, per 79 huius, quia apotome est AD binæ AI DI sunt certæ potentia, tantùm commẽsurabiles, per 73 huius, quia vero est quarta, tota AI maius potest congr[u]ente DI eò quòd à sibi longitudine incommensurabili. & tota AI propositæ certæ AG longitudine commensurabitur, per quartam diffinitionem apotomarum, & proinde (constructis priorum typis) certum erit AK sub certis AI AG contentum, per 19 huius, medium verò DK, cùm certa DI sit potentia tantùm commensurabilis ipsi AG, ex 73 huius, sub DI & AG comprehensum, quia verò maior AI maius potest minore DI eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, quartæ parti eius quod à minore æquum quod sub AZ ZI maiori AI applicatum, secat ipsam AI per incommensurabiles longitudine rectas, AZ ZI per secundam partem 18 huius, quare (per primam sexti) incommensurabilia erunt ACZK, & (per 12 huius) igitur AK & ZK incommensurabilia erunt, rursus cum ACZK sint incommensurabilia, incommensurabilia erunt & quadrata LMNX ipsis æqualia, & proinde recta LO ON ipsa quadrata potẽtes potentia incommensurabiles erunt. quia verò AC ZK componunt certum AK, ipsa quadrata LM NX quæ ex ipsis LO ON certum componunt, quia insuper DK fuit mediũ, & proinde EK (eius dimidium) medium erit, & ideo LX ipsi EK æquale constructum medium erit, quod quidem sub ipsis LO ON (vel OX) comprehẽditur. Binæ igitur recta LO ON, potentia incommensurabiles, efficiunt compositum ex earum quadratis LMNX certum, quod verò sub ipsis LX mediũ. Reliqua itaque LN erit minor, per 76 huius, quæ quidem potest quadratũ SH, æquum ipsi AB cõstructum, ipsa igitur LN (quæ minor dicitur) poterit areolam AB, sub certa AG & apotome quarta, AD comprehensam. Si ergo areola comprehendatur sub certa & apotome quarta, quæ areolam potest, Minor est.

Propositio nonagesimaquinta.

Si areola comprehendatur sub Certa, & Apotome quinta, quæ areolam potest, est quæ Cum certo medium totum efficit.

Comprehendatur area A B *sub certa* A G *& apotome quinta* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *potest, dici cum certo medium totum efficientem. Quoniam apotome quinta est* A D, *congruat illi* D I, *& reliqua vt prioribus construantur. Rectæ itaque* A I *&* D I *certæ potentia tantum erunt commensurabiles, per 73 huius. Et quia congruens* D I *certæ propositæ* A G *est longitudine commensurabilis, per quintam diffinitionem apotomarum. Reliqua* A I *eidem* A G *(per coroll. secundum decimæ huius) longitudine incommensurabilis erit. Quare medium erit* A K, *per 21 huius. Certum item erit* D K, *per 19 huius, & eius dimidium* E K *certum, per coroll. 23 huius. Quia verò ad maiorem* A I *applicatur quod sub* A Z Z I, *deficiens specie quadrata, æquum ei quod à dimidia minoris* D I, *& maior* A I *maius potest minore* D I *à sibi longitudine incommensurabili, cùm sit apotome quarta* A D, *per quintam diffinitionem apotomarum. Ipsa igitur* A I *secta est in* A Z Z I *longitudine incommensurabiles, per secundam partem 18 huius. Et ideo (per primam sexti)* A C Z K *incommensurabilia erunt. Cùm autem quod ex* L O *quadratum* L M *æquum sit ipsi* A C, *quod verò ex* N X *ipsi* Z K. *Incommensurabilia erunt* L M *&* N X *quadrata. Et proinde rectæ* L O O N *(ipsa potentes) incommensurabiles erunt potentia, per quartam diffinitionem huius. Quia verò compositum ex earum quadratis* L M N X *(scilicet totum* A K *ipsis æquum) medium est. Quod vero sub ipsis* L O O N *contentum* L X *(cum* O N *&* O X *sint æquales) fuit æquum ipsi* E K *certo. Illud ideo* L X *certum erit. Duæ itaque rectæ,* L O O N *potentia sunt incommensurabiles, efficientes compositum ex earum quadratis* L M N X *medium. Quod vero sub ipsis* L O O N *(vel* O X*) rectangulum* L X *certum. Reliqua igitur* L N *vocatur cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Quæ quidem* L N *potest quadratum* S H, *ipsi* A B *(ex constructione) æquum, & exinde idem potest* A B *sub certa* A G *& apotome quinta* A D *comprehensum, ipsa* L N *cum certo medium totum efficiens vocata. Si igitur areola comprehendatur, &c.*

Propositio nonagesimasexta.

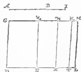
Si areola comprehendatur sub Certa & Apotome sexta, quæ areolam potest, est quæ Cum medio medium totum efficit.

Esto area A B *comprehensa sub certa* A G *& apotome sexta* A D: *Dico rectam quæ aream* A B *potest, vocari cum medio medium totum efficientem. Disponantur eadémque prioribus, tantum* A D *sit apotome sexta rectæ* A I. *Quoniam* A D *est apotome, rectæ* A I D I *certæ sunt potentia tantùm commensurabiles, inter se. Quia verò est sexta, ipsæ* A I D I *propositæ* A G *sunt similiter potentia tantùm commensurabiles, cum neutra longitudine ipsi* A G *propositæ commensuretur. Et insuper maior* A I *maius potest minore* D I *eò quòd à sibi longitudine incommensurabili, per sextam apotomarum diffinitionem, incommensurabilia igitur erunt* A K *&* D K, *per primam sexti, & media (per vigesimamprimam huius) sub* A I A G *& sub* A G D I *contenta. Medium igitur erit* E K *ipsius* D K *dimidium, per coroll. 23 huius, & incommensurabile ipsi* A K, *per secundum coroll. 10 huius. Quia item* A I *tota plus potest ipsa* D I *ab incommensurabili, applicatum sub* A Z Z I *ipsam secat per incommensurabiles* A Z Z I *longitudine, per secundam partem decimæoctauæ huius. Et ideo (per primam sexti) incommensurabilia sunt* A C Z K. *Quæ cum æqualia sint quadratis* L M N X *ipsarum* L O O N, *Rectæ* L O O N *potentia incommensurabiles erunt. Efficiunt autem compositum ex earum quadratis* L M N X, *æquum ipsi* A K *medio, per constructionem. Illud itaque compositum medium erit. Quod verò sub ipsis* L O O N *(vel* O X*) scilicet* L X, *æquum ipsi* E K, *medio ostenso, erit medium. Incommensurabile est autem illud* L K *compo-*

sito ex quadratis L M N X: *nam* A K & E K *(ipsis composito & L K æqualia) sint incommensurabilia ostensa. Binæ itaque rectæ* L O O N *potentia sunt incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum quadratis* L M N X *medium, quod vero sub ipsis* L X *medium, insuper incommensurabile conflato ex earum quadratis. Reliqua igitur* L N *est cum medio medium totum efficiens, per septuagesimamoctauam huius. Quæ quia potest quadratum* S H *æquum ipsi* A B, *ex constructione, poterit idem* A B, *sub certa* A G & *apotome sexta* A D *comprehensum. Si itaque areola sub certa & apotome sexta comprehendatur, &c.*

Propositio nonagesimaseptima.

Quod ex Apotome ad Certam comparatum, latitudinem efficit primam Apotomen.

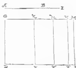


Esto apotome A B, *certa verò exposita* G D, *ei autem quod ex* A B *æquum ipsi* G D *comparetur (per 45 primi)* G E, *latitudinem efficiens* G Z. *Dico* G Z *esse primam apotomen, quoniam* A B *est apotome, congruat ei* B I, *per 79 huius, ei vero quod ex* A I *æquum ipsi* G D *comparetur, per 45 primi* G T, *latitudinem efficiens* G K, *ipsi vero quod ex* I B *æquum sit* K L, *latitudinem efficiens* K M *secetur autem* Z M *bifariam in signo* N, *ducta* N X *parallela ipsis* Z E M L, *quoniam* G T & K L *(hoc est totum* G L*) æquum est quadratis ex* A I I B, *reliquum verò* G E *æquum est quadrato ex* A B, *erit (per septimam secundi)* Z L *æquum ei quod bis sub* A I I B, *cuius* Z L *dimidium erit* N L, *per primam sexti, cùm secta sit* Z M *bifariam in* N, & *proinde æquum ei quod sub* A I I B *erit ipsum* N L *(vel* Z X*) cum autem apotome sit* A B, *certæ potentia tantùm commensurabiles erunt* A I I B, *per 73 huius, & proinde* G T K L *æqualia earum quadratis, certa erunt, & commensurabilia adinuicem, & ideo (per vndecimam huius) toti* G L *commensurabilia erunt certa* G T K L, & *inde certum erit totum* G L, *quare (per primam sexti)* G K K M *rectæ longitudine adinuicem, & toti* G M *commensurabiles erunt, quia verò certum est* G L, *ad* G D *certam protectum, latitudinem* G M *longitudine commensurabilem ipsi* G D *certam efficit, per vigesimam huius. Cæterùm quia medium est sub* A I I B *comprehensum, per 21 huius, cum* A I I B *fuerint certa potentia tantùm commensurabiles ostensæ, medium erit* N L *(aut* Z X*) sibi æquum, & proinde (per coroll. 23 huius) totum* Z L *duplũ, medium erit, quod ad certam* G D *comparatum, latitudinem* Z M *certam longitudine incommensurabilem ipsi* G D *propositæ certa efficit, per 22 huius, & proinde binarum* G D G M *commensurabilium. Altera* G D *alicui* Z M *incommensurabilis est, & reliqua* G M *eidem* Z M *incommensurabilis erit longitudine, per coroll. secundum decimæ huius, potentia igitur tantùm commensurabiles erunt rectæ* G M Z M, *cùm sint certa ostensæ: reliqua igitur* G Z *erit apotome, per 73 huius. Dico quod & prima, cũ enim inter quadrata ex* A I I B *sit medium proportionale, quod sub ipsis* A I I B, *per coroll. 25 huius, sequetur inter* G T K L *(ipsis quadratis æqualia) medium esse* N L *vel* Z X, *ei quod sub* A I I B *æquale ostensum, & igitur (per primam sexti) media erit* Z N *(vel* N M*) inter rectas* G B K M, & *proinde quod sub* G K K M *æquum erit ei quod ex* Z N *(vel* N M*) fiet, per decimamseptimam sexti. Quod igitur sub* G K K M *æquum quartæ parti eius quod fit à minore* Z M, *scilicet quadrato* Z N, *ad maiorem* G M *applicatur, deficiens specie quadrata, ipsámque* G M *(per commensurabilia longitudine secat in* K, *vt ostendimus, maior igitur (tota* G M*) maius potest minore,* Z N *congruente, eo quod fit a sibi longitudine cõmensurabili, per decimamseptimam huius, sed tota propositæ* G D *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua igitur* G Z *erit apotome prima, per primam apotomerum diffinitionem. Quod itaque ex apotome ad certam comparatum, &c.*

Propositio nonagesimaoctaua.

Quod ex Mediæ Apotome prima ad Certam comparatum, latitudinem efficit secundam Apotomen.

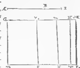
Sit A B *media prima apotome, certa verò proposita esto* G D, *cui comparetur æquum ei quod ex* A B *(per 45 primi) latitudinem efficiens* G Z *sitq;* G E *Dico* G Z *secundam esse apotomen, ipsi* A B *mediæ apotome primæ congruat vnica* B I, *per 80 huius, & (per proximæ constructionem) quadrato* A I *sit æquum* G T, *quadrato vero* B I *æquetur* K L, *et igitur quod bis sub* A I I B *æquum erit* Z L, *per septimam secundi, sectum bifariam per* N X, *vt ei quod sub* A I I B *æquetur quisque horum* Z X, *aut* N L, *igitur ipsæ* A I I B *sunt mediæ potentia tantum commensurabiles, per 74 huius, quodque sub ipsis* A I I B *certum est, quare quadrata ex* A I I B *medio, commensurabilia erunt, & proinde* G T K L *(ipsis æqualia) media commensurabilia erunt, & ideo (per primam sexti)* G K K M *rectæ longitudine commensurabiles erunt, quia verò quod sub* A I I B *certum fuit, certum erit* N L *ipsi æquale, & certum* Z L *ipsius* N L *duplum, quod ad certam* G D *proiectum, latitudinem* Z M *certam longitudine ipsi* G D *propositæ commensurabilem efficit, per vigesimam huius, quia insuper media commensurabilia fuerunt* G T K L *adinuicem, & toti* G L *commensurabilia erunt, per vndecimam huius. Medium igitur (per coroll. 23 huius) erit* G L, *quod quidem ad certam* G D *proiectum, latitudinem* G M *certam longitudine ipsi* G D *incommensurabilem efficiet, per 22 huius, quia verò certarum cõmensurabilium* G D Z M *altera* G D *ipsi* G M *incommensurabilis est, & reliqua* Z M *eidem* G M *incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius, sed potentia sunt commensurabiles, cùm sint certa. Reliqua igitur* G Z *erit apotome, per 73 huius: Dico quod & secũda, nam tota* G M *secta fuit in* K *per commensurabilia longitudine, per id quod sub* G K K M *et applicatum, æquale ei quod fit à dimidia minoris* Z M *deficiens specie quadrata maior ideo* G M *plus poterit minore* Z M, *eò quòd fit à sibi longitudine commensurabili, per 17 huius, sed congruens* Z M *propositæ certæ* G D *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua igitur* G Z *dicetur apotome secunda, per secundam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex mediæ apotome prima ad certam comparatum, &c.*



Propositio nonagesima nona.

Quod ex Mediæ apotome secũda, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen tertiam.

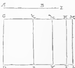
Supponatur recta A B *media apotome secunda, certa verò proponatur* G D, *cui æquũ ei quod ex* A B *comparetur, per 45 primi,* G E, *latitudinẽ efficiens* G Z *Dico* G Z *tertiam esse apotomen. Congruat ipsi* A B *recta* B I, *per octuagesimã primam huius. Reliqua vt prioribus construantur, quibus scilicet* G T *sit æquum quadrato* A I, *&* K L *quadrato* I B, *ac* G E *quadrato* A B, *&* Z L *ei quod bis sub* A I I B, *sectum bifariã per* N X. *Cùm* A B *sit mediæ apotome secunda, binæ* A I I B *media sunt potentia tantùm commensurabiles medium comprehendentes, per 75 huius: & hac de causa earum quadrata media erunt, & commensurabilia & proinde media commensurabilia erunt* G T K L, *ipsis æqualia, quæ cùm sint toti* G L *commensurabilia, per vndecimam huius, ipsum* G L *medium efficient, per corollarium 23 huius, quare (per primam sexti) commensurabiles erunt* G K K M *adinuicem, & toti* G M, *quæ quidem sunt certæ, cum sint latitudines mediorum* G T K L G L *ad certum* G D *applicatorum. per 22 huius, & longitudine incommensurabiles ipsi* G D *propositæ: quia verò quod sub* A I I B *cõprehensum medium diximus, medium erit* N L *ipsi æquum, & proinde* Z L *(ipsius* N L *duplũ) medium erit, per corol. 23 huius, quod ad certam* G D *proiectum, latitudinem* Z M *certam longitudine ipsi* G D *incommẽsurabilem efficiet, per 22 huius. Cum autem incommensurabiles longitudine fuerint* A I I B *rectæ · sit autem vt* A I *ad* I B, *sic quod ex* A I *ad quod sub* A I I B, *per lemma 21 huius, quadratum* A I *rectangulo sub* A I I B *incommensurabile erit: & ideo* G T N L *ipsis æqualia incommensurabilia erunt. quia vero ipsis* G T N L *incommensurabilibus, commensurabilia fuerunt* G L *ipsi* G T, *&* Z L *ipsi* N L, *ea quoque* G L *&* Z L *incommensurabilia erunt, ex tertio corollario decimæ huius & igitur (per primam sexti) ipsæ* G M Z M *certæ, longitudine incommensurabiles erunt. Potentia ideo tantum commensurabiles, reliqua autem* G Z *erit a-*



potome, per 73 huius. Dico quod & tertia. Cùm ad maiorem G M cõparetur quod sub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M, ipsamque (deficiens specie quadrata) per commensurabilia longitudine G K K M secuerit, per cõstructionem, maior G M maius poterit minore Z M, eo quod fit à sibi lõgitudine commensurabili, per 17 huius, sed neutra harum scilicet G M Z M, fuit longitudine propositæ certæ G D cõmensurabilis, vt ostensum fuit. Reliqua igitur G Z erit apotome tertia, per tertiã diffinitionem apotomarum. Quod ideo ex media apotome secunda ad certam comparatum, &c.

Propositio centesima.

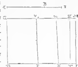
Quod ex Minore ad Certam comparatum, latitudinem efficit quartam Apotomen.



Esto minor A B cui congruat vnica I B, per 82 huius, certa item proposita sit G D, cui comparetur (per 45 primi) æquum ei quod ex A B minore, sitque G E latitudinem efficiens G Z. Dico G Z esse quartam apotomen. construatur (more priorum) figura quæ ipsarum A I I B quadratis & rectangulis suis æqualia G Y K L & Z X N L. Cum autẽ A I I B sint potẽtia incommensurabiles, per 76 huius, erunt earum quadrata incommẽsurabilia. Et proinde G Y K T (ipsis æqualia) incõmẽsurabilia erunt. Et ideo rectæ G K K M incommensurabiles erunt longitudine, per primam sexti quia verò conflatum ex quadratis A I I B certum est, per eandem 76 huius, certum erit G L ipsis æquum. Certa igitur erit G M longitudine propositæ G D commẽsurabilis, cùm sit latitudo certi G L ad certam G D proiecti, per vigesimã huius, quia insuper quod sub ipsis A I B I medium est, per eandem 76 huius. Medium erit Z L ipsis æquum, quod ad certam G D applicatum, latitudinem Z M certam longitudine incommensurabilem ipsi G D propositæ certæ efficiet, per 22 huius. Cum autem certum G L incommensurabile sit medio Z L, rectæ G M certa, certæ L M (per primam sexti) longitudine incommensurabilis erit, potentia igitur tãtum commensurabiles erunt certæ G M Z M, reliqua itaque G Z apotome erit, ex 73 huius. Dico quod & quarta. cùm ad totam G M comparetur quod sub G K K M, æquum quartæ parti eius quod à minore Z M, deficiens specie quadrata, ipsámque G M secet in G K K M longitudine incommensurabilia, vt patuit, maior (G M tota) maius poterit minore (Z M congruente) eo quòd fit à sibi lõgitudine incõmensurabili, per 18 huius. Sed tota G M propositæ certæ G D longitudine fuit commensurabilis. Reliqua itaque G Z apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinitionem. Quod itaque ex minore ad certam comparatum, &c.

Propositio centesimaprima.

Quod ex ea quæ Cum certo medium totum efficit, ad Certam comparatum, latitudinem efficit Apotomen quintam.



Sit A B cum certo mediũ totum efficiens, cui vnica congruat I B, per octuagesimamtertiam huius. Proposita autem certa esto G D, cui (per quadragesimamquintam primi) comparatum æquum ei quod ex A B sit G D, latitudinem efficiens G Z. Cætera verò construantur ex præassumptis figurarum comparationibus: Dico G Z esse quintam apotomen. Quoniam A B est, cum certo medium totum efficiens, binæ rectæ A I I B potentia sunt incommensurabiles, per septuagesimamseptimam huius. Earum igitur quadrata & proinde (ipsis) æqualia G T K L, incommensurabilia erunt. Et ideo (per primam sexti) rectæ G K K M longitudine incommensurabiles existunt. Quia insuper (ex eadem septuagesimaseptima) compositum ex quadratis A I I B medium est. Medium erit G L ipsis æquum. Quod ad certam G D proiectum latitudinem G M certam longitudine ipsi G D incommensurabilem efficiet, per vigesimamsecundam huius. quia item quod sub ipsis A I I B certum est, ex eadem septuagesimaseptima, Z L ipsius duplum (ex constructione) certum erit, & hac de re ad certam applicatum, latitudinem

dinem Z M *certa* [illegible] *propositæ* G D *longitudine com*[illegible]*rabilem efficiet, ex vigesima huius: quia autem medium* [illegible] G L, *certum vero* Z L. *Ipsa incommensurabilia erunt, & (per primam sexti) igitur rectæ* G M Z M *longitudine incõmensurabiles fient. Potentia itaque tantũ commẽsurabiles erunt, cum sint certæ. Reliqua igitur* G Z *apotome erit. Et quinta ram ad maiorem* G M *comparatur quod sub* G K K M *æquum quartæ parti eius quod à minore* Z M *(scilicet quadrato* Z N*) deficiens specie quadrata, per constructionem, secánsque ipsam* G M *per incommensurabilia longitudine* G K K M. *Quare (per decimamoctauam huius) maior* G M *maius potest minore* Z M *eo quod fit à sibi longitudine incommensurabili. Sed congruens* Z M *propositæ* G D *longitudine fuit commensurabilis. Reliqua ideo* G Z *apotome quinta dicetur, per quintam diffinitionem apotomarum. Quod igitur ex ea quæ cum certo medium totum efficit ad certam comparatum, &c.*

Propositio centesimasecunda.

Quod ex ea quæ Cum medio medium totum efficit ad Certam comparatum, latitudinem efficit sextam Apotomen.

Sit cum medio medium totũ efficiens A B, *cui sola congruat* I B, *per octuagesimamquartam huius. Sitq́; proposita certa* G D, *cui comparatum* G E *æquum ei quod ex* A B *latitudinem efficiat* G Z: *Dico* G Z *esse apotomen sextam. Repetantur proximis constructa prioribus vt vitetur otiosa prolixitas. Quoniam* A B *est cum medio medium totum efficiens, binæ* A I I B *potentia sunt incommensurabiles, per septuagesimamoctauam huius. Et proinde* G T K L *ipsarum potentiis æqualia, incommensurabilia erunt, ac ideo rectæ* G K K M *(ex prima sexti) longitudine incommensurabiles. Cùm autem* A I I B *efficiant conflatum ex earum quadratis medium, per eandem 78. Medium erit* G L *ipsi conflato æquum. Quod quidem ad certam* G D *protectum latitudinem* G M *certam longitudine ipsi* G D, *incommensurabilem efficiet, per 22 huius. Quia rursus medium est quod sub ipsis* A I I B, *per eandem 78, medium erit* Z L *eius duplum, ex constructione, per coroll. 23 huius quod ad certam* G D *protectum, latitudinem* Z M *certam, ipsi* G D *longitudine incommensurabilem efficiet, per eandem 22 huius: quia item, ex eadem 78, medium quod sub ipsis* A I I B *incommensurabile est medio conflato ex quadratis ipsarum, incommensurabilia erunt* N L *&* G L *ipsis æqualia, & proinde incommensurabiles erunt (ex prima sexti)* N M G M *quia verò* Z M *dupla ipsius* N M *est ipsi* N M *commẽsurabilis,* N M *verò ipsi* G M *incommensurabilis, & ipsa* Z M *ipsi* G M *incommensurabilis erit longitudine, per secundum coroll. decimæ huius. Potentia itaque tantum sunt commensurabiles ipsæ* G M Z M, *cùm sint certæ, reliqua ideo* G Z *erit apotome, & sexta. Nam ad maiorem siue totam* G M *(ex constructione) applicatur quod sub* G K K M. *Æquum quidem quartæ parti eius quod à minore* Z M *(hoc est quadrato* N M*) deficiens specie quadrata. Ipsamq́;* G M, *per incommensurabilia longitudine* G K G M *secans. Maior itaque seu tota* G M, *maius poterit minore seu congruente* Z M, *eo quòd fit à sibi longitudine incommensurabili, per 18 huius. Sed neutra harum* G M Z M *propositæ certæ* G D *longitudine fuit commensurabilis, vt ostensum fuit, reliqua itaque* G Z *dicetur (ex sexta apotomarum diffinitione) apotome sexta. Quod igitur ex ea quæ cum medio medium totum efficit, ad certam comparatum, &c.*

Propositio centesimatertia.

Quæ ipsi Apotome, longitudine commensurabilis est, Apotome est, & in ordine eadem.

Esto apotome A B, *cui commensurabilis longitudine exstat* G D: *Dico* G D *esse apotomen, eiusdémque ordinis ipsi* A B. *Quoniam* A B *est apotome, congruat ei vnica* B E, *per 79 huius. Sit autem sicut* A B *ad* B E *sic (per 12 sexti)* G D *ad* D Z. *Erit itaque (per decimamoctauam quinti)* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D. *Et vicißim (per decimamsextam quinti)* A E *ad* G Z *sicut* E B

ad Z D, *& ideo reliquum* A E *ad reliquum* G D *sicut totum* A E *ad totum* G Z, *per decimamnonam quinti Commensurabiles autem sunt* A B *&* G D, *commensurabiles igitur erunt* A E *&* G Z, *per decimamtertiam huius, similiter* E B *&* D Z, *eandem rationem habentes. Cum autem* A B *sit apotome, rectæ* A E E B *certæ sunt potentia tantum commensurabiles, per 73 huius. Certæ igitur erunt & ipsæ* G Z Z D, *per sextam diffinitionem huius, & potentia tantum commensurabiles, per decimamtertiam huius. Reliqua igitur* G D *apotome erit, per eandem 73, & eiusdem ordinis ipsi* A B *nam est* A E *ad* E B *sicut* G Z *ad* Z D. *Si itaque* A E *plus ipsa* E B *possit, eo quod a sibi longitudine commensurabili, &* G Z *ipsa* Z D *maius idem poterit, per decimamsextam huius. Si vero ab incommensurabili, &* G Z *ipsa* Z D *eodem maius poterit, quare vel simul erunt ex tribus prioribus, aut equidem simul ex tribus postremis, vt patet ex diffinitionibus apotomarum quia vero tota* A E *toti* G Z, *& congruens* E B *congruenti* Z D *commensurabiles sunt. Si* A E *expositæ certæ commensuretur, &* G Z *eidem commensurabitur, per decimam huius, vtraque igitur simul prima, vel simul quarta erit. Si vero congruens* E B *expositæ certæ commensurabilis fuerit, & eidem* Z D *congruens commensurabilis erit per eandem decimam, sicque vtraque secunda simul, aut simul quinta erit apotome. Siquidem neutra expositæ certæ commensurabilis fuerit ipsarum* A E E B *& neutra ipsarum* G Z Z D *eidem certæ commensurabitur, per corollarium secundum decimæ huius, hácque lege vtraque tertia, aut sexta simul erit apotome. Eiusdem igitur erunt ordinis ipsæ* A B G D, *per diffinit. apotomarum. Quæ itaque ipsi apotome longitudine commensurabilis est, &c.*

MONITVM.

Idem sentiemus de apotomarum natura, quod de binomiis diximus. Cùm enim hæc diffinita, licet quantitates proferant incertas, non tamen ea intercapedine à seipsis diuulsas esse existimabimus, vt nulla commensurandi specie communicare possint, verum quia longitudo in commensurabilibus præ se fert & potentiam, iam ostendimus eas quæ longitudine communicant (hoc est & potentia simul) duorum ordinum esse non posse, eò quòd omni mensurationis specie coniunctæ sint sed si tantum potentiæ communicent, longitudine verò nequaquam, non ideo sequetur eas eundem obtinere diffinitionis ordinem: nam potentiarum commensuratio non obest incommensurationi longitudinum. Possunt enim binæ potentiæ eidem potentiæ certæ commensurari, quarum longitudines simul eidem certæ non commensurabuntur, sed altera tantum. Si itaque vnius apotomes A B *potentia, certæ commensuretur, alterius verò* G D *eidem certæ longitudo simul & potentia commensurentur, patebit hanc esse primam vel quartam, illam vero nec primam, nec quartam esse ex diffinitionibus, nam altera congruentem certæ longitudine communicabit, reliqua verò totam, quandoque & neutram. Vnum tamen superest quod si potentia tantùm communicent binæ* A B G D, *necesse erit vtramque esse simul ex tribus prioribus, aut equidem simul ex tribus postremis, per 16 huius. Nam si vna maius nomē plus posse minore à commensurabili proferat, & reliqua idem proferet, si verò ab incommensurabili, & reliqua ab incommensurabili. Hoc notandum repetere non dedignamur, vt percipiamus has apotomes vnius tantùm incertarum locum obtinere, cùm non adeò inter se distent, veluti reliquæ incertæ, quas minima commensuratio in eas incidens, ita copulat vt eiusdem illico ostendantur esse denominationis, & a reliquarum natura penitus alienæ. Idem ferè monuimus de binomiis, ad 67 huius, veruntamen binomium ac apotomen suorum senariorum duces posuit Euclides, ob earum præstantiam, quæ cum certa per suorum ordinum diffinitiones areas comprehendunt. Reliquarum incertarum potentias generantes, vt ostensum fuit quinquagesimaquarta & quinque eam sequentibus, & nonagesimaprima & quinque eam sequentibus, quas sex conuersæ vtrasque sequuntur, harum progeniem corroborantes. Non sequetur huic simile in apotome mediæ prima & secunda eo quòd illæ diuersam incertarum naturam nactæ sint, veluti diximus in prima ac secunda ex binis mediis. nam singulæ harum propria vtuntur denominatione, nulli suas quantitates communicātes. Si igitur hoc theoremate de apotome tantùm in genere differendum fuisset, dixissemus rectam quamuis arte ipsi apotome commensurabilem apotomen esse, scilicet in genere. Quia verò per sex eius species commensurabilis propositæ naturam traducere volumus: illam longitudine commensurabilem posuimus, quæ eundem illas cogit suscipere ordinem, potentia tantum vero, naturam.*

Propositio centesimaquarta.

Mediæ apotome commensurabilis, Mediæ apotome est, & in ordine eadem.

Sit

Sit mediæ apotome A B, cui commensurabilis potentia tantum existat G D. Dico G D mediæ esse apotomen, & ipsi A B in ordine eandem. Congruat ipsi A B vnica E B, per octuagesimã huius, sicut vero A E ad B E, sic fiat (per duodecimam sexti) G D ad D Z: erit, per 18 quinti A E ad E B, sicut G Z ad Z D & vicissim (per 16 quinti) A E ad G Z, sicut E B ad Z D & ideo reliquum A B ad G D, erit (per 19 quinti) sicut totum A E ad G Z. Et proinde (ex 22 sexti) sicut quod ex A E ad quod ex E B, sic quod ex G Z, ad quod ex Z D, & vt quod ex A E ad quod ex G Z, sic quod ex E B ad quod ex Z D, ac insuper quod ex A B ad quod ex G D. Cõmensurabile autem fuit (ex hypothesi) quod ex A B, et quod ex G D commensurabile itaque erit quod ex A E et quod ex G Z, & quod ex E B et quod ex Z D, per 13 huius: sed media sint quæ ex A E E B per 74 & 75 huius, cum sint mediæ A E E B. Media igitur erunt quæ ex G Z Z D, per corollarium 23 huius, & potentia tantum commensurabiles sunt A E E B, per 74 & 75 huius. Potentia igitur tantum commensurabiles erunt G Z Z D, per 13 huius. Ipsa itaque G D apotome mediæ erit, per 74 & 75 huius. Dico quod & eiusdem ordinis ipsi A B, cùm sit A E ad E B vt G Z ad Z D, erit quadratũ A E ad quod sub A E E B, sicut quadratum G Z ad quod sub G Z Z D, per corollarium 21 huius, & vicissim (per 16 quinti) sicut quod ex A E ad quod ex G Z, sic quod sub A E E B ad quod sub G Z Z D. Commensurabile autem fuit quod ex A E et quod ex G Z, commensurabile igitur erit quod sub A E E B et quod sub G Z Z D, per 13 huius. Si igitur certum sit quod sub A E E B, certum erit quod sub G Z Z D, per sextam & nonam diffinitionem, & sic vtraque A B & G D erit media prima apotome, per 74 huius. Si verò medium sit quod sub A E E B, medium erit quod sub G Z Z B, per corollarium 23 huius, sicque vtraque ipsarum A B G D media apotome secunda, per 75 huius. Mediæ itaque apotome cõmensurabilis &c.

A fortiori si lõgitudine commensurabiles supponantur A B G D lucidius ostendetur, nam quæ longitudine commensurabiles sunt, & potentia omnino commensurabiles erunt, per illationem nonæ decimi.

Propositio centesimaquinta.

Minori commensurabilis, minor est.

Esto A B minor, cui commẽsurabilis potentia tantùm sit G D: Dico ipsam G D minorem dici: quoniam A B est minor, congruat ei vnica B E, per 82 huius, fiátque (per 12 sexti) sicut A B ad B E, sic G D ad D Z. Erit itaque (per 18 quinti) sicut A E ad E B, sic G Z ad Z D, & vicissim (per decimamsextam quinti) A E ad G Z, sicut E B ad Z D. Et ideo reliquũ A B ad reliquum G D, sicut totum A E ad totum G Z, per 19 quinti. & proinde (ex 22 sexti) earum rectarum quadrata proportionalia similiter erunt. Commensurabile autem fuit quod ex A B et quod ex G D, ex hypothesi, commensurabilia igitur erunt, scilicet quod ex A E et quod ex G Z, & quod ex B E et quod ex D Z, per 13 huius. Incommensurabile autem (ex hypothesi) fuit quod ex A E et quod ex E B, cum A B sit minor, ex 82 huius. Quod igitur ex G Z et quod ex Z D, incommensurabile erit, per 13 huius, binæ igitur G Z Z D rectæ, potentia incommensurabiles erunt: quia verò fuit quod ex A E ad quod ex E B sicut quod ex G Z, ad quod ex Z D, per 22 sexti, erit componendo, per 18 quinti, quæ ex A E E B ad quod ex A E, sic quæ ex G Z Z D, ad quod ex G Z. Vicissim itaque erunt quæ ex A E E B, ad quæ ex G Z Z D quadrata, sicut quod ex A E ad quod ex G Z, commensurabile fuit enim quod ex A E et quod ex G Z. Commensurabile igitur erit conflatum ex A E E B quadratis, conflato ex G Z Z D quadratis, per 13 huius, atqui certum est ex A E E B quadratis conflatum, per 76 huius. Certum igitur erit ex G Z Z D quadratis cõflatum, quia verò fuit A E ad E B, sicut G Z ad Z D, erit per (corollarium 21 huius) quadratum A E ad quod sub A E E B, sicut quadratum G Z, ad quod sub G Z, Z D. Et vicissim erit quod ex A E ad quod ex G Z, sicut quod sub A E E B, ad quod sub G Z Z D, per 16 quinti commensurabile autem fuit quod ex A E et quod ex G Z. Commensurabile itaque erit (per 13 huius) quod sub A E E B et quod sub G Z Z D sed quod sub A E E B medium est, per eandem 76, medium igitur erit quod sub G Z Z D, per corollarium 23 huius. Binæ itaque rectæ G Z Z D potentia sunt incommensurabiles, efficientes conflatum ex earũ G Z Z D quadratis certum, quod vero sub ipsis medium, reliqua igitur G D vocatur minor, per eãdem 76, minori itaque commensurabilis, minor est. Hanc in potentia tantùm commensurabilibus ostẽdimus, vt fortiori argumento in longitudine commensuratis elucescat.

Propositio centesimasexta.

Cum certo medium totum efficienti commensurabilis, & eadem Cum certo Medium totum efficiens est.

A B E
G D Z

Esto cum certo medium totum efficiens A B, *cui commensurabilis potentia tantùm existat* G D *Dico ipsam* G D *cum certo medium totum efficientem esse, sit ipsi* A B *congruens* B E, *per octuagesimam tertiam huius, & sicut* A B *ad* E B *sic fiat* G D *ad* Z D *ipsæ igitur* A E E B *potentia incommensurabiles erunt, efficientes conflatum ex earum quadratis medium, quod verò sub ipsis certum, per 77 huius. Resumantur autem (ex quinto & sexto) inter has rectas & earum quadrata, proportiones prioribus sumptæ proximis, quoniam ipsarum* A E E B *potentia sunt incommensurabiles, erunt & ipsarum* G Z Z D *potentia incommensurabiles, per 13 huius, quia verò quadrata* A E E B *quadratis* G Z Z D *commensurabilia existunt, veluti (ex hypothesi) quadrata* A B *&* G D, *quæ verò ex* A E E B *medium conflant, per 77 huius, quæ igitur ex* G Z Z D *medium conflabũt, per coroll. 23 huius, quia rursus ex præfatis collegimus rectangulum sub* A E E B *commensurabile esse rectangulo sub* G Z Z D *comprehẽso, veluti quod ex* A B *et quod ex* G D *quadrato, quod autem sub* A E E B *certum est, ex eadem septuagesimaseptima, quod itaque sub* G Z Z D *certum erit, quare à recta* G Z *recta* Z D *tollitur potentia, toti* G Z *incommensurabilis existens, efficit autem cum tota compositũ ex earum quadratis medium, quod quidem sub ipsis certum. Reliqua itaque* G D *vocatur cum certo medium totum efficiens, per 77 huius. Cum certo itaque medium totum efficiente commensurabilis, & eadem, &c.*

Propositio centesimaseptima.

Cum medio medium totum efficienti commensurabilis, ipsa quoque Cum medio, medium totum efficiens est.

A B E
G D Z

Sit cum medio medium totum efficiens A B, *ipsi autẽ (saltem potentia) commensurabilis extet,* G D: *Dico* G D *esse cum medio medium totum efficientem, congruat ipsi* A B *recta* B E, *per 84 huius, fiatq́ (per 12 sexti) sicut* A B *ad* B E *sic* G D *ad* D Z, *& quæ supersunt proportiones ex proximis præfatis referantur, quoniam* A B *est cum medio medium totum efficiens, binæ* A E E B *sunt potentia incommensurabiles, per 78 huius, quare binæ* G Z Z D *(ipsis* A E E B *proportionales) potentia incommensurabiles erunt, per 13 huius. Cùm autem conflatum ex* A E E B *quadratis sit medium, per eandem 78 huius, conflatum ex* G Z Z D *quadratis (ipsi commensurabile) medium erit, per coroll. 23 huius, quia verò quod sub ipsis* A E E B *est rursus medium, per eandem 78, quod sub reliquis* G Z Z D *medium erit, per idem coroll. 23 huius, cùm sit commensurabile ei quod sub* A E E B *veluti quadratũ* G D *quadrato* A B, *per coroll. 21 huius, quia demũ quod sub* A E E B *incommensurabile est composito ex* A E E B *quadratis, ex eadem 78 huius. sequetur quod sub* G Z Z D *(commensurabile ei quod sub* A E E B) *incommensurabile esse composito ex* G Z Z D *quadratis, commensurabili quidem composito ex* A E E B *quadratis, per tertium coroll. decimæ huius. Bina itaque rectæ* G Z Z D *sunt potentia incommensurabiles, efficientes conflatum ex earum* G Z Z D *quadratis medium, quod verò sub ipsis* G Z Z D *medium, ac insuper incommensurabile composito ex earum quadratis. reliqua igitur* G D *cum medio medium totum efficiens erit, per 78 huius. Cum medio itaque mediũ totum efficienti commensurabilis, &c.*

Propositio centesimaoctaua.

A certo Medio ablato, reliquam areolam potens, vna duarum incertarum est, vel Apotome, vel Minor.

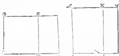
A certo



A certo aanque B G auferatur medium E G Dico reliquam aream B D potentem rectam, esse apotomen vel minorem. Esto proposita certa A I, (cui per 45 primi) constituatur ipsi B G æquũ I T, a quo auferatur ipsi E G æquum L T, reliquum igitur I K reliquo B D æquum erit, per communem sentent. cùm certum sit B G certum erit I T, sibi æquum, cum verò medium sit E G medium erit L T, ipsi æquum, quæ I T & L T ad certam A I applicata, latitudines A T & K T certas quidẽ efficiunt, sed A T longitudine propositæ certæ A I commensurabilem. per vigesimam huius, K T vero incommensurabilem eidem A I, per 22 huius quare cum binarum A I A T cõmensurabilium, altera A I cuidam K T fuit incommensurabilis, & reliqua A T eidem K T incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Binæ itaque A T T K certæ, potentia tantùm commensurabiles sunt reliqua igitur A K est apotome, per 73 huius, congruens autem T K, quia verò (à tota disiunctiua) tota A T maius potest minore (seu congruente T K) eò quòd à commensurabili, vel incommensurabili, siquidem commensurabili, ipsa A K est apotome prima. Nam maius nomen A T longitudine est propositæ A I commensurabile, si autem ab incommensurabili, A K erit apotome quarta, per primam & quartam diffinitionem apotomarum. Ipsa igitur A K aut prima aut quarta est apotome, si prima, quod sub certa A I & ipsa prima apotome A K comprehẽsum I K, potest apotome per 91 huius, si verò quarta fuerit A K quod sub ipsa & certa A I cõprehensum I K, poterit minor, per 94 huius. Potens igitur aream I K aut apotome, aut minor est & proinde potens aream B D (ipsi I K ex hypothesi æqualem) aut apotome, aut minor erit. A certo itaque medio ablato reliquam aream potens, &c.

Propositio centesimanona.

A medio Certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, vel Mediæ apotome prima, vel Cum certo medium totum efficiens.



A medio B G auferatur certum E G: Dico rectam quæ reliquam aream B D potest, esse vel mediæ apotome primam, aut cum certo medium totum efficientẽ. Sumatur (vt proxima diximus) certa A I, cui comparetur æquum ipsi B G, sitq́ I T, æquum verò ipsi E G tollatur L T, quoniam mediũ est B G, medium erit I T sibi æquum, quod ad certam A I proiectum, latitudinem A T certam efficiet longitudine ipsi A I propositæ incommensurabilem, per vigesimamsecundam huius, cum autem certum sit E G certum erit L T sibi æquum, latitudinémque T K certam efficiet, propositæ verò A I longitudine commensurabilem, per vigesimam huius. Duarum verò A I T K commensurabilium, altera A I alicui A T incommensurabilis fuit, & reliqua T K eidem A T longitudine incommensurabilis erit, per secundum corollarium decimæ huius. Potentia igitur tantum commensurabiles sunt certæ A T T K, reliqua igitur A K est apotome Dico quòd secunda vel quinta. Nam si tota A T maius poßit congruente T K eò quòd à commensurabili est secunda fuit enim congruens T K expositæ A I longitudine commensurabilis, si verò maius poßit ab incõmensurabili, ipsa A K erit quinta, nam congruens semper est propositæ commensurabilis, per secundam & quintam diffinitionem apotomarum recta igitur A K, est secunda vel quinta apotome, quare sub certa A I & apotome secunda A K comprehensa areola I K, est mediæ apotome prima, sub certa verò eadem A I & apotome quinta A K comprehensa area I K, erit cum certo medium totum efficiens, per 92 & 95 huius. Potens igitur aream I K vel B D sibi æqualem, erit vel media apotome prima, vel cum certo medium totum efficiens. A medio itaque certo ablato, aliæ duæ fiunt incertæ, &c.

Propositio centesimadecima.

A medio, Medio ablato incommensurabili toti, Reliquę duæ incertę fiunt, Medię apotome secunda, vel Cum medio, medium totum efficiens.



[illegible] rtim B G medium E G, feratur, [illegible] bile ipsi B G toti. Dico rectam re- [illegible] potentem, aut apotomen mediæ [illegible] aut cum medio medium totum efficientem esse. Comparetur (per quadragesimamquintam primi) ut prioribus ad certam A I æquum ipsi B G, sitque I T, æquum verò ipsi E G sit L T. Quoniam media sunt B G & E G, media erunt I T & L T. Quæ ad certam A I comparata, latitudines A T T K certas, longitudine incommensurabiles ipsi A I proposita (per vigesimamsecundam huius) efficiunt, & adinuicem incommensurabiles, per primam sexti, cum I T medium medio L T sit (ex hypothesi) incommensurabile. Binæ itaque A T T K certæ potentia tantum commensurabiles erunt, & igitur reliqua A K erit apotome, per septuagesimamtertiam huius. Sed tertia vel sexta, si tota enim A T congruente T K maius possit à commensurabili longitudine, erit tertia apotome A K. Nam neutra ipsarum A T T K fuit longitudine commensurabilis propositæ, si verò tota A T maius possit congruente T K ab incommensurabi i longitudine ipsa A K erit sexta apotome. Nam quauis arte neutra propositæ certæ fuit commensurabilis, per tertiam, & sextam apotomarum diffinitiones. Ipsam igitur A K necesse est esse tertiam vel sextam apotomen. Quod si tertia fuerit, quod sub ipsa & certa A I comprehenditur I K, est potentia mediæ apotome secunda, per 93 huius. Siquidem sexta fuerit A K, ipsa cum certa A I continebit I K, potentiam cum medio medium totum efficientis, per 96 huius. Quæ igitur aream I K (vel B D sibi æqualem) potest, vel apotome mediæ secunda, vel cum medio medium totum efficiens erit. A medio itaque medio ablato, incommensurabili toti, &c.

Propositio centesima undecima.

Apotome non est eadem ei quæ Ex binis nominibus.



Esto apotome recta A: Dico ipsam A non posse fieri ex binis nominibus. Quod si fieri possit, supponatur utramque esse, scilicet apotomen & binomium. Exponatur certa G E cui (per quadragesimamquintam primi) constituatur æquum E I quod ex A, quod sit B E, latitudinem efficiens B G. Manifestum erit ipsam B G apotomen primam esse, ex 97 huius, cum B E sit quod ex apotome A. Rursus quia B E est ex ea quæ ex binis nominibus A, ad certam G E comparatum, efficiet latitudinem G B binomium primum, per sexagesimam huius. Ipsa itaque G B erit & apotome prima, & binomium primum. Congruat ipsi G B recta B D, per 79 huius. Diuidatur insuper G B in nomina in I, per quadragesimamsecundam huius, maiúsque nomen sit G I. Cum autem B G sit apotome, G D D B rectæ, certæ potentia tantùm commensurabiles erunt. Quia verò prima est apotome, tota G D exposita certa G E longitudine commensurabilis erit. Cùm rursus B G sit ex binis nominibus prima, binæ G I I B sunt certa potentia tantùm commensurabiles, per trigesimamsextam huius, & maius nomen G I ipsi propositæ certæ G E longitudine erit commensurabile, per primam diffinitionem binomiorum. Igitur D G G I certa, eidem G E commensurabiles, adinuicem erunt commensurabiles, per decimam huius, longitudine. Et igitur D G tota uni earum G I commensurabilis, & reliquæ D I (per coroll. undecimæ huius) commensurabilis erit. Sed ipsi D G toti, longitudine fuit incommensurabilis congruens D B certa. Igitur D B ipsi D I longitudine incommensurabilis erit, per secundum coroll. decimæ huius. Certa itaque potentia tantùm commensurabiles erunt D I D B. Reliqua igitur B I dicetur apotome, per septuagesimamtertiam huius. Igitur & incerta. Sed & certa eadem B I erit, cum sit unum nomen ipsius G B quæ ex binis nominibus supposita, quod fieri non potest. Apotome igitur non est eadem ei quæ ex binis nominibus.

Corollarium.

Hinc fit sex binomia semper differre à sex apotomis siue residuis, & insuper quinque binomij comites similiter differre ab apotome & suis quinque comitibus, cæteris incertis. *Binomy enim & quinque eam sequentium potentia ad certam comparata, sex binomy species sua producunt*

cunt latitudine [illegible] [illegible] simam & quinque eam sequentes, apotomes verò & quæ [illegible] quentium potent [illegible] in eandem applicata, latitudines efficiunt sex apotomarum [illegible] 97 & quinque eam sequentes. Quas singulas a seipsis discrepare docuimus hoc theoremate [illegible] latitudines quæ semel fiunt apotome, nusquam binomium vltra simul cum apotome esse possunt [illegible] terea nec harum vllam cum media, eandem posse fieri existimabimus. Nam quod ex media ad eandem præfatam certam comparatum, latitudinem certam producit, per vigesimamsecundam huius, cætera verò incertam.

MONITVM.

Hactenus exposuit Euclides quatuordecim linearum genera, diuersa à seipsis quoad commensurationem, sub eodē tamen quantitatis genere, lōgitudine scilicet cōprehensa. quarū licet singulæ (ex hypothesis varietate) singularum aliarum denominationē concipere possint. Nō tamen (sub eadem recepta hypothesi) alteram alterius denominatione vti patiemur. Cum enim omnia mensurarum genera hypotheticæ facultati subdita sint, eáque (numerorū discretione quauis) sensibus percipienda exhiberi possit, nō indignum feremus harum 14 præfatarū, & singularum quālibet quauis optata sectione secari, siue eidem quamuis optatā partem alteri exhibitæ similē (ex nona & quatuor eam sequentibus sexti) conferri. Nec minus eam per cuiuslibet numeri vnitates propositas distribui, quæ omnia sub hypothesium incidūt varietates. Atqui vnica proposita sectionis, collationis, seu discretionis hypothesi, qua aliquam harū denominemus lineam, eadem hypothesi stāte, huic statutæ lineæ nullam reliquarum comparādam (numerorū discretione) vt eadem mensura cōmunicent ad seinuicem, ex præostensis concludemus. Quare harum incertarum denominationes singulis ascriptas non ex propria & veluti singulari cuiusque earum virtute vel natura pendere opinemur. Sed ex eo tantum respectu siue ex ea habitudine, qua altera alteri, sub eiusdem hypothesis statuto, commēsuranda aut incommensuranda confertur. Ea autem cui statutam adaptamus hypothesim certam vocamus, vt ab ea tanquam ab hypothesis duce, reliquarum intelligentiam pariamus, perspecta ipsius certæ ad reliquas siue per lōgitudinem aut equidem potentiam commensurādi facultate. Nos hac de causa eò magis admiramur improprias illas denominationes, à Theone vel potius Zamberto & Cāpano proditas, quibus certam rationalem, reliquas verò incertas, irrationales dixerunt, cùm rationalis rationis habitum irrationalis verò rationis eiusdem priuationem præ se ferant, quibus nec certa præ cæteris abundat, nec quidem incertæ plus certa priuantur. Cùm omnibus & singulis inter se omnimodè rationum conueniant habitudines siue respectus, vnius verò ad alteram licet omnimodè seu numeris expressæ non conueniant rationes, tamen ea inter eas cadit ratio, per quam & eandem rationem habere & illis tertiam mediam, siue quartam concedere proportionalem patitur, quod sine ratione fieri non potest. Earum itaque ducem siue præcipuam, ideo vocat Euclides ῥητὴν, seu certam, eò quòd ab ea hypothesim sumamus, in qua quidē hypothesi totius operis habetur intellectus. Reliquas verò per priuationē certitudinis ideo incertas dicemus, quod huius hypothesis discretione (quæ quantitatis intelligentiam parit) omnino priuentur, ac earum incertarum quantitates ab hypotheticis illis discretis vnitatum quantitatibus, sint penitus alienæ. Earum igitur denominationes iuxta progenierum ordinem hac apponimus.

Certa.

Media.

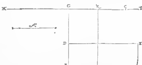
Ex binis nominibus	Apotome
Ex binis mediis prima	Mediæ apotome prima
Ex binis mediis secunda	Medię apotome secunda
Maior	Minor
Certum mediúmque potens	Cum certo medium totum efficiens
Bina media potens	Cum medio medium totū efficiens.

Conueniunt autem binomium & apotome in eo quod excessus maioris nominis binomij, supra minus fit apotome. Haud secus toti, apotomes congruens addita, binomium producit eiusdem ordinis, vt constat ex eorum diffinitionibus. Nam maiorum nominum potentiæ, excedent simul minorum

potentias, commensurabili vel incommensurabili maioráque simul aut minora simul nomina, certæ propositæ commensurabilia fient, aut neutra simul.

Propositio centesima duodecima.

Quod ex Certa ad eam quę Ex binis nominibus comparatum, latitudinem efficit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius quæ Ex binis nominibus, & in eadem ratione. Et insuper quæ gignitur Apotome, eundem habebit ordinem ei quæ Ex binis nominibus.

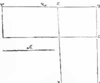


Exponatur certa A, *ex binis verò nominibus sit* G B, *cuius maius nomen esto* G D, *ipsi autem* G B *constituatur (per 45 primi) æquũ ei quod fit ex* A, *illud* B Z *latitudinem efficiens* G Z, *ipsi verò* D B *(per eandem) æquum apponatur eidem quod ex* A, *sitq́ B I latitudinem efficiens* D I, *cui* D I *æqualis extendatur* G Z T. *Dico* G Z *esse apotomẽ, qualem exoptat theorema, cùm sint æqualia* B Z *&* B I, *erit reciprocè (per 14 sexti)* G B *ad* B D, *sicut* D I *(vel* G T *sibi æqualis) ad* G Z, *& diuisim sicut* G D *ad* D B, *sic erit* T Z *ad* Z G, *per decimamseptimam quinti. Maior est igitur* T Z *ipsa* Z G, *cùm maius sit nomen* G D, *ipsi porro* Z G *æqualis ponatur* Z C, *fiat autem sicut* T C *ad* T Z, *sic (per vndecimam sexti)* Z G *ad* Z K, *erit conuersim (per corollarium quarta quinti)* T Z *ad* T C, *vt* Z K *ad* Z G. *Et rationis igitur conuersione, erit sicut* T Z *ad* Z C *(hoc est* Z G *sibi æqualem) ita* Z K *ad* K G, *per corollariũ decimænonæ quinti: sed fuit* T Z *ad* Z G, *vt* G D *ad* D B, *quare (per vndecimã quinti) erit* Z B *ad* K G *sicut* G D *ad* D B, *commensurabiles autem potẽtia tantùm sunt* G D D B, *nomina. Potentia igitur tantùm commensurabiles erunt* Z K K G, *per decimamtertiam huius, insuper cùm sit* T Z *ad* Z G, *vt* Z B *ad* B G, *erunt (per duodecimam quinti) omnes antecedentes* T K *ad omnes consequentes* K Z, *sicut* Z K *ad* K G. *Ipsa itaque* Z K *media proportionalis est ipsarũ* T K B G, *& ideo (per corollarium vigesimæ sexti) sicut* T B *prima, ad* K G *tertiam, sic quod ex* T K, *ad quod ex* K Z *secunda, cùm autem* B I *(æquum ei quod ex* A *certa positum) ad certam* D B *comparetur, latitudinem* D I *certam longitudine ipsi* D B *commensurabilem efficiet, per vigesimam huius, & proinde* G T *(ipsi* D I *æqualẽ) longitudine eidẽ* D B *cõmensurabilem efficiet: quia vero fuit vt* G D *ad* D B *sic* Z K *ad* K G, *vt verò* Z B *ad* K G, *sic* T B *ad* K Z, *erit (ex 11 quinti)* G D *ad* D B *vt* T K *ad* K Z, *& proinde quod ex* G D *ad quod ex* D B, *sic quod ex* T K *ad quod ex* K Z, *per vigesimamsecundam sexti. Commensurabile enim est quod ex* G D *ei quod ex* D B, *nominibus, quod igitur ex* T K *ei quod ex* K Z *commensurabile erit, per decimamtertiam huius, sed sicut quod ex* T K *ad quod ex* K Z, *sic fuit* T K *recta ad* K G, *commensurabilis ideo erit* T K *ipsi* K G *longitudine, & proinde ipsi* T G, *per corollarium vndecimæ huius, quæ* T G *fuit certa æqualis ipsi* D I. *Certa igitur erunt* T B K G *longitudine inuicem commensurabiles, cùm autem* Z K *certa* B G *sit potentia tantùm commensurabilis ostensa, ipsa* Z B *&* B G *certæ potentia tantùm commensurabiles erunt, apotome igitur erit* G Z, *quia verò* T G *certa vtrique* D B *&* K G *longitudine fuit commensurabilis, & ipsa* D B *&* K G *longitudine commensurabiles erunt, per decimam huius. Est autem* Z K *ad* B G *vt* G D *ad* D B, *vicißim igitur erit (per decimamsextam quinti)* Z K *ad* G D *vt* B G *ad* D B, *commensurabiles autem longitudine sunt* B G *&* D B, *& igitur* Z B *ipsi* G D *longitudine commensurabitur, per decimamtertiam huius. Commensurabilia itaque longitudine sunt* Z K K G *(nomina rectæ* G Z *apotomes) ipsis* G D D B *nominibus rectæ* G B *quæ ex binis nominibus, & in eadem ratione* Z K *ad* B G, *sicut* G D *ad* D B, *quare si* Z K *maius poßit congruente* K G *à commensurabili, &* G D *ipsa* D B *maius eodem poterit, per decimamsextam huius, & si ab incommensurabili, similiter per eandem, si vero maius vel minus vnius nomen, sit propositæ longitudine commensurabile, & similiter idem alterius nomen commensurabile erit eidem propositæ, per decimam huius, si verò neutrum, & neutrũ, per corollarium secundum decimæ huius ipsa igitur* G Z *eundem obtinebit apotomarum ordinem quem obtinuit* G B *binomium, per apotomarum & binomiorum diffinitiones. Quod itaque ex certa ad eam quæ ex binis nominibus comparatum, &c.*

Prop

Propositio centesimadecimatertia.

Quod ex Certa ad Apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quę Ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt ipsius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, & insuper quæ gignitur Ex binis nominibus, ipsi Apotome eundem obtinet ordinem.



Esto certa A, apotome autem sit B D, et verò quod ex A æquum, ipsi B D comparetur D T (per quadragesimamquintam primi) latitudinem efficiens B T: Dico ipsam B T esse ex binis nominibus, & insuper qualem postulat propositum. Quia B D est apotome congruat ei G D. Igitur B G G D certa sunt potentia tantùm commensurabiles. Ad certam autem B G eidem quod ex A æquum comparetur, sitq́; B I latitudinem efficiens B E, per quadragesimamquintam primi. Ipsa igitur B E certa, longitudine ipsi B G commensurabilis erit, per vigesimam huius. Cum autem æqualia sint B I & T D, eidem quod ex A æqualia, erit reciprocè sicut B T ad B E sic B G ad B D, per decimamquartam sexti. Et rationis conuersione sicut B T ad T E sic B G ad G D, per coroll. 19 quinti vt autem B G est ad G D, fiat (per coroll. decimæ sexti) T Z ad Z E. Erit itaque (ex vndecima quinti) B T ad T E vt T Z ad Z E: nam vtraque est sicut B G ad G D Erit igitur reliqua B Z ad reliquam Z T sicut tota B T ad totam T E, per 19 quinti, & ideo (per vndecimam quinti) B Z ad Z T sicut T Z ad Z E. Ipsa itaque T Z media est proportionalis inter ipsas B Z & Z E. Quod igitur ex prima B Z ad quod ex secunda T Z erit vt prima B Z ad tertiam Z E, per coroll. vigesimæ sexti. Cùm autem sit sicut B G ad G D sic T Z ad Z E. Sicut verò T Z ad Z E, sic fuit B Z ad Z T. Erit sicut B G ad G D sic B Z ad Z T, per vndecimam quinti. Commensurabiles itaque potentia tantùm sunt ipsæ B Z Z T, veluti ipsæ B G G D (apotomes nomina) per decimamtertiam huius. Commensurabiles igitur longitudine erunt rectæ B Z Z E, in ratione potentiarum B Z Z T ostensæ. Ac ideo (per corollarium vndecimæ huius) reliqua B E (certa) eidem B Z longitudine commensurabilis erit. Et proinde B G (ipsi B E commensurabilis) eidem B Z longitudine commensurabilis erit, per decimam huius. cui quidem B Z ostensa fuit potentia tantùm commensurabilis Z T, certæ itaque potentia tantùm commensurabiles erunt B Z & Z T rectæ. Tota igitur B T ex binis erit nominibus, per 36 huius. Cùm autem sit vt B G ad G D sic B Z ad Z T. Erit vicißim (per 16 quinti) B G ad B Z sicut G D ad Z T. Commensurabilis verò est B G ipsi B Z longitudine. Et igitur (per 13 huius) G D ipsi Z T longitudine commensurabilis erit. Nomina itaque B G & G D apotomes B D, commensurabilia sunt longitudine nominibus B Z & Z T ipsius B T quæ ex binis nominibus, & in eadem ratione B Z ad Z T sicut B G ad G D, vt latius patuit. Quòd autem sint eiusdem ordinis. Si maius aut minus nomen ipsius apotomes, scilicet recta B G aut G D, expositæ alicui fuerit commensurabile longitudine, & maius idem vel minus scilicet B Z aut Z T, eidem (per decimam huius) expositæ commensurabitur. Siquidem neutrum apotomes, & neutrum eius quæ ex binis nominibus, per secundum coroll. decimæ huius. Si verò maius B G plus poßit minore à commensurabili, & maius B Z plus poterit minore à commensurabili, siquidem ab incommensurabili, & ab incommensurabili, per decimamsextam huius. Quod igitur ex certa ad apotomen comparatum, latitudinem efficit eam quæ ex binis nominibus, &c.

Propositio centesimadecimaquarta.

Si areola comprehendatur sub Apotome & ea quæ Ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt ipsius Apotomes nominibus, & in eadem ratione, Quæ areolam potest, Certa est.

Areola namque D B *comprehendatur, sub apotome* A B, *& ea quæ ex binis nominibus* A D. *Cuius nomina* A E E D *sint longitudine commensurabilia, nominibus ipsius* A B *apotomes, quæ sint* A F F B. *Sintque in eadem ratione* A E *ad* E D *vt* A F *ad* F B. *Posit autem areolam* D B *recta* I. *Dico* I *certam esse. Exponatur certa* O, *et verò quod ex* O *æquum ipsi* A D *constituatur (ex quadragesimaquinta primi) latitudinem efficiens* D C. *Erit* C D *(per* 112 *huius) apotome, cuius nomina scilicet* C O O D *erunt commensurabilia ipsis* A E E D *nominibus. Et in eadem ratione* C O *ad* O D *vt* A E *ad* E D. *Sed sicut* A E *ad* E D, *sic est (ex hypothesi)* A F *ad* F B. *Sicut igitur* C O *ad* O D *sic est* A F *ad* F B. *Commensurabiles igitur sunt* C O O D *ipsis* A F F B, *per decimam huius. Reliqua igitur* C D *ad reliquam* A B *erit (per decimamnonam quinti) sicut* C O *ad* A F. *Commensurabilis autem fuit* C O *ipsi* A F, *commensurabilis igitur erit* C D *ipsi* A B. *Quare (per primam sexti)* C A *ipsi* D B *commensurabile erit. Certum autem fuit* C A *(ex certa* O *per constructionē) certum igitur erit* B D, *per 9 diffinit. Ipsa itaque* I *illud* B D *potens (ex hypothesi) certa erit, per sextam diffinitionem. Si igitur areola comprehendatur sub apotome, & ea quæ ex binis nominibus, &c.*

MONITVM.

Cogimur his tribus proximis prioribus demonstrandis, alia vti figurarum pictura. Cùm enim Campanus has non meminerit, Zambertus verò eoúsque deprauatas tradidit (Theonis figuras assumens) quod potius transcripsisse quam eas intellexisse videatur. Quare figuras rectangulis ornatas, iuxta propositi naturam, intellectu faciliores lineis rectangula supponentes, nouas ferè demonstrandi rationes præ se ferentes contulimus.

Corollarium.

Ab hac & 25 27 31 34, ac earum singulis colligemus, certam aream sub incertis posse comprehendi lineis.

Propositio centesima decimaquinta.

A Media infinitę numero fiunt incertę, neque vlla vlli earum, quæ prius est eadem.

Esto media A G: *Dico ab ipsa* A G *infinitas numero oriri incertas lineas, quarum nulla prioribus decimatertia ex positis est eandem. Sit certa* A B, *sub* A B A G *verò contineatur* B G. *Illud itaque* B G *incertum erit, per corollarium* 21 *huius: posit autem ipsum* B G *recta* G D, *per* 14 *secundi: quoniam quod ex* G D *ad certam* A B *protectum, latitudinem efficit* A G *mediam: illud quod ex* G D *(incertū) nulli præfatorum* 13 *est idem. Nam singulæ ad certam comparatæ potentia, aut certam, aut ex binis nominibus, aut equidem apotomen, efficiunt latitudinem, non autem mediam, per vigesimamsecundam, sexagesimam, & quinque eam sequentes, nonagesimamseptimā, & quinque eam sequentes, huius: quia igitur* B G *efficit latitudinem mediam, illud nulli eorum quæ prius idem erit. Singulis igitur incommensurabile erit, quod ex* G D, *quare recta* G D *illud potens, singulis reliquis* 1 2 1 M *potentia incommensurabilis erit. Rursus sub eadem* A B *&* G D *cōtineatur* G C, *illúdque* G C *posit recta* D Z: *quoniam quod ex* D Z *ad certam protectum latitudinem efficit* G D, *singulis præfatis incommēsurabilem, & ab ipsis igitur alienam. Illud idem quod ex* D Z *(hoc est* G C*) reliquis incommensurabile erit potentia, per primam sexti, est enim sicut* A G *latitudo ad* G D *latitudinem, sic* B G *potentia ad* G C *potentiam, sub eodēm vertice. Si igitur incommensurabiles fuerint potentiæ, & illas potentes incommensurabiles erunt (fortiori argumento) longitudine, per illationem nonæ huius. Quæ igitur hac serie infinitæ*

produc

producentur vt C Z & reliqua quotcunque simili argumẽto singulis præfatis, ac sibipsis erunt diuersa. A media itaque infinita numero, fiunt incertæ, &c.

MONITVM.

Vnde autem orta sit harum incertarum (quæ saltem sensibus deprehendi potest) intelligentia, monito vigesimaprima huius, aliqua ceperamus exponere, quæ cum huius theorematis plus adhæreant negocio. Dicemus incertarum magnitudinum agnitionem, à numeris deductam, eo quidẽ argumento quo contrariorum eadem sit disciplina. Cum enim numeri sint hi, quibus solis quãtitatum capacitas sensibus humanis eorum discretione adaperitur. Inter harum autem discretionum (quæ vnitates numerorum dicuntur) internalla, plures incidunt ipsius quantitatis sectiones, numerorum illorum vnitatibus exprimi non valentes, cùm extra illarum vnitatum quæcunque interualla incidant. Quas tamen enunciare volentes arithmetici (ne quidquam eis intactum foret) per numerorum radices hypotheticas seu suppositas illas exprimere conati sunt suppositas quidem ideo diximus, quod hi numeri nullas earum radicum sibi patiantur ascribi, præterquam ex hypothesi, qua hypothesi eiusdem nominis radices, quibusuis dederunt numeris, cuius numeri verè eas radices habentes, suas denominarunt, quarum aliæ censicæ seu quadratæ, aliæ cubicæ, surdæ, solidæ, &c. quæ licet tantùm propriis quibusdam adhæreant numeris, non autem quibuslibet. Tamen arithmetici quibusuis & singulis eas ascribentes, omnes ea radicalium numerorum (quos surdos nuncuparunt) denominatione, sectiones illas quantitatum (quæ vnitatibus numerorum ipsis quantitatibus applicatorum exprimi non valebant) denunciauerunt.

Ab hac autem denominatione ortæ sunt linearum ac arearum quantitates, quæ mediæ 21 huius dictæ sunt, quas hac figura sibipsis incommensurabiles, necnon infinitas à seipsis diuersas constitui facillimum ostendemus. Esto recta A B, cuius quãtitas radice quadrati numeri exprimatur, scilicet radice 9 quæ sit 3. Reliquæ verò rectæ A C C D D E E F & F G exprimantur radicibus non quadratorum numerorum, nec similium inter se planorum: quorum infiniti sumentur (ex corollario 26 octaui) & ex quadratorum serie monito 29 huius descripta sintque hi Res numeri 5. Res 7. Res. 11. Res 13. & Res 17. & quotuis alij. Cùm enim qui ex A B quadratus sit, reliqui verò qui ex A C C D D E E F F G non quadrati, ipsi ad eum qui ex A B rationem quadratorum non habebunt, per corollarium 25 octaui. singulæ igitur ipsarum, rectæ A B potentia tantùm commensurabiles erunt, per nonam huius, & certæ, per sextam diffinitionem huius, media igitur fient (per vigesimamprimam huius) B C I D K E L F M G, & reliqua quotcunque, quæ ad se sunt vt rectæ A C C D D E &c. sed cùm qui ex A C C D D E &c. quadrati numeri, sint dissimiles plani ex hypothesi, earum latera A C C D D E &c. sunt longitudine incommensurabiles rectæ, & ideo B C I D K E L F M G &c. (ipsis rectis eandem rationem per primam sexti habentia) incommensurabilia erunt, per 13 huius, & proinde, rectæ illa rectangula potentes (à fortiori) longitudine incommensurabiles erunt, cùm sint potentia per illationem nonæ huius, infinita igitur ostendimus media sibi inuicem incommensurabilia, ac à seipsis diuersa, quod autem attinet ad binomia, quæ ex binis certis potentia tantùm commensurabilibus coniunctis fiunt, Dicemus harum incertarũ originem è linearum natura sic composita primũ nasci, quæ quidem lineæ quadrata describunt earum sequentia naturam, secus in medio, cuius intelligentia primũ à rectangulo binis certis comprehenso inchoata fuit, quæ quadratum producens latus, lineam sui naturam sequentem generat, quare hæc simplex: reliqua verò quæ ab additione linearum procedunt, compositæ vocantur incertæ, vt exemplo, si copulentur latera quadratorum rationem 9 ad 7 habẽtium, ea copulata rectam ex binis nominibus procreant, cùm sint rectæ potentia tantùm commensurabiles, quam arithmetici denũciare cupientes, vnico numero denominare nequeunt, sed periphrasi quadam, rem 9 plus rem 7 nuncupant, hoc est radicem 9 radici 7 coniunctam, vtuntur tamen signo augmẽti huius figuræ (Rad. 9 + Rad. 7) quemadmodum apotomen quæ eisdem constat nominibus, sed per detractionem signo decrementi enunciant, veluti Rad. 9 − Rad. 7. hoc est res 9 a qua tollẽda sit res ipsius 7, vt tandem supersit residuum, quod apotome dicetur, in eo tantum itaque hæ duæ incertæ differunt denominationes (scilicet

plus & minus) vt Rad. 9 plus Rad. 7 & [illegible] 9 minus Rad. 7. Quarum (vt diximus in med[illegible] natura) totidem infinit e producent [illegible] species sibi inuicem incommensurabiles, quot eas generantes producentur dissimilium planorum varietates, quæ autem binomij 36 huius & quinque eam sequētibus exponuntur comites, per surdorum additionem (binomij instar) componuntur. Quæ vero apotomes fiunt comites, 73 & 5 eam sequentibus, per earum linearum detractionem generantur, quæ prius compositæ priores sex genuerūt, eodem seruato ordine, nullam præter additionis & detractionis ferentes discrepantiam. Quas quidem 13 numero, arithmetici prolixiori longè opera, his numeris surdis (quos algebricos, seu cossicos nuncupant) exprimere singulas conantur. Re igitur nostra contenti id curæ relinquemus illis exequendum. Hinc tantum colligentes, harum incertarum quantitates, nihil aliud esse quam sectiones certarum quantitatum, quæ inter vnitatum certarum discretionem incidunt, eo quidem termino qui nullis ipsarum certarum, infinito etiam decremento multiplicatis vnitatibus referri potest, sed eisdem certarum vnitatibus, sectiones illæ ac vnitates eas metientes, perpetuò incommensurabiles existunt, quas ea de causa denominatione qualibet quantitatis priuatas fuisse iam antea diximus, quod intemeratam illam vnitatis integritatē sectione violare conatæ sint. Vnde merito surdæ dictæ sunt, tanquam ab expressis siue determinatis quantitatibus alienæ, ac explosæ haberi debeant.

Propositio centesimadecimasexta.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis, dimetientem lateri longitudine incommensurabilem esse.



Esto quadratum ex A B, cuius dimetiens sit A C: Dico A B latus dimetienti A C longitudine incommensurabile esse, quoniam A B & B C sunt æquales, duplum est quod ex A C eius quod ex A B, per 47 primi. Dentur (ex secunda octaui) quotcunque numeri ab vnitate proportionales, in præfata quadratorum A B ad A C ratione, sintq́ D E F G, quoniam primus ab vnitate scilicet E non est quadratus, cùm sit primus, nec (per decimam noni) alius vllus (exceptis tertio ab vnitate & vno relicto omnes) quadratus erit. Ea itaque ratio D ad E, vel E ad F aut F ad G, cadet inter quadratum & non quadratū numeros, quare per coroll. 25 octaui, ea nō erit ratio quadrati numeri ad quadratum numerum, nec igitur quadrata ex A B & A C (eam rationem habentia) rationem habebunt quadratorum numerorum, nec proinde latera (A B latus & A C dimetiens) erunt longitudine commensurabilia, per 9 huius. Ostendimus itaque dimetientem lateri in quadratis longitudine incommensurabilem esse.

MONITVM.

Huius locum selegit Campanus post septimam huius (sanius quidem) loquens de lineis, quæ licet sint longitudine incommensurabiles, tamen earum potentia siue quadrata inter se commensurabilia existunt, & ideo inter certas enumerandæ sunt. Insuper bina data opera omisimus ante hanc propositionem theoremata, ab altero tantum Græcorum exemplarium tradita, vel potius repetita, id quidem frustra, cùm sint eadem eis quæ 105 & 106 iam demonstrata sunt, insuper huius propositionis demonstrationem corollario octauæ octaui breuissimè conclusimus, sed nō ideo dedignati sumus hunc loco, Euclidem sequuti, apponere, licet eam pluribus aliis argumentis demonstrare potuissemus. Sed quia libris sequentibus de incertis rectis figuras planas ingredientibus quandoque loquetur, huius longitudinem incertam hac vltima exponere cœpit.

LIBRI DECIMI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber vndecimus.

Diffinitio prima.



Solidum est quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet, solidi verò termini sunt superficies.

Tertium quantitatis genus diffinit Euclides. Primum quidem fuisse lineam, quæ longitudinem tantum habet. Secundùm vero superficiem, quæ binas dimensiones sese ad rectos dirimentes habet, scilicet longitudinem ac latitudinem. Tertium igitur erit, Solidum tribus mensuris dimensum sese inuicem ad rectos angulos secantibus, longitudine, latitudine, ac sublimitate, quam alij crassitudinem, profunditatem, seu densitudinem nuncupant, quorum intercapedinem nihili faciemus, Cùm illæ tres dimensiones tres sint tantùm longitudines, sese ad angulos rectos dirimentes in eodem subiecto, quod ideo ob tres illas dimensiones quibus mensum est, solidum dicitur, præter illud alia quantitas plures dimensiones habere regulares non potest. Nam ad idem signum plures tribus lineis ad rectos sese secantes concurrere non possunt. Conuerti itaque poterit hæc diffinitio, vt quæcunque fuerit subiecti natura tribus illis dimensionibus ornata, solidum dici possit. Quod quidem solidum similiter dicemus terminari superficiebus (ac superficiem lineis, lineam verò signis terminari antea diximus) sub qua ipsarum clausura contineri, illud præter reliqua quantitatis genera sibi assumens. Nam superficies tantùm finita non conclusa est lineis, linea verò terminata non autem mensa, nec quidem conclusa signis. Solidum autem superficiebus terminatum, concluditur eisdem.

Diffinitio secunda.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes ipsam tangentes rectas in subiecto plano existentes, angulos rectos efficit.

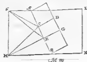
Veluti si ad planum C D E *erigatur recta* A B *eo situ quo qualibet recta in ipso plano ducta ipsam* A B *tangentes cum illa angulos rectos efficiunt, vt linea* A C A E A D, *tunc recta* A B *dicetur recta ad illud planum* C D E, *eò quòd à contactu plani qualibet in plano recta, ad ipsam rectos concludant angulos, hæc methodum concipit à decima primi diffinitione, cùm idem agat in superficiem hæc, quod prior in lineam, scilicet vtraque vtrobique rectos angulos.*



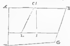
Diffinitio tertia.

Planum ad planum rectum est, quando super communi segmento eorum planorum perpendiculares in vno eorum planorum existentes, reliquo plano ad angulos rectos fuerint. Rectæ verò lineæ ad planum inclinatio est angulus acutus contentus sub ipsa recta linea, & alia recta in plano ducta ab inclinante per signum in quod cadit perpendicularis, à sublimi termino inclinantis demissa.

Binas hæc vnica complectitur diffinitiones. Priore enim bina supponit plana vt A D G B *&* F I K H, *quorum planorum commune segmentum est recta* A B, *quæ quidem* A B *in vtroque eorum planorum extenditur: si igitur in altero eorum planorum ad ipsam* A B *demittantur perpendiculares* D C G E. *Illæq;* D C G E *reliquo plano* F I K H *ad angulos rectos (siue rectæ) fuerint. Tunc planum* A D G B *ad planum* F I K H *rectum esse dicetur, hoc est,*



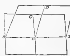
planum super planum consistens, vtrobique angulos efficiet æquales, vt diximus decima diffinitione primi de lineis. Quod ideo per lineas exponimus quia lineæ angulos efficiunt, non autem superficies, sed tantùm lineæ in ipsis descriptæ. Inclinationem verò rectæ lineæ C L *ad planum* A B G D *esse dicemus, angulum acutum,* C L I *qui quidem fit à recta* C L *& alia* L I *in plano* A B G D *ducta. A recta* C L *inclinante per signum* I *in quod cadit perpendicularis ipsi plano, à sublimi termino* C *rectæ inclinantis* C L *demissa, qui angulus* C L I *necessariò fit acutus. Nam rectus existens* C I L *(ex constructione) æquus erit binis* C L I L C I *angulis, cum tres trianguli anguli binis æquipolleant rectis, per trigesimamsecundam primi, ipse igitur* C L I *minor recto* C I L*, acutus erit (ex diffinit.) qui dicetur inclinatio lineæ* C L *ad planum* A B G D.



Diffinitio quarta.

Plani ad planum inclinatio est, angulus obliquus comprehensus sub his quę ad angulos rectos communi segmento ad idem signum ducuntur, in vtroque ipsorum planorum.

Angulum obliquum ideo dicimus, cũ quandoque acutus quandoque verò obtusus existat, ea lege qua linearum inclinatio angulum planum efficere dicta fuit, octaua diffinitione primi, vera etenim inclinatio ea est quæ lineas à recta recedere cogit. Ideo etenim obliquum dicimus angulum, vt à recto semper differat planum rectum constituente, vt si planum A D B *ad planum* A G B C *inclinari dicamus, cùm perpendiculares ductæ* D E G E C E *ad commune segmentum planorum (quod sit* A B*) atque ad idem signum* E*, siquidem rebus sic dispositis angulus* D E G *sit acutus,* D E C *verò obtusus erit, planum* A D B *ad planum* A G B C *inclinari dicetur, & è conuerso* A G B C *ad planum* A D B*. si verò anguli* D E G *&* D E C *recti fuerint, planum ad planum rectum erit. Nam lineæ* E D E G E C *in ipsis planis ad rectos cum communi* A B *segmento constituta (planorum motu) inclinationem aut planorum rectitudinem exprimunt: quare eæ anguli* D E G *vel* D E C *quantitas, planorum dicetur inclinatio.*



Diffinitio quinta.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, & alterum ad alterum, quando prædicti inclinationum anguli sibi inuicem ęquales fuerint.

Propositio sexta.

Parallela plana sunt, quę vndique producta contactum non admittunt.

Hæc nulla eget expositione, sed additione hac (quæ vndique producta) egebat, nam si parallela dixissemus tantùm, quæ contactum non admittunt, falsam ederemus hanc diffinitionem. Si itaque vndique producta contactum non admittant verè parallela erunt.

Diffinitio septima.

Similes solidæ figuræ sunt, quę sub similibus planis, & multitudine ęqualibus continentur.

Diffinitio octaua.

Similes solidæ figurę & ęquales sunt, quę sub similibus planis, multitudine & magnitudine ęqualibus, continentur.

Hanc solidorum similitudinẽ à similitudine planorũ ac eorũ æqua multitudine sumit, non à laterum proportione veluti figuras planas, prima sexti diffinit. sumpsit. Nam in figuris binæ rectæ tantũ angulum planum efficiunt, in solidis verò plures duabus necesse est concurrere, vt angulum solidum

comp

componant, vt proximo videbimus. Quare licet eadem diffinitione, qua figuras planas has solidas similes dixisse potuisset, scilicet eas quarum quæ circum æquales angulos latera sunt proportionalia, attamen ob rationum multitudinem multitudine laterum generatam, & ideo confusam quodammodo, earum similitudinem breuius sub planorum similitudine, & æqua multitudine conclusit, æqualitatem verò addita planorum æqualitate postremo diffiniuit.

Diffinitio nona.

Angulus solidus est, qui sub pluribus duobus planis angulis ad idem signum constitutis in eodem plano non existentibus comprehenditur.

Cũ omnis angulus planus sit linearũ cõcursus, solidus verò sit planorũ angulorum concursus, qui quidem præ se lineas ferentes, linearum concursum similiter efficiunt, quare alteram tantũ Theonis sumemus diffinitionem, qua per planorum concursum exposuit, reliquam minus dignam omittẽtes, qua scilicet per lineas plures duabus concurrentes diffiniuit solidum angulum. Planos item angulos in eodem plano constitui vetat, non esset enim angulus, sed superficies.

Diffinitio Decima.

Pyramis est figura solida comprehensa planis ab vno plano ad vnum signum constitutis.


Pyramis.

Quoniam ab vno plano ad vnum signum præcipit tendere reliqua plana Pyramidem concludentia, manifestum erit omnia constituta plana necessariò triangula esse, dempto supposito à quo tendũt in signum reliqua, illud verò demptum cuiusuis erit figuræ, iuxta Pyramidis hypothesim, quæ ab eo plano denominationem concipit, vt à pentagono pentagona, ab exagono exagona, à quadrangulo quadrangula, à trigono trigona, vt A B.

Diffinitio vndecima.

Prisma est figura solida quinque planis comprehensa, quorum duo sunt triangula, similia æqualia, & parallela, Reliqua verò parallelogramma.



Super hac diffinitione dissentiũt Theon & Campanus, sed præualet Campani intellectus. Nam Theon sub Prismatis nomine cuncta comprehẽdit parallelepipeda. & plures lateratas colũnas, quod maximè obest futuris demonstrandis, quare particularem Prismatis diffinitionem sumẽtes, Prisma esse dicemus figuram solidam, quinque planis tantùm comprehensam, quorum duo sunt triangula, æqua, similia, & parallela, reliqua verò parallelogramma, vt exemplo A B C & D E F sint triangula A F A E & C E, sint parallelogramma. patet ex diffinitione parallelogrammi, triangula A B C & D E F esse necessariò æqualia, scilicet æquis lineis contenta, & parallela cùm fiant ex oppositis parallelogrãmorum lateribus, & igitur similia, quæ omnia necessario pendent à positione trium parallelogrammorum, huic fauet 40 huius.

Diffinitio duodecima.

Sphæra est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno signo intus existẽte, omnes rectæ lineę ductæ sunt æquales. Sphęrę autẽ descriptio est, circunductio semicirculi manente eius demetiente, quoad vnde cœpit redeat.

Quoniam omnium solidorum perfectißimum est Sphæra, ipsi duplicem non dedignamur conferre expositionem priori etenim veram eius substantiæ diffinitionem expreßimus, cum diffinito admodum conuertibilem. Posteriori verò eius descriptionem diffinimus, qua lege describenda sit planè

demonstrantem quia Theon ac Campanus Sphæræ solam descriptionem, non autem propriam substantiæ naturam depinxerunt, descriptioni eam quam ex potissima geometriæ sententia suscepimus diffinitionem præfecimus, quæ quidem natura huius solidi perfectionem, ea linearũ ab unico signo prodeuntiũ æqualitate, ac insuper unica illius admirabilis facies æqua undique flexione, tanta solertia solidum conclusit, ut perfectionis eius regularitas, nulla angulorum siue laterum fractura maculanda sit, sed ineffabilis illius æternæ essentiæ initio exitúque carentis, aliquam præ se ferat imaginem.

Diffinitio decimatertia.

Centrum Spheræ est signum in Sphera constitutum, à quo omnes rectæ ad superficiem ductę sunt ęquales, & illud quod & semicirculi describentis.

Diffinitio decima quarta.

Dimetiens Spheræ est recta linea per centrum acta, ex vtraque partæ superficie Spherę terminata.

Diffinitio decimaquinta.

Axis Spherę est dimetiens illa quiescens, circum quam Sphera mouetur.

Vt diffinitiones quasi partium Sphera iuxta natura earum ordinem disponamus, harum trium seriem à Theone traditam variare cogimur, ut quod prius natura fuit, prius incedat ordine: Nam centrum prius fuit dimetiente, cum enim per centrum agatur dimetiens, id eius & locum, & naturam indicat. Axem verò præcedet dimetiens, cum dimetientium quæ in Sphera describi possunt, unica sit axis dimetiens, ea scilicet quæ quiescit, generalius igitur est dimetientis nomen, axis nomine quod quidem solius motus videtur esse relatiuum, Dimetiens verò Sphera quantitatem induat cuius est præcipuum geometriæ negotium.

Diffinitio decimasexta.

Conus est figura solida transitu rectanguli trianguli descripta, manante vno eorum quę circa rectum angulum latere, donec in idem vnde sumpserat exordium voluatur, & si manens recta linea ęqua fuerit reliquę circa rectum angulum circũductę, rectangulus erit Conus, Si verò minor, Ambligonius, Si autem maior Oxigonius.



Campanus hanc figuram Pyramidem dixit rotundam, attamen cum huius à Pyramide longè distet descriptio, necnõ & natura ob eius regularem essentiam, videtur eam Theon recta seorsum diffinisse. Hæc enim unico rectanguli trianguli motu, Pyramis verò planorum applicatione describitur. Quoniam autem Conorum tres diffinit species, rectangulum scilicet, ut A C B *Ambligonium verò ut* A E B, *Oxigonium autem ut* A D B, *Cùm enim trianguli rectanguli* A C F *latera, scilicet* C F *manens, &* A F *circunductum, sint æqualia, æquales erunt* A C F C A F *anguli, per quintam primi, & dimidium efficiunt anguli* A F C *recti, per 32. primi, similiter & trianguli* B F C, *ipsi* A F C *æquales, Totus igitur* A C B *(qui ad Coni verticem) rectus est, eò quidem quòd recta* C F *manens, circunducta* A F *(in* F B*) sit æqualis. Si verò manens ut* E F *sit minor circunducta* A F, *angulus* A E B *maior erit recto* A C B, *per vigesimamprimam primi. Quare* A E B F *Conus Ambliganius dicetur. Siquidem manens* D F *sit maior circunducta* A F, *angulus* A D B *(per eandem) minor erit recto* A C B, *& proinde Oxigonius dicetur* A D B F *Conus.*

Diffinitio decimaseptima.

Axis Coni est manens recta circa quam triangulũ vertitur, Basis autẽ est circulus

circulus à reliquo latere angulum rectum continente circunducto descriptus.

Diffinitio decimaoctaua.

Cylindrus est figura solida transitu rectanguli parallelogrammi descripta, quiescente vno eius latere donec in idem vnde sumpserat, exordium reuoluatur.

Diffinitio decimanona.

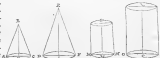
Axis Cylindri est manens recta circa quam parallelogrammum voluitur, Bases autem sunt circuli à rectis (angulum rectum cum stante continentibus) circunductis, descripti.

Ex his binis Cylindri diffinitionibus constat, Cylindrum duobus circulis æqualibus ac parallelis vnaque facie curua contineri, cum æquales & in quauis motus parte parallelæ sint rectæ eos circulos describentes. Ac insuper axis Cylindri ad vtrásque bases recta erit linea. Nam ad omnes rectas eam tangentes in basi descriptas rectos efficient angulos. Similiter & Coni axis ad ipsius basim eadem de causa recta erit linea.

Diffinitio vigesima.

Similes Coni & Cylindri sunt, quorum axes & basium dimetientes sunt proportionales.

Similitudinem Conorum ac Cylindrorū ponit in proportione rectarum, ex quibus oriuntur. Nam ex dimetientibus basium oriuntur eorum solidorum binæ dimensiones, scilicet quæ longitudinis & latitudinis vice funguntur. Ex axibus autem reliqua nascitur, scilicet quæ sublimitatis locum obtinet.



Cùm igitur fuerit sublimitas B G *Coni ad sublimitatem* E I *alterius Coni, vt* A C *dimetiens (hoc est, longitudo & latitudo) ad* D F *dimetientem, Coni* A B C G *&* D E F *erunt similes. Haud secus in Cylindris, si fuerit* L N *ad* R Q*, vt* H M *ad* O P*, Cylindri* H L M N *&* O R P Q *erunt similes, vt latius posthac dicturi sumus.*

Diffinitio vigesimaprima.



Cubus est figura solida, sub sex quadratis contenta basibus.

Diffinitio vigesimasecunda.



Octahedrum est figura solida, sub octo æquilateris triangulis sibi inuicem æqualibus comprehensa.

Diffinitio vigesimatertia.



Dodecahedrum est figura solida, sub duodecim quinquangulis ęquiangulis, & ęquilateris sibi inuicem ęqualibus comprehensa.

Diffinitio vigesimaquarta.



Icosahedrum est figura solida, sub viginti ęquilateris triangulis sibi inuicem æqualibus comprehensa.

Diffinitio vigesimaquinta.

Solidum parallelepipedum est figura solida sub quadrangulis planis, quorum quę ex opposito sunt parallela comprehensa.

Huic fauebunt ferè omnes de parallelepipedi natura loquentes.

Diffinitio vigesimasexta.

Figura solida in figura solida inscribi dicitur, quando inscriptę figurę anguli simul angulos, aut simul superficies, vel simul latera circunscriptæ tangunt.

Diffinitio vigesimaseptima.

Figura solida figuræ solidæ circunscribi dicitur, quando circunscriptæ figuræ anguli simul, latera simul, aut superficies simul, angulos inscriptæ tangunt.

Figuras planas figuris planis inscribi ac circunscribi diffinitionibus quarti docuimus, Cum autē agendum sit de solidis longè a planis figuris distantibus natura, eorum inscriptiones paulo à planorum inscriptionibus discrepantes diffiniemus, inscriptiones etenim (æque planorum, & solidorum) ad regularium figurarum tantum intelligentiam conferuntur, Irregularium etenim infinita multitudo, inscribendi normam sua confusione respuit. Cum autem regularium solidorum latera, bases & anguli, sub diuersis contineantur numeris, perspicuum est angulos inscriptæ figura angulis circumscriptæ lateribus aut basibus coniungi non posse quandoque, sed & quandoque posse, Eo autem ordine, quo simul interiores anguli latera exterioris tangant, vel simul angulos, vel equidē simul bases, non tamē omnes, cū sæpius inscripta tanta multitudine angulorū careant qua circunscriptæ ornātur laterū, basium aut angulorum multitudine, vel è contra. Attamen ea inscriptione interiores exterioribus simili penitus cōtactu adhærebunt, similiaque vacua excessuum circunscriptis relinquent, vt fauente Supero decimo quinto ostensuri sumus, alias inscriptiones similes & æquales excessus non relinquentes, irregulares essent, ob eorum excessuum discrepantiam, veluti cum Cubi latera secant bases circunscripti Octahedri, ac plures aliæ regulatam inscribendi normam refragrantes. Solas igitur regulares eas dicemus, quæ similes & æquales figuræ circunscripta relinquūt excessus vndique.

MONITVM.

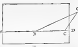
Quoniam diffinitionibus huius vndecimi, aliqua transposita, quædam verò paulum obscura siue confusa, (vitio temporis vt arbitramur) tradita sunt, quam proximè Theonis voces imitantes, iuxta veriorem sequentium theorematum intelligentiam, ac solidorum considerantes proprium, diffinitiones

finitiones has digessimus, vt omni prorsus ambiguitate, solute eorum quæ subsequuntur demonstrationi faueant, vt diffinitione quarta, plani ad planum inclinationem sub angulo obliquo non autem tantum sub acuto diffinimus, vt quondam solidorum regularium planis construendis quilibet obliquus non tantum acutus deseruiret, horum etenim planorum inclinationes, quandoque acutum rursus verò obtusum optant inclinationis angulum. Cæterùm Prismatis diffinitionem, à Theone scriptam, theorematis demonstrandis obsistere prænoscentes regulata methodo vallauimus. Poteramus quidem instar Campani illud diffinire, sed solidorum demonstrandorum compendio consulentes, æqua similia & parallela opposita eorum triangula citra demonstrationis tedium comperisse latamur. Sphæræ insuper diffinitionem, à descriptione segregauimus, veram Sphæræ substantiam congrua diffinitione illustrantes, Transpositas item aliquas diffinitiones, iuxta optatum à natura ordinem disposuimus, figurarum demum solidarum inscriptiones à planarum inscriptione discrepantes, iuxta necessariam solidis inscribendis methodum diffinimus. Quia verò solido parallelepipedo sepius vtemur, non antea ab Euclide diffinito, propriam diffinitionem contulimus, ne circa veram eius cognitionem fluctuantes, intelligendis theorematis hæsitemus, insuper decimo quinto Euclidis futuro, reperiemus Ipsiclem quinque tantum theoremata, Campanum verò duodecim de regularium corporum inscriptione ac circunscriptione tradidisse, qui quidem Campanus (duodecimam demonstrans) ad has explendas solidorum inscriptiones, viginti optari profert theoremata, quæ ibidem nec posse demonstrari debilibus admodum concludere conatur argumentis. Et proinde optata superesse (viginti complendis) theoremata octo. Quæ diuinæ clementiæ fausto munere consequi fidentes, eam quæ totidem viginti inscribendis aut circunscribendis congrueret methodum, binis postremis exponimus diffinitionibus.

Propositio prima

Lineæ rectę partem in subiecto plano partem verò in sublimi esse est impossibile.

Esto (si fieri possit) linea A B G *cuius pars* A B *sit in plano* A E D, *eiusdem verò reliqua pars* B G *sit in sublimi, hoc est extra planum* A E D, *Dico* A B G *non esse rectam, quoniam planũ est* A E D *producatur ex æquali per planum* A E D *recta* A B *versus* D, *quæ recta erit, per quartam diffinitionem primi, Ab aliquo signo rectæ* A B D *quod sit* C *ad signum* G *ducatur* C G. *Triangulis igitur* B C G *exterior angulus* A B G, *binis quidem inte rioribus oppositis est æqualis, per 32 primi, & igitur minor duobus rectis, per. 17 eiusdem, angulum itaque efficiens linea* A B G, *non est recta. Linea itaque recta partem in subiecto plano, partem verò in sublimi esse est impossibile.*



MONITVM.

Demonstrare conatur hanc Theon ab inconuenienti, quod scilicet duæ lineæ concurrerent in pluribus signis vno, quod non adhuc patuit inconuenire: Nam binæ rectæ A E B I *in pluribus possunt concurrere signis* I E *non autem secari. Si autem eas dicamus vnicam lineam, tollemus innumerabiles demonstrandi facultates, super eadem recta plures constituentes, quod non recipit geometria ob demonstrationum facilitatem, sed quandoque totam vnicam quandoque diuersas esse eius partes, iuxta hypotesium varietatem suscipit, & hac de causa noluit Euclides illud excludere, lineas scilicet in pluribus signis contactum non admittere, nec inter principia huiusmodi collocare perniciem. Campanus verò tam modicum paruipendens demonstrandum, concludit binas* B D B G *eidem* A B *in directum esse non posse ex decimatertia primi, quod licet aliquo labore, (non à theoremate sed à demonstratione) tandem illud exigi possit. Tamen ex decima quarta facilius exegisset, Quia igitur neuter eorum satis nobis fecit, nouam cogimur apponere demonstrationem. Præterea in vno plano lineam vel superficiem esse intelligamus, cùm hæc linea vel superficies in eo plano infinitè vndique producto erit aut concipi poterit in sublimi verò, cum aliunde extra idem infinita productum planum steterit.*

Propositio secunda.

Si duæ rectę lineę se ad inuicem secuerint, in vno sunt plano, & omne triangulum in vno est plano.

Sint duæ rectæ lineæ A B D G *sese secantes in* I, *& coniuncta* A G *fiat triãgulum* A I G, *Dico binas* A B D G *in eodem esse plano, ac triangulum* A I G *in eodem esse plano, Si quidem triangulum sit in eodem plano, lineæ triangulum continẽtes in ipso erunt eodem plano, Veluti partes essentiæ ipsius trianguli rectilinei, Si verò non credatur triangulum* A I G *in eodem esse plano. Sed eius partem aliquam esse in sublimi, siue extra planum. Esto itaque trianguli* A I G *pars* A B C G *extra planum, reliqui* I E C, *sequetur inde lineæ* I A *partem* I E *esse in subiecto plano, partem verò* E A *in sublimi, quod fieri nõ potuit, per primam huius, nec similiter lineæ* I G *partem* I C *in plano, partem verò* C G *in sublimi esse. Nõ igitur trianguli* A I G *pars aliqua extra subiectum erit planum, sed in vno eodem plano erit, & proinde ipsum triangulum concludentes* A B D G A G *rectæ in vno erũt plano. Idem patebit, si obiiciatur* D I B *in sublimi esse. Si igitur duæ rectæ lineæ se adinuicem secuerint, &c.*

MONITVM.

Commendandum est cùm dicemus duas lineas sese secantes in eodem esse plano, illud potentia non simpliciter actu intelligi debere. Nam duæ se secãtes lineæ, in diuersis planis esse possunt. Sed licet in diuersis esse possint, hoc theoremate nihilominus per vtrasque eandẽ planam superficiem duci posse concludemus, quæ vnica & sola eas simul concipiet. quare dicens Euclides in eodem esse plano præ se fert in eodẽ concipi posse plano necessarium fore, licet per singulas earum infinita duci possint diuersa plana. illud tamen non obest quin bina eodem foueatur plano.

Propositio tertia.

Si bina plana se inuicem secuerint, communis eorum sectio recta est linea.

Bina plana A B G B *se secent in linea* B D: *Dico* B D *esse rectam: quod si non credatur, cùm signa* B *&* D *in vtroque sint* A B *&* G B *plano, ex hypothesi, per ea signa duci binæ rectæ in vtroque plano poterunt, per septimã diffinitionẽ primi: quæ (à tota disiunctiua) aut vnicam aut binas efficiẽt rectas, siquidem vnicam rectam, ea communis sectio planorum recta est, vt petimus. Si verò binas rectas, sequeretur binas rectas superficiem cõcludere, cùm ab eodem* B *oriantur signo, & in idem* D *coeant, contra* 12 *communem sententiam, quod fieri non potest. recta igitur erit* B D, *communis planorum sectio. Si itaque bina plana se inuicem &c.*

Propositio quarta.

Si recta linea duabus rectis se inuicem dispescentibus, in communi sectione ad angulos rectos steterit, & ad earundem planum ad angulos rectos erit.

Recta linea Z E duabus rectis A B G D se inuicem secantibus in E ad angulos rectos in communi sectione E stet. Dico rectam E Z ad planum (vtrasque A B G D concipiens) rectam esse, ponantur inuicem æquales A E E B D E G E, coniunctis A G G B B D D A rectis, quoniam dicimus rectam Z E ad omnes in plano A G B D eam tangentes rectam esse, si aliqua ad quam E Z recta non credatur inueniri possit, esto I E T in plano A B G D, connectantur à Z vertice hypotenusæ vel subtendentes Z A Z I Z D Z B Z T & Z G æquales igitur erunt A Z D Z B Z & G Z, per quartam primi, subtendunt enim æquales angulos qui ad E, æquis lateribus comprehensos, similiter A D & B G æquales erunt, per eandē 4 primi, subtendunt enim æquos ad E verticem angulos, per 15 primi, æquis lateribus (ex hypothesi) cōprehensos. Triangula igitur A Z D & B Z G (æquis lateribus contenta) æqualia ac æquiangula erunt, per octauam primi, angulus igitur A D Z angulo B G Z æquus erit, cùm insuper (ex eadem octaua primi) anguli E G B & E D A (triangulorum æquis lineis compositorum) sint æquales, sequetur triangula G E T & D E I duos angulos duobus angulis scilicet G E T ipsi D E I (ad verticem) & E G T ipsi E D I (vt proximè patuit) æquales habentia, & vnum latus E G vni E D (ex hypothesi) æquale. Reliqua latera E T T G reliquis E I I D æqualia habere, per vigesimamsextam primi. Cùm insuper angulus B G Z (hoc est T G Z) angulo A D Z (hoc est ipsi I D Z) æquus fuerit, & æquis lateribus T G G Z ipsis I D D Z contineantur, bases Z T & Z I æquales erunt, per quartam primi, quia demum E T T Z ipsis E I I Z rectis æquales, & basis E Z communis ostensæ sunt, anguli Z E T & Z E I (per octauam primi) æquales erunt, qui ideo (per 13 primi) recti erunt, recta enim E Z super rectam I T constituitur. recta igitur est E Z ad ipsam I E T, & proinde ad quascunque in plano A G B D ipsam E Z tangentes, similiter recta ostendetur. Sit itaque recta linea duabus rectis se inuicem dispescentibus, &c.

Propositio quinta.

Si recta linea tribus rectis se inuicem rangentibus ad angulos rectos in communi contactu steterit, ipsæ tres rectę lineę in vno sunt plano.

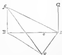
Esto recta linea A B rectos efficiens angulos cum tribus B G B Z D B super earum contactum, B erecta. Dico rectas B G B Z B D in eodē esse plano, quod si aliqua earū in sublimi esse credatur, sit B G quæ erit in eodem plano cum recta A B, per secūdam huius: nam sese tangunt in B, quia verò planum rectarum A B B G cōcurrit cum plano ipsarum Z B B D in B, ea plana extensa sese secabunt, producatur recta A G in E, sitq; planorum communis sectio B E, quæ (per tertiam huius) recta erit, atque in plano rectarum Z B B D existens B E, efficiet cum recta A B rectos angulos (per secundam diffinitionem huius) eò quod (per quartam huius) ad ipsarum Z B B D planum recta sit, & ideo ad omnes eam in ipso plano tangentes recta erit, quoniam insuper A B B G & B E sunt (ex hypothesi) in eodē plano, sed A B E angulus rectus ostensus est, angulus similiter A B G rectus (ex hypotesi) fuit, sunt autem in eodem plano. Rectus itaque A B G recto A B E angulo minor esset, quod esset absurdum, ex decima communi sententia primi non igitur erit G B recta in sublimi, nec proinde reliquarum vlla, tres itaque rectæ B G B Z B D in eodem erunt plano. Si ergo recta linea tribus rectis lineis, &c.

MONITVM.

Cogimur fineri demonstrationis à Theonis demonstrato variare: concludit enim Theon impossibile esse duos angulos æquos esse, siue rectos, cùm sint in eodem plano, licet 14 primi aliud concludat, scilicet non impossibile esse, sed ex illo sequetur tutius, eosdem angulos inæquales esse, & rectos, quod impossibile ostenditur, vt diximus, non autem binas rectas ad aliam angulos rectos in eodem plano efficere.

Propositio sexta.

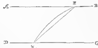
Si binę rectę lineę eidem plano ad angulos rectos steterint, parallelę erunt ipsę rectæ lineę.



Binæ rectæ A B G D *alicui plano* D B E *ad angulos rectos existāt: Dico rectas* A B G D *parallelas esse. Coniungatur recta* B D*, in plano verò* D B E *ad angulos rectos ipsi* B D *excitetur* D E*, per vndecimam primi, quæ æqualis secetur ipsi* A B *rectæ, coniunctis* A D A E B E*, cum enim* B D D E *sint in eodem plano. Reliqua* B E *in ipso erit plano, per secundam huius. Æqualibus verò* A B D E *communis ponatur* B D*: Æquales erunt* A B B D *ipsis* E D D B*. Sed angulos æquos comprehendunt, nempe rectos, ex hypothesi. Bases itaque* A D B E *(per quartam primi) æquales erunt. Quia verò* A D *ipsi* B E *&* A B *ipsi* D E *æquales fuerunt, communis occurrat* A E*. Triangula itaque* A E B *&* A E D *angulos* A B E *&* E D A *sub æquis lateribus & eadem basi comprehensos, æquos (per octauam primi) efficient. Rectus quidem est* A B E*, cum* A B *sit recta ad planum* D B E*, ex hypothesi, rectus igitur erit* E D A*. Et proinde recta* E D *ad rectas* B D A D G D *rectos efficiens angulos, vt patuit, docet ipsas* B D *ad* G D *in eodem esse plano, per quintam huius. Nam* B D *&* D E*, ex hypothesi,* A D *verò ad* D E*, ex demonstrato,* G D *autem ad* D E*, cum sit ad* D B E *planum (ex hypothesi) recta, angulos rectos effecerunt. Siquidem* B D A D G D *in eodem sint plano, in ipso erit* A B *reliqua trianguli* A D B*, per secundam huius. Quare in eodem plano erunt* A B *&* G D *& angulos interiores ad easdem partes* A B D G D B *duobus rectis æquos efficiunt, ex hypothesi. Ipsæ itaque* A B *&* G D *(per 28 primi) parallelæ erunt. Si igitur binæ rectæ lineæ ad angulos, &c.*

Propositio septima.

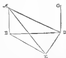
Si fuerint binę rectę lineę parallelę, assumantúrque in ipsarum vtraque contingentia signa, per ea signa ducta recta linea, in eodem est plano cum ipsis parallelis.



Sumantur in binis A B G D *parallelis contingentia signa* E *&* Z*. Dico rectam, per* E Z *ductam, in plano* A B G D *parallelarum esse. Quod si secus fieri possit, esto recta* E Z *per aliud planum. Quoniam* E *&* Z *signa sunt in parallelarum* A B G D *plano, per idem planum per eáque signa recta ducetur, à qua si differat, iam per* E Z *ducta, binæ rectæ superficiem concludent in signis* E *&* Z*, quod fieri non potest, per 12 communem sententiam. Quare non erit* E Z *recta in alio à parallelis plano. Si itaq; fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, &c.*

Propositio octaua.

Si fuerint binæ rectæ lineę parallelę, altera autem ipsarum alicui plano ad angulos rectos fuerit, Et reliqua eidem plano ad angulos rectos erit.



Binarum parallelarum rectarum A B *&* G D *altera* A B *alicui plano* D B E *sit ad rectos. Dico reliquam* G D *eidem* D B E *plano rectam esse, per* B *&* D *signa ducatur* B D*, cui in plano* D B E *ortogonalis esto* D E*, per vndecimam primi, quæ æqualis ponatur ipsi* A B*, communis verò* B D*. Sequetur binas* A B B D *binis* E D D B *æquales esse. Quæ quidem cum angulos æquos (nempe ex constructione rectos) suscipiant, bases* A D *&* B E *(per quartam primi) efficiunt æquales. Quare* A B B E *ipsis* E D D A *æquales sunt. Communis verò* A E *ipsis erit basis. Angulus igitur* A B E *angulo* E D A *(per octauam primi) æquus erit. Rectus autem est* A B E*, cùm* A B *sit ex hypothesi, ad planum* D B E *recta, in quo* B E *ipsam* A B *tangit, per secundam diffinit. huius.*

Rectus

Rectus itaque erit E D A, *sibi æqualis. Recta igitur* E D *duabus* A D B D *in communi contactu* D *ad rectos erigitur. Ad earum igitur planum & omnes eam in ipsarum* A D B D *plano tangentes, ipsa* E D *recta erit, per quartam huius. Sed in plano ipsarum* A D D B *reperitur* G D: *Nam à contingentibus signis* A & D *parallelarum* A B G D *ducta* A D, *in eodem est plano cum ipsis parallelis* A B G D, *per præfatam. Ad ipsam itaque* D G *recta* E D *angulum* E D G *rectum efficit. Sed &* G D B *rectus est, per 29 primi, cum* A B D *sit (ex hypothesi) rectus. Recta ideo* G D *(ad binas* B D E D *recta in communi sectione* D *existens) ad earum planum* D B E *recta erit, per quartam huius. Si itaque fuerint binæ rectæ lineæ parallelæ, altera autem, &c.*

Propositio nona.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, nec eidem in eodem existentes plano, & adinuicem sunt parallelæ.

Sint rectæ A B & G D *eidem rectæ* E Z *parallelæ, non autem cum ipsa eidem plano insistentes. Dico ipsas* A B & G D *adinuicem parallelas esse. A dato contingente signo* I *in recta* E, *ipsi* E Z *ortogonales excitentur,* I T *scilicet* I T *per planum parallelarum* A B E Z, & I K *per planum parallelarum* G D E Z. *Recta igitur* E Z *ad planum ipsarum* I T I K *recta erit, per quartam huius. Ad idem itaque planum* T I K *recta erunt,* A B G D, *per octauam huius, cùm sint ipsi* E Z *parallelæ, quæ quidem plano* T I K *recta fuit. Si igitur duæ* A B G D *eidem plano* T I K *recta fuerint, parallelæ erunt (per sextam huius) ipsæ* A B G D. *Quæ ideo eidem rectæ parallelæ (non in eodem existentes plano) &c.*

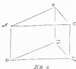
MONITVM.

Data opera exclusit Euclides ab hoc theoremate idem planum. Nam si liberam parallelarum hypothesim eidem plano reliquisset, ambigua fuisset huius conclusio. Dicenti nanque, eidem parallelas inter se parallelas esse, obstitisset id quod trigesima primi monuimus, eo quod quandoque possint in rectam cadere, nec ideo sint parallelæ, hac de causa trigesimæ primi disiunctiuam contulimus (aut in rectum positæ) vt sibi constaret demonstratio, ea quæ idem poscebat planum. Quare trigesimum theorema propriæ demonstrationi subiicere volentes, apposuimus hypothesi idem planum optari. Cùm autem ad solida ventum est, à quibus idem planum abstulimus, hæc diuersorum planorum hypothesis, conclusionem parallelarum sibi inuicem simplicem ac nulli disiunctiuæ obnoxiam liberè profert. Si autem obiiceretur huic quod trigesimæ primi obiecimus, rectas in rectam constitui, tum refragaremur hypothesi, quæ diuersa optat plana, lineæ nanque in rectam constitutæ alteri parallelæ semper idem possident planum, non ergo diuersa inessent plana, contra hypothesim, diuersa optantem. In planis itaque, trigesimæ primi disiunctiuam contulimus, aut in rectam constitutæ In solidis verò disiunctiuam detraximus, proposita planorum diuersitate simplicem conclusionem generante.

Propositio decima.

Si binæ rectæ lineæ sese inuicem tangentes, ad binas rectas sese ad easdem partes tangentes parallelæ fuerint, ęquales angulos comprehendent.

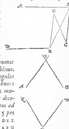
Proponantur binæ A B B G *sese tangentes in* B, *quibus binæ* D E E Z *sese tangentes in* E *ad easdem partes* B & E *sint parallelæ: Dico ipsos* D E E Z *æqualem angulum ipsis* A B B G *continere. Secentur* A B & D E *æquales, similiter* B G & E Z *æquales. Subtensis* A G D Z, *connexisque* A D B E G Z. *Quoniam æquas & parallelas* A B D E *ad easdem partes coniungunt* A D B E, *Ipsæ æquales & parallelæ sunt, per trigesimamtertiam primi. Haud secus* B E G Z *parallelæ erunt, & proinde* A D G Z *eidem* B E *parallelæ, non in eodem existentes plano, adinuicem erunt*



[illegible] per nonam huius) & æquales per primam communem sententiam. Eodem dig[illegible] D & G Z æquas & parallelas, coniungentes A G D Z rectæ, parallelæ & æquales erunt, per eandem [illegible] simamtertiam. Atqui A B B G ipsis D E E Z æquales, bases A G D Z habent æquales. Ipsæ itaque angulum A B G angulo D E Z æquis lineis contento, æqualem habebunt, per octauam primi. Ipsæ igitur A B B G & D E E Z æquales continent angulos. Si itaque binæ rectæ lineæ sese tangentes, ad binas, &c.

MONITVM.

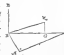
Hoc theorema vim illatam quodammodo perpessum sentimus. Cùm enim parallelas se tangentes angulos concludere æquales extra idem duntaxat planum sinat, cogere videtur theorematis liberas facultates, ad ea tantùm quæ solidis congruunt, licet æquè ad idem planum & ad diuersa eius seruari possit decretum, secus decimæquintæ huius, cui necessario hæc conuenit hypothesis. Quare abstulimus à Zamberto has voces (in eodem nõ fuerint plano) vt restituta libertate planis & solidis figuris hoc inseruiat theorema. Cæterùm quale reliquit Euclides vix ad nos delatum ambigimus: Æqualitas nanque angulorum non necessario sequitur hanc hypothesim à maioribus traditam. Quinimò binas proponemus (iuxta Theonis constructionem à Zamberto versam) rectas A B B C sese tangentes, parallelas & æquales binis D E E G sese tangentibus, nec in eodem (si libeat) plano, attamen angulos A B G & D E G inæquales constituent, est nanque B acutus, E vero obtusus, fit igitur manca hypoth. Rursus aliud consurgit obiciendum, quo seruata hypothesi ac conclusione æqualium angulorum, nihilominus abest demonstratio parallelarum parallelas æquales iungentium, ex 33 primi, hoc typo in quouis parallelogrammo, bifariam secto, cuius altera pars in plano vel sublimi, parallelas A B B G binis D E E Z constituat, patet eas æquales & angulos æquos concludere, nihilominus si parallelas iuxta demonstrationem huius A B D E parallelis iungamus, eisdem iungentibus reliquas G B E Z iungentes, parallelas non esse constat, sicq; ruit demonstratio. Ad hoc dicemus producendas esse rectas A B & G B in directum circa B, tum qui ad verticẽ B angulus angulo A B G oppositus, eidẽ A B G æqualis erit, ex 15 primi, isque idem, per huius theorematis demonstrationem angulo D E Z æqualis probabitur. Bini itaque A B G & D E Z, eidem opposito ipsi A B G æquales, adinuicem erunt æquales. Ad illud autem, Huius defectum quo



rectas A B B E se tangentes, ad binas D E E G se tangentes parallelas & æquales proponimus, non tamen æquos angulos comprehendentes, ab eo oriri, quod parallelas coniungentes ad easdem partes (iuxta 33 primi votũ) nõ copulent, quorum obliti qui demonstrandam hanc aggressi sunt, in hũc cecidere casum. Nos itaque huic obuij contulimus particulã (ad easdẽ partes) vt propositarũ parallelarum contactus, ad easdem earum partes constitutus, iungentes necessariò ex 33 primi, parallelas & æquales statuat, videmus nimirum his obiectis propositas parallelas, mutuos non emittere contactus circa easdem partes, hac demum arte constabit conclusio demonstratione suffulta.

Propositio vndecima. *Problema 1.*

A dato signo in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem lineam ducere.



Esto A B G subiectum planum. In sublimi verò signum sit Z. Oportet iam à B ipso Z ad A B G planum perpendicularem duci. A signo Z ad rectam A B (extensam in subiecto plano A B G) perpendicularis agatur Z B, per 12 primi. Quæ si ad A B G planum recta fuerit, consequimur optatum. Sin minus ipsi A B ad signum B in plano A B G ad rectos excitetur B G, per 11 primi. A signo autem Z in rectam B G perpendicularis cadat Z G. In planò vero B G Z à signo B parallela ipsi Z G fiat E B, per 31 primi. Angulus E B G rectus erit, ex 29 primi, eò quòd rectus sit (ex hypothesi) Z G B. Cùm enim

AB

A B [illegible] (ex hypothesi) efficiat ad ipsas B G B Z. *Ipsa* A B *ad ipsarum* B G B Z *planum (per [illegible] huius) & ad omnes in ipso plano eam tangentes (per secundam diffinit huius) rectos faciet. Sed* E B *in plano* B G B Z *constructa fuit. Ad ipsam* E B *igitur recta erit* A B. *Sed* E B *ad* B G *recta fuit constructa. Ipsa igitur* E B *ad planum* A B G *recta erit, per quartam huius. Et proinde ipsi* E B *parallela* Z G, *eidem plano* A B G *recta erit, per octauam huius. A dato itaque signo* Z *in sublimi ad subiectum planum* A B G *perpendicularem lineam* Z G *duximus.*

Propositio duodecima. *Problema 2.*

Ad datum planum à dato in eo signo, lineam rectam ad angulos rectos excitare.

Esto planum A G, *datum verò in eo signum* A, *oportet iam ipsi plano ad signum* A *perpendicularem constituere. Suscipiatur contingens signum extra planum sitq;* B, *à quo (per præfatam) in* A G *planum perpendicularis agatur* B G. *Ipsi autem* B G *(per 31 primi) per signum* A *parallela fiat* A D. *Cùm autem* B G *sit recta ad planum* A G, *ex constructione, ad idem planum recta erit* D A, *eidem* B G *parallela, per octauam huius. Ad datum itaque planum* A G *à dato in eo signo* A, *lineam rectam* D A *ad angulos rectos constituimus.*

D B A G

Propositio decimatertia

Ad idem planum ab eodem signo in plano aut sublimi sumpto, binæ rectæ lineæ ad angulos rectos non constituentur ad easdem partes.

Sit planum A G B, *signum verò contingens in eo sit* G, *in sublimi autem esto signum* E: *Dico ad planum* A G B *à signo* G *binas rectas non posse excitari, nec insuper à signo* E *sublimi ad idem planum binas rectas posse dimitti. Quod si opponatur, Sint primum à signo* G *binæ* G C G E *rectæ ad idem planum* A B. *Ipsæ igitur parallelæ erunt, ex sexta huius. Sed & concurrent in* G, *quod est absurdum, scilicet contra parallelarum diffinitionē. Haud secus si à sublimi signo* E, *binæ demitti credantur* E G E D *ad planum* A G B *rectæ. Nam (per eandem sextam huius) parallelæ essent, & nihilominus concurrerent in* E, *quod fieri non potest. Non igitur binæ ab eodē signo aut sublimi, aut plano existenti, ad idem planum rectæ constituentur. Ad idem igitur planum ab eodem signo, &c.*

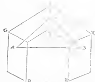
C E D A G B

MONITVM.

Theorematis voces aliquas contulimus vt vtramque demonstrari dicamus sententiam, scilicet à sublimi signo ad planum, & à plani signo ad sublime, binas simul plano eidem ortogonales non constitui, quorum alterum tantùm dixerunt Campanus & Theon, quiquidem insuper concludit hanc veluti & quintam huius contra decimamquartam primi, scilicet, impossibile esse binos rectos angulos ad idem signum in eodem plano constitui.

Propositio decimaquarta.

Ad quę plana eadem recta linea recta est, parallela sunt ipsa plana.



Ad bina plana G D *&* Z E *sit recta linea* A B: *Dico parallela ipsa* G D Z E *plana esse, quod si non sint parallela, undique producta alicubi concurrent. Concurrant igitur in* I T, *quæ erit linea recta, per tertiam huius, in ipsa* I T *sumatur contingens signum* K, *per planum autem* D G *ducatur recta* A K, *per planũ verò* Z E *fiat recta* B K, *quoniam* A B (*ex hypothesi*) *est recta ad plana* G D *&* Z E, *ipsa* A B *recta erit ad omnes rectas in ipsis planis ipsam tangentes, per secundam diffinitionem huius. Anguli igitur* A B K *&* B A K *recti erunt, & ideo parallelæ erunt* A K B K *rectæ, per vigesimamoctauam primi, cùm sint in eodem plano per secundam huius, & concurrent in* K, *quod est absurdum. Nõ igitur alicubi concurrunt* G D *&* Z E *plana, quare parallela erunt, per sextam diffinitionem huius. Ad quæ itaque plana eadem recta linea recta est, &c.*

Corollarium.

Si recta linea vni parallelorum planorum recta fuerit, & reliquo recta erit. *Nam si cum reliquo recta non esset, ipsa ad aliquam eius plani lineam angulum recto minorem efficeret, quæ quidem linea (per vndecimam communem sententiam) tandem concurreret cum aliqua alterius plani linea, quare ipsa plana sequeretur non esse parallela contra hypothesim, cum parallela suppōnãtur. Si itaque recta linea vni parallelorum planorum, &c.*

Propositio decimaquinta.

Si binę rectæ lineæ se inuicem tangentes ad binas se inuicem tangentes fuerint parallelæ, non tamen in eodem plano existentes: Parallela sunt quæ per ipsas plana.



Bina inquam rectæ A B B G *sese tangentes in* B, *ad binas* D E E Z *sese tãgentes in* E *sint parallelæ, sed nõ sint in eodem plano: Dico plana quæ per* A B B G, *& per* D E E Z *parallela esse à contactu* B *in planum rectarum* D E Z *perpendicularis agatur* B I, *per vndecimam huius, per signum verò* I *ipsis* E D E Z *in plano* D E Z *parallelæ ducantur* I T I K, *per trigesimamprimam primi, quoniam parallelæ sunt* A B I T *eidem* E D, *& adinuicem ipsæ* A B I T *parallelæ erunt, per nonam huius. In eas igitur cadens recta* B I *angulos* A B I T I B *rectos efficit, per vigesimamnonam primi, cùm recta sit ex hypothesi* B I *ad planum* T I K, *siue* D E Z. *Similiter ostẽdemus angulos* G B I K I B *rectos esse, recta itaque* I B *ad binas* A B B G *recta erit, & ideo ad earum planum* A B G *recta erit, per quartam huius. Sed eadem* I B *ad planum* T I K, *siue* D E Z (*ex hypothesi*) *recta fuit. Ad quæ igitur plana* A B G *&* D E Z *eadem* I B *recta est, parallela sunt ipsa plana* A B G *&* D E Z, *per decimamquartam huius. Si igitur binæ rectæ lineæ, &c.*

Corollarium.



Dato plano per datum extra illud signum, parallelum planum ducere. *Esto planum* A B C, *signum verò* E. *Per signum verò* E *ipsis* A B B C *parallelæ fiant* G E E I, *per trigesimamprimam primi. Ipsæ igitur* G E E I *sunt in plano* G E I *parallelo ipsi* A B C *plano (per hanc) cum sint tangentes.*

Propositio decimasexta.

Si bina plana parallela à plano aliquo dissecta fuerint, communes ipsorum sectiones parallelę sunt.

Binæ

Bina plana A B *&* G T *sint parallela, ipsa autem plana secet planum* Z D I E, *in sectionibus* Z E *&* D I, *quæ erunt rectæ lineæ, per tertiam huius. Dico ipsas* Z E *&* D I *rectas parallelas esse, quod si non esse putentur, concurrant alicubi in* K, *cùm enim recta supponatur linea* E Z K, *pars verò eius* Z E *sit in plano* B A, *& reliqua* Z K *in eodē* B A *plano producto erit, per primam huius, eadem causa &* I D K *rectæ in* G T *plano erit, concurrent igitur* A B *&* G T *plana, in signo* K, *contra suppositum, cùm sint parallela, quod fieri non potest. Non igitur concurrent* Z E *&* D I *sectiones, in plano* Z D I E *existentes, quare parallelæ erunt. Si itaque bina plana parallela à plano aliquo dissecta, &c.*

Corollarium.

Si bina plana eidem plano parallela fuerint, & ad inuicem parallela erunt, aut idem planum efficient.

Nam si plana D G C H *eidem* A B *parallela, non sint inter se parallela, ipsa producta concurrent, per conuers. sexta diffinitionis vndecimi, concurrant in* G E *rectam. Dico* G D G H *in eodem esse plano: esto in plano* A B *aliqua recta* A C, *per quā & signū* E *extendatur planum secās bina* D G G H *plana, per rectas* E D E I. *Parallela igitur erūt* A C D E *&* A C E I, *per hanc, inter se tamē parallelæ nō sunt* D E E I, *cū concurrant in* E. *Ipsæ itaque* D E E I *in rectū sunt positæ, per 30 primi, et ideo plana* D G G H *in eodē sunt plano, quod si nō essent, rectæ* D I *pars* D E *esset in plano* D G *pars verò* E I *in sublimi alterius plani* G H, *quod fieri non potest, per primā huius. In eodē igitur sunt plano* D G *&* G H *plana, si verò nusquam concurrant, parallela erunt* D G *&* G H *plana, per sextam diffinitionem vndecimi.*

MONITVM.

Præcedens corollarium huic theorematí contulimus, futuris demonstrandis admodum vtile, quod enim trigesima primi discußimus in lineis, idem in planis hoc corollario docemus, vt in solidis exponendis eorum bases in eodem esse plano huius adminiculo sæpius ostendamus. Quare eadem necessitate qua trigesima primi compulsi, disiūctiuam conferre voluimus, vt scilicet parallela, aut equidem in eodem plano degentia sint parallela plana veluti rectas eidem rectæ parallelas inter se aut parallelas, aut rectam eandem constituentes trigesima primi diximus.

Propositio decimaseptima.

Si binę rectę lineę à planis quotlibet parallelis secentur, in easdem rationes inter ea plana secabuntur.

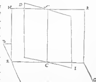
Sint bina recta lineæ A B G D *in quibusuis planis positæ, illas tamen secent quotcunque plana sibi inuicem parallela* I T K L M N *in signis* A E B G Z D *Dico rectas* A B *&* G D *secari inter plana, vt* A E *ad* E B, *sic* G Z *ad* Z D. *Coniungantur* A G B D E G E C *&* C Z *rectæ, quoniam trianguli* A B G *planum, secat plana* K L *&* I T *per rectas* E C *&* A G, *parallelæ sunt* E C *&* A G *rectæ, per præmissam, quare* E C *secat rectas* A B C B *proportionales* A E *ad* E B, *vt* G C *ad* C B, *per 2 sexti, haud secus in triangulo* G B D *dicemus. Nam illud secat plana* K L *&* M N, *per rectas* C Z *&* B D, *quæ ideo (per proximā) parallelæ fuerunt. Erit itaque (per secundam sexti) sicut* G C *ad* C B *sic* G Z *ad* Z D, *sed sicut* G C *ad* C B, *sic fuit* A E *ad* E B. *Sicut igitur* A E *ad* E B, *sic erit (per vndecimam quinti)* G Z *ad* Z D. *Si igitur binæ rectæ lineæ à planis quotlibet, &c.*

MONITVM.

Hanc protulit Campanus in lineis sese tangentibus aut parallelis intelligi, Theon verò vberiorem proferens Geometriæ fructum, in quibusuis indefinitè lineis intelligit. Veruntamen illud vnum omisit, quod sectiones illæ proportionales, intelligi debeāt inter plana comprehensa. Nam si lineæ ipsa plana prætergrederentur, non sequeretur ipsas proportionaliter secari, ob contingentes earum extra plana quantitates quare huic theoremati contulimus has voces inter ea plana.

Propositio decimaoctaua.

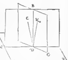
Si recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, & omnia quę per ipsam plana eidem plano ad angulos rectos erunt.



Sit recta linea A C *ad planum* B G *recta. Dico omnia plana quæ per ipsam* A C *fiunt eidem* B G *plano recta esse. Sint per rectam* A C *quotlibet plana* E F *&* D I, *secet autem planum* E F *reliquum* B G *per rectam* E C, *ipsi porro* E C *in plano* E F *ad rectos excitetur* H E *anguli itaq;* H E C A C E *interiores recti erunt. Parallelæ igitur erunt* A C H E *rectæ, per 28 primi, &* H E, *recta erit ad planum* B G, *per octauam huius. Binæ igitur* A C H E *in plano* E F *ductæ, communi segmento* E C *ad angulos existentes, reliquo plano* B G *sunt rectæ, planum igitur* E F *ad planum* B G *rectum erit, per 3 diffinitionem huius. Eodem argumento ostendemus planum* D I *eidem plano* B G *rectum esse ducta per* I *parallela ipsi* A C *in plano* D I. *Quæ igitur (per 8 huius) recta erit plano* B G, *& rectos faciet cum* C I *communi segmento quare planum* D I *plano* B G *rectum erit. Sicque reliqua per* A C *ducta plana ipsi* B G *plano recta erunt. Si itaq; recta linea plano alicui ad angulos rectos fuerit, &c.*

Propositio decimanona.

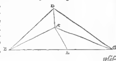
Si bina plana seinuicem secantia plano alicui ad angulos rectos fuerint, & ipsorum communis sectio ad idem planum ad angulos rectos erit.



Bina inquam plana A B *&* G B *seinuicem secantia in* B D *sint alicui plano* A E *recta. Dico* B D *communem eorum sectionē eidem plano* A E *rectam esse. quod si non credatur, excitetur recta* A D *communi planorum* A B *&* A E *sectioni, ortogonalis* D C *in plano* A B, *per 11 primi, ipsi vero* D G *communi planorum* B G *&* A E *sectioni similiter in plano* B G *ad rectos erigatur* D Z *quoniam planum* A B *est rectum ad planum* A E, *ex hypothesi, & communi ipsorum segmēto* (D A) *angulos rectos efficit* C D, *posita in altero ipsorum planorum. Recta igitur* C D *ad reliquum* A E *planum recta erit, per conuersam 3 diffinitionis huius. Simili argumento recta patebit* Z D *ad idem* A E *planum esse, cùm recta sit ad* D G *communem sectionem. Ad idem igitur planum* A E *atque idem in eo signum* D, *binæ rectæ lineæ* C D Z D *angulos rectos efficiunt, contra 13 huius, quod fieri nequit. sola itaque* B D *ad signum* D *plano* A E *recta erit, nec alia vlla. Si igitur bina, &c.*

Propositio vigesima.

Si solidus angulus sub tribus angulis planis comprehendatur, planorum duo quilibet, reliquo sunt maiores quomodocunque suscepti.



Comprehendatur angulus solidus qui ad A, *sub tribus angulis planis* B A G G A D D A B: *Dico duos quoslibet planorū reliquo maiores esse. Sit inquam eorū maximus* B A G. *Ad signum autem* A *rectamq;* B A *angulo* D A B *æqualis ponatur* B A E, *per 23 primi. Secetur itē ipsi* A D *æqualis* A E *per signū* E *verò ducatur recta vtrinque vsque ad* D B D G *rectas,*

ipsasq́;

ipsasq́, secās in signis E & B, *cōiunctis* E D D G *rectis. Cū autē anguli* E A D B A E *æquales (ex hypothesi) sub æqualibus* D A D E, & *communi* A E *concludantur rectis, bases* E D B E *erunt (per 4 primi) æquales. Quia vero triāguli* E D G *maiora sunt bina* E D D G *reliquo* E G *latera, per vigesimam primi, sed* E D & B E *sunt æqualia reliquum igitur* D G *reliquo* E G *maius erit. Triangulorū igitur* D A G E A G *bina* D A A G *binis* E A A G *sunt æqua latera, basis verò* D G *basi* E G *maior. Angulus itaque* D A G *angulo* E A G *(per 25 primi) maior erit angulus autē* D A B *reliquo* B A E *æqualis fuit. Bini itaque* D A B D A G *anguli, reliquo* B A G *(toto & maiori sumpto) maiores sunt: multo igitur maiores erunt reliquo quolibet, qui non sit eorum maximus. Si igitur solidus angulus sub tribus, &c.*

Propositio vigesimaprima.

Omnis angulus solidus sub planis angulis minoribus quatuor rectis cōprehenditur.

Quoniam ostendimus cuiuslibet poligoni latera numero binario excedere numerum triāgulorum, in angulis ipsius poligoni descriptorum, corollar. 32 primi hincque sequi duplum numerum laterum, seu angulorum præfati poligoni, excedere quaternario numerum angulorum rectorum, angulis poligoni æqualium, qui quidem æquus est duplo triangulorum cùm singula triangula binos adhibeant rectos, vt eodem corollario latius exposuimus.

Sit itaque angulus solidus qui ad A, *quotuis angulis planis* B A C C A D D A E E A G G A B *comprehensus, quem subtēdat basis* B C D E G. *Pyramis igitur erit* A B G D E G, *per decimam diffinitionem huius. Quot itaque sunt basis latera, totidem sunt angulum ad verticem* A *continentia triangula. Sed quot sunt triangula, dupli numero sunt anguli recti à triangulis contenti. cuiuslibet anguli etenim binis æquipollent rectis, per 32 primi. Quot igitur sunt anguli recti à triangulis angulum* A *continentibus, totus est laterum aut angulorum basis* B C D E G *duplus numerus, sed duplus laterum aut angulorum basis numerus, excedit eiusdem basis rectorum angulorum numerum quaternario. Numerus igitur angulorum rectorum à triangulis angulum* A *continentibus comprehensorum, quaternario excedit numerum angulorum rectorum ab eadem basi* B C D E G *comprehensorum. Omnes itaque anguli triangulorum angulum* A *solidum componentium, quatuor rectis excedunt angulos, basis* B C D E G *angulū solidū* A *subtendentis. Cùm autē singulos ipsius basis angulos cōponant tres anguli plani solidos angulos constituentes, vt* A B G A B C G B C *angulū solidum* B *componentes, sicque reliquos* C D E G: *quorum bini qui supra basim scilicet* A B G A B C *reliquo* G B C *(angulo basis) sunt maiores, per vigesimam huius: sequetur omnes qui ad basim angulos triāgulorum angulum* A *constituentium simul sumptos, angulis basis simul sumptis maiores esse. Cùm igitur omnes triangulorum anguli angulos basis quatuor tantum rectis excesserint: qui verò supra basim eosdem basis angulos excedant, manifestum est reliquos qui ad* A *solidum angulum quatuor rectis minores superesse, cùm omnes triangulorum anguli simul sumpti, angulos basis quatuor tantùm rectis excesserint. Omnis itaque angulus solidus sub planis angulis minoribus quatuor rectis continebitur.*

MONITVM.

Huius demonstrationem quadam prolixitate præter Theonem ampliare cogimur, is enim in trilatera Pyramide tantum demonstrans quæ ad reliquorum solidorum libertatem exquirebantur, omisit. Campanus vero satius, sed obscurè paululum (corollar. 32 primi) tradidit poligonorum in triangula distributionem, quam memorans indemonstratam reliquit: vt quod triangula quolibet poligono concipi debent, non ostenderit necessarium fuisse, à quo penitus huius theorematis pendet generalis demonstratio.

Propositio vigesimasecunda.

Si fuerint tres anguli plani quorum bini reliquo sint maiores quomodocunque suscepti, comprehendant autem ipsos æquales rectæ lineæ, Ex connectentibus rectas lineas æquales, triangulum constitui est possibile.





Sint tres anguli plani B E T *æqualibus lineis* A B B G, D E E Z L T T K *comprehensi, quilibet duo eorũ reliquo sint maiores. Connectant autem lineas æquales rectæ,* A G D Z L K: *Dico ex ipsis* A G D Z L K *connectentibus triangulum fieri posse, sumantur bini minores qui sint* E *&* T, *ad rectam* T K *signúmque eius* T *angulo* D E Z *æqualis ponatur* K T I, *per vigesimamtertiam primi, ipsi autem* E Z *æqualis sit* T I, *reliqua* K I *æqualis erit ipsi* D Z, *per quartam primi, quia verò æquales sunt* T L T K T I *rectæ, ab eodem signo* T *ipsæ in circunferentiam cadent, per diffinitionem circuli, subtendatur itaque recta* L I. *Trianguli* L K I *bina latera* L K K I *reliquo* L I *subtendente sunt maiora, per vigesimam primi, quia verò maiores sunt (ex hypothesi) bini* D E Z L T K *anguli (hoc est totus* L T I) *reliquo* A B G, *& æquis lateribus* L T T I *ipsis* A B B G *comprehensi, & basis* L I *basi* A G *maior erit, per vigesimamquartam primi. Multò igitur maiores erunt bina* L K K I *(hoc est* L K D Z) *reliqua* A G, *binæ igitur minores, reliqua sunt maiores, quare sumptæ non minores facilius reliqua erunt maiores. Ex tribus autem rectis* A G D Z *&* L K, *quarum duæ qualibet reliqua sunt maiores, triangulum constituemus, per vigesimamsecũdam primi. Si igitur fuerint tres anguli plani quorum bini, &c. Quod si bini* D E Z L T K *(hoc est totus* L T I) *binis rectis sint æquales, quæ eorum subtendet circunferentiam, circuli dimetiens erit, vt* L I, *quæ maior est quauis alium angulum subtendente, quare maior erit* L I *ipsa* A G, *quemuis angulum in circulo subtendente. At verò binis* L T K K T I *duos rectos excedentibus, vt hoc exemplo vltimo, perspicuum est binas* L K K I *multò maiores esse quauis reliqua angulum subtendente* A G, *cùm ipsæ* L K K I *sint maiores dimetiente, quæ maxima est omnium subtendens, per decimamquintam tertij. Quauis itaque angulorum proposita quantitate patuit expositum.*





MONITVM.

Theon huius tantùm primam partem demonstrat, cùm scilicet bini anguli duobus rectis minores existunt, illud quidem duplici demonstratione, mancam relinquens huius theorematis intelligentiam, quo ad postremas triangulorum magnitudines. Non igitur genus huius docuit, sed tantũ speciem, quod minimè sufficit.

Propositio vigesimatertia. *Problema 3.*

Ex tribus angulis planis (quatuor rectis minoribus) & quorum duo quomodocunque sumpti, reliquo sunt maiores, solidum angulum conficere.

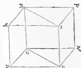
Proponantur tres anguli plani B D H *minores quatuor rectis. Sint item duo eorum quilibet reliquo maiores, oportet iam ex ipsis* B D H *angulis solidum angulum conficere. Contineantur ipsi* B D H *anguli æquis lateribus* A B B C F D D G G H H I, *cōiūctis basibus* A C E F G I. *ex tribus autem connectentibus* A C E F G I *triangulum (per præfatam) constituamus* K L M. *Esto autem rectæ* A C *æqualis* L M, *ipsi verò* E F *sit æqualis* L K, *&* K M *rectæ* G I, *circa* L M K *triangulū (per quintam quarti) describatur circulus, cuius centrum sit* N, *connexis* N L N M N K: *à signo verò* N *plano* L M K *recta excitetur* N O, *per duodecimam huius, quoniam anguli* B D H *quatuor rectis sunt minores, rectæ* A B B C *ipsis* L N N M *necessariò maiores erunt. Nam si æquales essent, æqualem angulum ipsi* L N M *continerent, per quartam primi, similiter* G H I *ipsi* M N K *&* E D F *ipsi* K N L, *cùm vtræque inter se æquales sint, ex hypothesi, scilicet continentes angulos, & quæ ex centro. Tres itaque angulos* B D H *quatuor rectis (qui ad* N *centrū) æquales constituerent, contra hypothesim: non igitur sunt ipsæ,* A B B C *ipsis* L N N M *æquales. Sed neque minores ipsis* L N N M, *nā intra triangulū* L N M *caderent, ac anguli qui ad* N *maiores angulos efficerent, per vigesimam primam primi, & id propterea quatuor rectis maiores: nam (per corollarium 15 primi) qui ad centrum omnes anguli quatuor rectis sunt æquales, quod rursus obstaret hypothesi. Maiores itaque erunt* A B B C *ipsis* L N N M, *quæ ex centro. A recto itaque* A B *quadrato, tollatur quadratum rectæ* L N, *reliqui (per coroll. 34. sexti) latus reperiatur, cui æqualis ponatur recta* N O *connexis* O L O M O K *rectis. Cùm autem recta* A B *possit quadrata ex* L N N O, *angulus verò* O N L *(ex constructione) rectus sit, sequetur rectam* L O *eadem quadrata (per quadragesimam septimam primi) potentem, ipsi* A B *æqualem esse, sed ipsi* L O *æquales sunt singulæ* O K O M, *ipsi verò* A B *singulæ* B C F D D F G H H I. *Singulæ igitur ipsarum* L O O K O M *singulis* A B B C E D D F G H H I *æquales erunt, atqui rectis* M L L K K M *æquales fuerunt reliquæ* A C E F G I. *Triāgula itaque* O M L *&* A C B, *æquales efficient angulos* L O M *&* A B C *æquis lateribus contentos, per octauam primi, ac eodem argumento* L O K *ipsi* E D F *&* K O M *ipsi* G H I *æquales fieri ostenduntur. Tres igitur anguli* L O M L O K *&* K O M *plani, propositis tribus æquales, ad vnum signum* O *constituuntur, non in eodem existentes plano, cùm* O *in sublimi (per cōstructionem) fuerit, angulúmque solidum constituunt, per nonam diffinitionem huius. Ex tribus itaque angulis planis quatuor, &c.*

MONITVM.

Prolixam admodum extenuat huius demonstrationem Theon, circa diuersitatem situs trianguli K L M *(scilicet aut centro intus, aut in latere, aut equidem extra constituto) valde laborans, quod ex se sat patet, cum ex hypothesi omnes comprehendentes angulos fuerint æquales positæ, necessum erit alteri earum à circunferentia ad perpendicularis verticem collocatæ, reliquas ab eadem circunferentia ad eundem verticem ductas æquales fieri, quauis arte fiat trianguli dispositio, dum tamen in circulo descriptum fuerit, iuxta hypothesim. Omnes etenim rectæ illæ rectos angulos æquis lateribus, scilicet ea quæ ex centro & perpendiculari contentos subtendunt. Quare necessariò æquales, per quartam primi erunt. Et proinde quauis trianguli dispositione, semper pyramidis vertex, siue solidus angulus centro circuli basim continentis perpendicularis erit, ob hypothesim æquorum laterum angulos datos continentium, vt igitur tantos euitemus anfractus, breuiorem conati sumus afferre demonstrationem.*

Propositio vigesimaquarta.

Si solidum parallelis & quadrangulis planis comprehendatur, quæ ex opposito ipsius plana similia æqualia sunt, & parallelogramma.



Esto ABZE *solidum planis* AE AG ZB ZI AT *&* DZ *parallelis & quadrangulis comprehensum: Dico qualibet eius* ABZE *plana opposita, esse similia æqualia & parallelogramma. Quoniam bina plana* AT DZ *parallela secant planum* AG, *communes eorum sectiones* AB *&* DG *sunt parallelæ, per decimam sextam huius. Similiter quia eadem plana* AT *&* DZ *secant planum* AE, *parallelæ erunt* AI DE, *sicq; omnes opposita quadrilaterorum rectæ parallelæ patebunt. Id propterea singula plana quadrilatera & parallelis oppositis rectis comprehensa, parallelogramma erunt, per trigesimamsextam diffinitionem primi. Cùm insuper bina* AB AI *sese tangentes, binis* DG DE *sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, sed in oppositis, anguli* BAI *&* GDE *sunt (per decimam huius) æquales. Sed ipsos angulos continentes rectæ* BA AI *sunt oppositis rectis* GD DE *æquales, per trigesimamquartam primi. Bases igitur* BI *&* GE *(ex quarta primi) æquales erunt, ac triangula* BAI *&* GDE *æquiangula & æqualia. Trianguli autem* BAI *duplum est* AT *parallelogrammum, per trigesimamquartam primi. Similiter & ipsius* GDE *duplum est* DZ *oppositum, æquum est igitur* AT *ipsi* DZ *opposito. Haud dissimili argumento ostendemus reliqua parallelogramma opposita æqualia esse. Sed & similia, cum* BA AI *latera ipsis* GD DE *lateribus sint æqualia, erit* BA *ad* AI *sicut* GD *ad* DE, *quæ circum æquales angulos parallelogrammorum* AT *&* DZ *oppositorum, quæ ideo sunt similia, per primam diffinitionem sexti. Ipsius itaque solidi* ABZE *plana opposita, similia, æqualia, & parallelogramma esse ostendimus. Si itaque solidum parallelis & quadrangulis planis, &c.*

MONITVM.

Hanc demonstraturus Campanus idem præfert demonstrationi, quod solent incertarum professionum interpretes distrahentis propositi sententiis seipsas non tollerantibus, ab illarum etenim natura hoc theorema depromptum esse arbitramur. Nam cùm id quod fieri non potest ab exemplari sibi propositum viderit, scilicet solidum sub parallelis planis comprehensum, producere parallela eius opposita plana, necessariò parallelogramma, percipit huiusmodi falsam intelligentiam ad veriorem esse reducendam, quapropter ab hac orditur voce, quicquid dicant alij, quæ patulæ testatur eum non eius fuisse sententia, quæ ab Euclide ad nos (non incorrupta) delata est, attamen solidum parallelogrammum impropriè denominans verum parallelepipedum esse hac demonstratione concludere conatur. Theon verò (vt sepius) particulari vtitur demonstrandi forma, vt tantùm parallelogramma ostendisse arbitretur, si ex parallelis oppositis planis, contentum fuerit solidum, vnde illud absurdum sequetur exagonas, octogonas, & quaslibet parium numero laterum poligonas species, parallelogramma dici posse. Et idcirco solidum istud (quod tandem parallelepipedum dici reperietur) plana opposita, exagona, octogona, & alia plura minimè parallelogramma recipere, quæ sequentibus theorematis immensa producerent dissidia. Quare veritatem geometricam tantùm aspectantes, arbitramur hoc nusquam vsum fuisse Euclidem, vt per ea quæ subsequentur, perspicuè noscemus. Quæ prænoscentes primi diffinitionibus parallelogrammi diffinitionem non antea diffinitam coniunximus, à qua parallelepipedi in solidis orta est forma, cuius rursus diffinitionem (iuxta veriorem Euclidis sententiam) huius vndecimi diffinitionibus copulauimus. Quod quidem hoc theoremate componendum sub hypothesi parallelorum quadrangulorum, solidum aliquod claudentium proposuimus, vt inde necessariò oriantur opposita eius latera parallelogramma æqualia, cui insuper contulimus similia esse ipsa parallelogramma, vt amplior euadat geometriæ facultas, futuris demonstrandis. Si verò Theonis & Campani hypothesim recepissemus Octahedrum Icosahedrum, & Dodecahedrum (quàm absurda) facilè huius conclusioni ac quamplura alia adaptare licuisset, quod vitandum monemus.

Propositio vigesimaquinta.

Si solidum parallelepipedum plano secetur, parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erunt basis sectiones inter se, vt solidi sectiones inter se.

Proponatur solidum inquam parallelepipedum AT DR *quod secetur plano* EV *parallelo existente ipsis* AR TD *oppositis planis. Dico esse sicut* AI *ad* IT *basis sectiones sic* AV *ad* VT *solidi sectiones, ponantur rectæ ipsi* AE *æquales quotlibet in rectum* EA AK, *aliæq; quotuis ipsi* ET *æquales in rectum fiant* ET TM MN. *Perficiantur item parallelogramma* AC TL LN. *Et exinde productis æqualibus parallelis perficiantur solida* AP TO MQ, *totum* CS *solidum componentia. Quoniam parallelepipedum est (ex hypothesi)* AT DR, *quadrangula erunt & parallela* BT RG *opposita plana, per 25 diffinit. huius. Et insuper (ex præfata) æqualia similia & parallelogramma erunt. Cùm autem* AR EV *&* TD *parallela plana, plano* BT *secentur, parallelæ erunt* AB EI, *per decimamsextam huius. Et ideo parallelogrammum erit* AI, *similiter parallelogramma erunt,* IT VG *&* VF. *Quia verò æquales sunt rectæ* EA AK *&* AB KC, *& æquos angulos continent, cum sint parallelæ, per vigesimamoctauam primi, æqualia (per primam sexti) erunt parallelogramma* AI AC, *& similia, eadem lege æqualia ostendentur esse* BP BV *&* KF FE, *sicq; reliqua. Et proinde solidum* AP *solido* AV *æquum erit, & simile (per octauam diffinitionem huius.) Haud secus similia & æqualia ostendentur* ED TO MQ *solida esse. Totum igitur* EK PV *solidum æquè multiplex est solidi* EA RV, *quotuplex est* EC *planum ipsius* AI *plani, scilicet quotuplex est* EK *recta ipsius* EA. *Eodem patet argumento totum* NV *æquè multiplex esse ipsius* TV, *quotuplex est* NI *ipsius* TI. *Scilicet quotuplex* NE *rectæ* TE. *Si igitur* EC *planum excedit, æquatur, vel deficit,* NI *plano, solidum* EP *(quauis facta multiplicatione) excedit, æquatur, vel deficit, solido* EQ. *Quatuor itaque sunt magnitudines* AI IT *plana &* AV VT *solida, quarum primæ & tertiæ æquè multiplicia,* EC *planum &* EP *solidum, vnà excedunt, vnà æquantur, vel simul deficiunt, ab æquè multiplicibus secundæ & quartæ,* IT *plani &* VT *solidi, quæ fuerũt* IN *planum & solidum* EQ. *Iuxta quamuis multiplicationem ductis, simplices igitur earum* AI *ad* IT *plana, eandem habebunt rationem quam* AV *ad* VT *solida, per quintam diffinitionem quinti. Si itaque solidum parallelepipedum plano, &c.*

Corollarium primum.

Si Prisma plano secetur parallelo eis quæ ex opposito planis, erunt ad se Prismatis sectiones, vt basis sectiones ad se. *Nam basium quæ parallelogrãmæ sunt (per vndecimam diffinitionem huius) sectiones, parallelogramma similiter erunt, per decimamsextam huius, cùm planum secans oppositis sit parallelum, & insuper æquiangula. Quare si ipsis basibus (productis rectis) similes & æquales addantur bases, vt diximus in parallelepipedo, fient ab ipsis sectionibus similia quotuis Prismata, vt quamlibet Prismatis sectionem, quauis multiplicatione ductam, per multiplicium basium & sectionum communem excessum, æqualitatem, vel defectum, ad quamlibet aliam sectionem eam seruare quam basis sectiones inter se seruant rationem, eadem arte doceatur, ex quinta diffinitione quinti.*

Corollarium secundum.

Solida quorum bina plana quæ ex opposito sunt polipogona, similia, æqualia, & parellela, reliqua quæ necessario erunt parallelogramma. Plano parallelo ipsis ex opposito planis secta, habebunt basis sectiones ad se, vt solidi sectiones ad se. *Illud enim manifestum ostenditur. Nam huiusmodi solida in Prismata secantur, quæ commune vnum habent latus, axem scilicet rectam lineam quæ per basium oppositarum centra ducitur. Quare quot basibus parallelogrammis concludentur opposita poligona, totidem Prismatis componetur totum illud solidum. Nam ea poligona in totidem similia diuiduntur triangula, per vigesimam sexti, quæ Prismata describunt. Quæ quidem Prismata (per præcedens corollarium) sectiones basium sectionibus proportionales efficiunt. Quare (per duodecimam quinti) sicut vnius sectiones ad se, sic erunt totius sectiones ad se. Horum solidorum infinitæ sunt species, iuxta varietatem poligonorum oppositorum, & parallelorum, quæ poligona angulos circunstantium parallelogrammorum pro situs diuersitate mutant. Sed hæc proposito nulla arte obesse possunt, quin idem semper sequatur, quod ostendimus. Cùm semper parallelogram-*

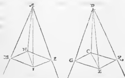
ma sint quæ circunstant plana.

Corollarium tertium.

Præfata solida ex Prismatis composita, plano parallelo oppositis planis secta, ad se sunt vt secti vertices. *Nã ad se fuerũt vt bases, quæ ad se sunt vt rectæ super quibus degunt, per primam sexti, cùm sint parallelogramma, quæ recta sunt Prismatum vertices.*

Propositio vigesimasexta. *Problema 4.*

Ad datam rectam lineã, ádque in ea signum, dato solido angulo, æquum solidum angulum constituere.



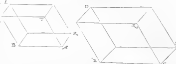
Recta linea data sit A B, *ad datum in ea signum* A, *constituendus est solidus angulus dato solido qui ad* D *æqualis, qui comprehẽditur sub* G D Z G D E E D Z, *planis quotuis angulis. quoniam ipsi* G D Z G D E E D Z *non sint in eodem plano, per nonam diffinitionem huius. A recta* D E *& contingenti eius signo* E *in planũ rectarũ* G D D Z *perpendicularis agatur (per vndecimam huius)* E C. *In ipsis porro* D G D Z *sumantur contingentia signa* G *&* Z, *cõiungantúrque* C D C G C Z G E E Z. *Ad rectam autem* A B *signúmque eius* A, *dato angulo* G D Z, *æqualis constituatur* B A F, *per 23 primi, secentúrque ipsis* D G D Z *æquales* A B A F. *Rursus ad eandem* A B *signúmque eius* A *dato* G D C *angulo æqualis ponatur* B A H, *in plano* B A F: *secetur verò ipsi* D C *æqualis* A H. *A signo verò* H *ipsi plano* B A F G *perpendicularis excitetur* H I, *per 12 huius, quæ æqualis ponatur ipsi* C E, *coniunctis* I A I B I F H B H F: *Dico angulum solidum qui ad* A *æquum esse ei qui ad* D: *quoniam æqualis est angulus* B A H *ipsi* G D C, *& totus* B A F *toti* G D Z, *ex hypothesi, reliquus* H A F *reliquo* C D Z *æquus erit, per 19 quinti: quia verò æquales sunt* A B A H A F, *rectis* D G D C D Z *per constructionem. Bases igitur* B H H F *basibus* G C C Z *æquales erunt, per 4 primi. Quoniam item rectæ* H I E C *sunt rectæ ad plana* B A F G D Z, *anguli* I H A I H B I H F, *necnon* E C D E C G E C Z, *sunt recti, per secundam diffinitionem huius, & ideo æquales: sed & æquis lateribus contenti scilicet* I H B *ipsi* E C G *&* I H A *ipsi* E C D *ac* I H F *ipsi* E C Z. *Bases itaque (per eandem quartam primi)* I B I A I F, *basibus* E G E D E Z *æquales erunt. sed triãgulorum* A B I *&* D G E *duo latera* A B A I *duobus* D G D E, *& basis* B I *basi* G E *sunt æqualia. Anguli igitur* B A I *&* G D E *(per 8 primi) sunt æquales, & similiter triãgulorum* I A F E D Z *bina latera & bases sunt æquales, & (per eadem) anguli* I A F *&* E D Z *æquales erũt. Atqui æquales fuerunt (ex hypothesi) reliqui* B A F G D Z: *anguli igitur plani* B A F B A I I A F, *planis* G D Z G D E E D Z *æquales angulis multitudine & magnitudine, solidos qui ad* A *&* D *efficiunt: anguli igitur solidi qui ad* A *&* D *sunt æquales, per octauam diffinitionem huius. Ad datam itaque rectam lineam ádque in ea, &c.*

Hæc de trigonis angulis solidis demonstrata solùm fuère, vt quotcunque poligonis angulis deseruiant. Nam omne poligonum in triangula resolui diximus similia, vigesima sexti: quare super quanis trigoni anguli solidi facie alius trigonus angulus constitui potest, per hanc, & sic quotcunque angulos poligonos solidos componentes, plani superaddi poterunt, donec referatur optatus angulus solidus.

Propositio vigesimaseptima. *Problema 5.*

Ex data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

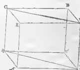
Proponatur ex data recta A B, *dato* G D *solido parallelepipedo simile & similiter positum describendum esse. Ad rectam* A B *& signum eius* A *angulo solido* G *æqualis angulus solidus constituatur* B A T K, *per præfatam, erunt igitur æquales anguli plani* B A T *ipsi* E G Z, *&* T A K *ipsi* Z G I, *ac* B A K *ipsi* E G I. *Fiat autem (per 12 sexti) sicut* E G *ad* G I, *sic* B A *ad* A K, *sicut* G I *ad* G Z, *sic (per eandem)* A K *ad* A T. *Erit idcirco æqua ratione sicut* E G *ad* G Z, *sic* B A *ad* A T, *per 22 quinti, sub ipsis* A B A K *parallelogrãmum fiat* B K, *sub* A B A T *verò* B T, *sub* A T A K *autem* T K. *Similia igitur erũt* B K B T T K *parallelogramma, ipsis* E I E Z Z I *parallelogrammis, per primam diffinitionem sexti: ipsis porro* B K B T T K *opposita quadrangula parallela describantur, ductis parallelis, quæ sint* L T L K L B, *per corollarium 15 huius · ipsa opposita erunt parallelogramma similia & æqualia, solidum* A L *construentia, per 24 huius. Parallelepipedum itaque erit* A L, *per 25 diffinitionem huius, & ipsi* G D *parallelepipedo simile cum constet similibus & totidem planis, per septimam diffinitionem huius, similitérque est positum, per ea quæ diximus super prima diffinitione sexti, cùm ad easdem partes æquales producat angulos. Ex data igitur recta linea* A B, *dato solido parallelepipedo* G D, *simile similitérque positum parallelepipedum* A L *descripsimus.*



Propositio vigesimaoctaua.

Si solidum parallelepipedũ plano secetur per diagonios eorum quæ ex opposito planorum, solidum secabitur ab eo plano bifariam.

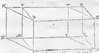
Secetur solidum parallelepipedum A B *per planum* G D I Z, *constitutum in dimetientibus* G Z *&* D I *planorum* B E *&* T A *oppositorum. Dico solidum* A B *per planum* G D I Z *bifariam secari. Cùm enim parallelogramma sint* B E T A *quæ ex opposito (per 24 huius) similia & æqualia. Dimetientes* G Z *&* D I *bifariam ipsa secant, per 34 primi: & proinde totum* A B *solidum in bina secatur Prismata, scilicet* G B Z I T D *&* G E Z I A D, *per vndecimã diffinitionem huius. Quæ Prismata similibus parallelogrammis & æqualibus constant, per 24 huius, cùm bina sint binis opposita, reliquum verò commune secans, triangulisque similibus & æquis, nempe dimidiis similium & æquarum basium oppositarum, per 20 sexti. Ipsa itaque bina Prismata sunt (per 8 diffinitionẽ huius) similia & æqualia. Et proinde totum* A B *solidum per planum* G D I Z *(bina illa discernens Prismata) bifariam sectum est. Si itaque solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios, &c.*



Propositio vigesimanona.

Super eadem basi, & sub eadem altitudine solida parallelepipeda consistenria, quorum stanres sunt in eisdem rectis lineis, inuicem sunt æqualia.

Sint inquam bina solida parallelepipeda A Z T B *&* A I K B, *super eadem basi* A B *constituta, & sub eadem altitudine (scilicet parallelarum)* B G *&* T D, *quorum solidorum stantes (hoc est quatuor solidi latera in basim cadentia, vt* A Z G D B T L M *solidi* A T, *&* A I G E B K L N *solidi* A K) *sint in eisdem rectis lineis, siue parallelis* N Z *et* K D. *Dico ea solida* A T *&* A K *esse æqualia. Quoniã (ex diffinitione parallelepidi & vigesimaquarta huius) patet, plana opposita esse similia æqualia & parallela, æqualia erunt* A M *ipsi* G T *&* A N *ipsi* G K



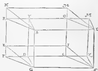
sed A M *ipsi* A N *super eisdem basi & vertice (per trigesimamquintam primi) æquum est, communi ablato trapezio* A L M I *reliqua triangula* N M L I Z A *sunt æqualia. Similiter & reliqua* K T B & E D G *erunt inter se æqualia, & præfatis, nam bases basibus fuerunt æquales, quarum opposita æqualibus angulis & lateribus clauduntur, per parallelepipedorū constructionem. Bina itaque Prismata* K T B L M N & E D G A Z I *(similibus triangulis & parallelogrammis multitudine & magnitudine æqualibus, composita) æqualia erunt, per octauam diffinitionem huius. Commune autem eis addatur solidum inter bases,* A B I T *comprehensum, sequetur totum* A B I K *parallelepipedum toti* A B Z T *æquum esse, hoc est* A T, *ipsi* A K *solido. Super eadem igitur basi & sub eadem altitudine, &c,*

MONITVM.

Stantes dicemus esse quatuor rectas cuiuslibet parallelepipedi, angulos supremæ & infimæ basium coniungentes, qua quidem iuxta solidorum diuersitatem angulorum, aut perpendiculares in basim, aut equidem ad obliquos cadunt angulos, cum autem hoc & sequenti theoremate solidorum collatorum eadem supponatur basis, stantes manifestum est in eisdem parallelis ad basim degere, nempe ad duo basis quæque latera quia verò duo ponuntur solida super eadem basi, ac eadem altitudine, bina solidorum supremæ bases, diuerso situ collocari possunt. Nam cùm sint æquales & similes (ex vigesimaquarta huius) aut inter easdem parallelas collocari possunt, tum quidem stantes in eisdem parallelis siue rectis lineis esse dicentur in vtroque solido, cùm scilicet bina supremarum basium latera eisdem foueantur parallelis, si conuerso bina eadem latera supremarum basium eisdem rectis siue parallelis non contineantur, nec stantes ipsis lateribus coniuncta, in eisdem rectis aut parallelis esse credentur. Hac de causa stantes easdem rectas lineas possidere intelligemus, cùm supremarum basium latera (bina saltem) rectis lineis eisdem continebuntur, quod supponit hæc vigesimanona. In eisdem verò non esse rectis cum nulla bina supremarum basium latera eisdem rectis claudentur, & illud supponet proxima.

Propositio trigesima.

Super eadem basi & sub eadem altitudine existentia solida parallelepipeda, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inuicem sunt æqualia.



Constituantur solida parallelepipeda A B Z T A B I K *super eadem basi* A B, *& eadem altitudine (parallelarum* A G Z P) *quorum stantes* A Z G D B T L M *solidi* A T *&* A I G E B K L N *solidi* A B I K *non sint in eisdem rectis lineis: Dico ipsa* A B Z T *&* A B I K *solida esse æqualia, cum supremæ propositorum solidorum bases* Z T *&* I K *sint in eodem plano ex hypothesi altitudinis: producatur recta* N I *vsque ad rectam* Z D *in* C, *&* M T *vsque ad rectam* K E *in* R, *At* Z D *&* K E *concurrant in* P, *coniunctis* C A P G R B *&* O L *rectis: quoniam enim æqualis est recta* O R *ipsi* N K, *&* O C *ipsi* M Z, *cùm sint parallelæ, & parallelis coniunctæ, per constructionem parallelepipedorū, æqualia erunt* O P *&* N E *plana, & ipsis æquum erit* M D *eadem causa, sed & æquiangula, per vigesimanonā primi, cùm sint ex hypothesi, in eodem plano. Solidū igitur* A B Z T *& id quod inter* A B *&* C R *plana comprehenditur, habent stantes* A Z G D B T L M, *&* A C G P B R *&* L O *in eisdem rectis* A G P Z *&* B L R M. *Ipsa igitur* A B Z T *&* A B C R *solida (per præcedentem) sunt æqualia, haud secus ostendemus solidum idem* A B C R *solido* A B I K *æquum esse, cùm eorum stantes* A C G P B R L O *cum* A I G E B K L N *sint in eisdem rectis* A L N C, *&* G B K P, *per eandem, solida itaque* A B Z T *&* A B I K *(eidem* A B C R *solido æqualia ostensa) adinuicem erunt æqualia, per communem sententiam. Super eadem igitur basi, & sub eadem, &c.*

Propositio trigesimaprima.

Super æquis basibus solida parellelepipeda existentia & sub eadem altitudine, inuicem sunt equalia.

Proponantur æquales bases (tamen ad tutiorẽ intelligẽtiam omnino dissimiles) ABBF ADHC, quarum vnum cuiusque latus in eandem rectam cõcurrant AED, ac bases AB AH, in idem planum (ex vigesimaseptima huius) super quibus solida parallelepipeda eiusdem altitudinis constructa esse supponantur. Dico quod super AB solidum, et quod super AH solido æquum esse, Per signum L ipsi AC parallela fiat EG, quæ si extra basim AB cadat, producatur recta HC in I. Quoniam parallelogramma sunt AB AH, per vigesimamquartam huius, æquilatera adinuicem erunt triangula ACI EGL. Et (per quartam primi) æquiangula & æqualia, ac (per primam diffinit. sexti & 4 eiusdem) similia. Super ipsis igitur triangulis erecta Prismata eiusdem altitudinis cum solidis ex AB AH, æqualia & similia erũt, per octauam diffinitionem huius. Nam concluduntur sub similibus planis multitudine & magnitudine æqualibus. Commune ipsis addatur quod super ACLE solidum, sequetur quod super AEGC solidum, æquum esse et quod super AELI solido. Cùm autem AEBF & ADHC plana (ex hypothesi) sint æqualia, & ablatum AG ablato AL æquum fuerit. Reliquum BI reliquo GD æquum erit. Erit, igitur sicut AG ad GD sic AL ad BI (nempe æquales ad æquales) Sed sicut AG ad GD sic solidum quod super AG ad solidum quod super GD, per vigesimamquintam huius, secatur enim plano super GE parallelo oppositis. Sicutq; similiter AL ad BI, sic quod super AL ad quod super BI. Erit itaque (per vndecimam quinti) sicut quod ex AG (vel AL sibi æquum) solidum, ad quod ex GD, sic idem quod ex AG vel AL, ad quod ex IB solidum. Æqualia igitur erunt (per secundam partem nonæ quinti) quæ super GD & BI solida. Quibus æqualia addita scilicet quod super AG ipsi GD, quod verò super AL ipsi BI. Tota itaque quæ super AH & super AB solida erunt æqualia, per communem sententiam. Super æquis igitur basibus, &c.

Corollarium.

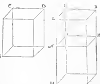
Super æquis basibus solida parallelepipeda existentia, ad se sunt vt vertices. *Nam si ea secetur plano parallelo basibus, erunt ad se sectiones vt basium sectarum sectiones, per vigesimamquintam huius. Quæ sectiones basium ad se sunt vt latera seu solidorum vertices, per primam sexti. Solida igitur ad se erunt vt vertices. Si verò bases sint dissimiles, idem continget, ex corollario vigesimæquintæ huius, quod in similibus ex vigesimaquinta ostensum est.*

MONITVM.

Quia Campanus hanc sat parcè, Theon verò prolixè admodum demonstrarunt, demonstratione alia hoc idem ostendimus, qua solidorum tantùm bases pro figura obtulimus, eò quòd iam super eadem basi quoquò se vertant stantes, parallelepipeda æqualia esse diximus, sub eodem fastigio, proximè præfatis. Quare per basium comparationes idem ostendisse facilius apparuit eadem supposita altitudine.

Propositio trigesimasecunda.

Sub eadem altitudine existentia solida parallelepipeda, ad seinuicem sunt vt bases.



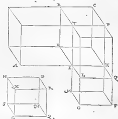
Sint bina solida parallelepipeda A B *&* G D *sub eadem altitudine existentia, scilicet* C D *&* E B: *Dico esse vt basis* G C *ad basim* A E, *sic solidum* G D *ad solidum* A B. *Producantur rectæ* L A E I *in rectum, ad rectámque* A I *æquale parallelogrammum ipsi* G C *in angulo* H A I *(per quadragesimamquintam primi) constituamus,* H I: *Productis verò* B K *& reliquis parallelis ductis fiant parallelogramma opposita, & exinde solidum* H K *super basi* H I *& altitudine* I K, *æquiangula igitur erunt solida* A B H K, *per decimam huius, cùm omnes lineæ & plana ex opposito sint parallela. Sed æquum erit* H K *solidum ipsi* G D *solido, per præfatam, sub æquis basibus* H I G C *& æqua altitudine* I K C D, *ex hypothesi. Est autem sicut* H I *basis ad* A E *basim, sic* H K *solidum ad* A B *solidum, per vigesimamquintam huius. Secatur enim totum* H B *plano* A X *parallelo oppositis. Sed sicut* H K *ad* A B *sic* G D *ad idem* A B, *per septimam quinti. Sicut igitur* H I *(vel* G C *sibi æqualis) ad* A B *bases, sic* G D *ad* A B *solida. Sub eadem igitur altitudine existentia, &c.*

Corollarium.

AEqualia parallelepipeda eiusdem altitudinis æquales habent bases. *Nam si inæquales haberent inæqualia essent, per hanc. Et æqualia æquas bases habentia eandem habebunt altitudinem, Nam si maiorem haberent, excederent æqualia, quæ eandem habent: Si verò minorem, deficerent tanto ab eisdem æqualibus.*

Propositio trigesimatertia.

Similia solida parallelepipeda, adinuicem in tripla sunt ratione laterum similis rationis.



Proponantur bina solida parallelepipeda A B *&* G D *similia, vt scilicet* A E B T E I *sint similis rationis ipsis* G Z Z R Z N. *Dico ipsius* A B *solidi ad* G D *solidum, triplam esse rationem rationis* A E *lateris ad* G Z *latus, extendãtur in rectũ* A E *in* K, *sitq́;* E K *æqualis ipsi* G Z, *vel* H D, *ac* I E *in* L *sitq́;* E L *ipsi* H X *æqualis,* T E *verò in* M, *sitq́;* E M *ipsi* H S *æqualis, sub ipsis autem* E K E L E M *perficiantur parallelogrãma, & exinde parallelepipedum, ductis parallelis, sitq́;* E F O K *solidum, quoniam solidorum* A B *&* E F *anguli plani qui ad verticem* E *sunt æquales, scilicet* A E I *ipsi* K E L, *&* A E T *ipsi* K E M, *ac* I E T *ipsi* L E M, *æquiangula erunt* A B *&* E F *solida, quia verò circum æquales angulos qui ad* E *latera sunt proportionalia, ex hypothesi, cùm sint æqualia lateribus solidi* G D, *quod simile fuit posistum solido* A B *similibus parallelogrammis descripta erunt, ac proinde similia ipsa* A B *&* E F *solida, per septimam diffinitionem huius, similia verò & æqualia erunt* E F *&* G D *solida. Nam æquilatera adinuicem (ex constructione) ac eidem* A B *æquiangula, æqualia habent plana, totidémque numero, per octauam diffinitionem huius. Sub rectis item* E L E K E T *perficiantur parallelogramma, & ductis parallelis, concludatur solidum* L P *sub rectis verò* E I E T E K *fiat non secus solidum parallelepipedum* E C: *cùm autem (ex hypothesi) proportionales sint* A E E I E T *rectis* H D H X H S, *ipsæ proportionales erunt (per septimam quinti) rectis* E K E T E M, *ipsis (ex hypothesi) æqualibus positis. Erit igitur* A E *ad* E K *sicut* I E *ad* E L *sicútque* T E *ad* E M, *sed sicut* A E *ad* E K *sic parallelogramma* A I *ad*

I K,

I K, per primam sexti, sicut verò I E ad E L, sic I K ad K L, sicútque T E ad E M sic T K ad K M: erunt igitur (per vndecimam quinti) A I ad I K vt I K ad K L, vtque T K ad K M plana, sed sicut A I ad I K bases, sic A B ad E C solida (per proximam) fuerunt, sicut verò similiter I K ad K L, sic idem E C ad L P, sicútque T K ad K M, sic idem L P ad E F continua igitur ratione proportionalia erunt A B E C L P & E F solida, per septimam diffinitionem quinti. Primum itaque A B ad quartum E F triplam habet rationem quam idem primum A B ad secundum E C, per decimam diffinitionem quinti, sicut autẽ fuit primum A B ad secundum E C, sic fuit primi latus A E ad quarti latus E K. Solidum igitur A B ad solidum E F triplam habet rationem quam latus A E ad latus E K similis rationis: & igitur eandem habet A B ad G D triplam, quam A E latus ad G Z latus, cum fuerint (ex hypothesi) æqualia & similia E F & G D. Similia itaque solida parallelepipeda, &c.

Corollarium.

Si quatuor rectæ continuæ proportionales fuerint, erit prima ad quartam sicut quod à prima parallelepipedum ad id quod à secunda, simile similitérque descriptum. *Nã prima ad quartam triplam habet quam ad secundam, & quod à prima similiter ad id quod à secunda, ostensum est habere triplam quam latera rationem. Si quatuor igitur rectæ, &c.*

Propositio trigesimaquarta.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocæ sunt bases altitudinibus. Et solida parallelepipeda quorũ bases altitudinibus sunt reciprocæ, sunt æqualia.

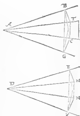
Supponantur ad primæ partis discussionem bina parallelepipeda, A B & G D esse æqualia Dico eorum bases A E ad G O sic se habere reciprocè, vt earum altitudines G M ad A I, sint prius ipsa G M A I ad bases rectæ, quoniam æqualia sunt (ex hypothesi) solida, si bases æquales sint, æquales erunt vertices, & è contra, per corollarium trigesimæsecundæ huius, sicq; reciprocè, nam eandem habent rationem, cum sint æquales. Si verò inæquales sint bases, inæquales erunt vertices, & è contrà, per idem corollarium, sint igitur inæquales bases ac vertices, iuxta positum, quoniam inæquales sunt bases & altitudines, esto basis maior A E ipsa G O, sequetur altitudinem ipsius G D (quæ sit G M) esse maiorem ipsa A I, nam minor esse non potest, cùm nec etiã æqualis esse possit, eò quod maius esset A B (super maiori basi) ipso G D, per trigesimamsecundam huius. Multo igitur maius esset idem A B ipso G D si G M minorem ipsa A I haberet altitudinẽ. Quare maior erit G M altitudo altitudine A I, ipsi itaque A I æqualis ponatur G C, per signum verò C secetur solidum G D, ducto parallelo ipsi G O plano, per corollarium 15 huius, quoniam sub eodem vertice sunt A B & O C parallelepipeda, ad se erunt vt bases, per trigesimamsecũdam huius. Sicut igitur A E ad G O sic est solidum A B ad O C, sed sicut A B ad O C sic (per septimam quinti) M O ad idem O C, cum sint A B & M O, hoc est D G æqualia, sicut itaque A E ad G O bases, sic M O ad C O solida. Est autem sicut M O ad C O solida, sic M L ad C L bases, per trigesimamsecundam huius: sicut verò M L ad C L sic M G ad C G recta, per primam sexti. Sicut itaque (per vndecimã quinti) M L ad C L, aut M O ad C O, aut A E ad G O bases, sic reciprocè M G ad C G (vel A I) altitudines. Ad secundam verò partem supponantur A E ad G O bases, vt M G ad A I vertices, & vt prius fiat C G æqualis ipsi A I, erit ideo A E ad G O sicut G M ad G C, sed vt A E ad G O sic (per trigesimamsecundam huius) A B ad C O, sub eodem vertice. Sicut itaque G M ad G C sic A B ad C O solida, sed sicut G M ad G C, sic (per primã sexti) M L ad C L parallelogramma, sicque (per trigesimamsecundam huius) M O ad C O solida, sicut itaq; A B ad C O solida, sic M O ad idem C O, quare æqualia erunt M O (hoc est G D) & A B solida, per nonam quinti, quorum quidem bases A E ad G O reciprocè fuerunt altitudinibus M G ad A I proportionales. Æqualium igitur solidorum parallepipedorum, &c.

MONITVM.

Hæc demoſtrata ſunt vbi ſtantes ſunt baſibus perpendiculares, tum idem neceſſe accidit, licet in vtramuis partem inclinentur, per 29 & 30 huius: nam ea ſolida ſolidis rectangulis eiuſdem verticis ſemper ſunt æqualia. Si itaque ſuper propoſitorũ exigoniorum vel ambligoniorum ſolidorum baſi, rectangulum ſub eadem altitudine conſtruatur ſolidum, quæ ſuper rectãgulo demonſtrata ſunt, reliquis ipſis æqualibus conuenire manifeſtum erit, cùm maxima eadem maneant baſes ac iidem vertices, quorum tantum agimus negotium.

Propoſitio trigeſimaquinta.

Si fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad ſublime rectæ lineę ductæ ſint, æquales angulos alterum alteri comprehendentes cum lineis angulos planos continentibus, in ſublimibus autem rectis ſumpta contingentia ſigna, à quibus perpendiculares in plana eorum, qui in principio angulorũ actæ fuerint, à perpẽdicularibus ad angulos coniunctæ rectæ, cùm ſublimibus angulos æquales comprehendent.



Sint bini plani anguli rectilinei æquales B A G *&* E D Z, *ducantur autem ab ipſorum verticibus* A *&* D *extra eorum planum in ſublime, binæ rectæ* A I D M, *æquales angulos cum ipſis* A B A G *&* D E D Z, *ſcilicet* B A I *angulo* B D M: *angulum verò* I A G *ipſi* M D Z *comprehendentes. In ſublimibus autem* A I *&* D M, *in plana ipſorum angulorum* B A G *&* E D Z, *à contingentibus earum ſignis perpendiculares mittantur* I L *&* M N, *coniunctis* L A N D *in planis ipſarũ* A B G, *et* D E Z: *Dico angulos* I A L *&* M D N *eſſe æquales. A maiori rectarum* A I D M *(quæ ſit* A I*) minori* D M *æqualis abſcidatur* A T, *Per ſignum vero* T *ipſi* I L *parallela fiat* T C, *ipſa igitur* T C *recta erit ad planum* B A G, *per octauam huius. Nam eidem plano recta fuit* I L *à ſigno* C *ad rectas* A B A G *perpendiculares agãtur* C B C G: *à ſigno verò* N *ad rectas* D E D Z *rectæ* N E N Z, *cõiunctis* B G E Z T B T G M E M Z, *& quoniam recta eſt* T C *ad planum* A B G, *quod ex* A T *æquum eſt eis quæ ex* T C C A, *per 47 primi, quod verò ex* C A *æquum eis quæ ex* C G G A, *quod igitur ex* A T *æquum eſt eis quæ ex* T C C G G A: *eis autem quæ ex* T C C G *æquum eſt quod ex* T G, *per eandẽ, quod itaque ex* A T *æquum eſt eis quæ ex* T G G A. *Rectus itaque erit* A G T *angulus, per 48 primi. Similiter cum quod ex* A T *eis quæ ex* T C C A *æquum ſit, quod ex* C A *autem eis quæ ex* C B B A, *ſequetur quod ex* A T *æquũ eſſe eis quæ ex* T C C B B A. *Eis autem quæ ex* T C C B *æquum erit quod ex* T B, *per 47 primi. Quod igitur ex* A T *æquũ erit eis quæ ex* T B B A, *& ideo rectus erit,* A B T *angulus haud ſecus recti oſtendẽtur anguli* D Z M *&* D E M *eſſe, nẽpe recta fuit* M N *ad planũ* D E Z, *quia verò binorum triangulorum* A T G D M Z, *duo anguli duobus ſunt æquales, ſcilicet* T A G M D Z, *ex hypotheſi, &* A G T D Z M *recti, vnúmque latus* D M *vni* A T *(ex hypotheſi) æquale. Reliquus angulus angulo, & latera lateribus æqualia erunt, per 26 primi eodẽ argumento æqualia erunt, & ſimilia pariter triangula* A T B D M E. *Rurſus quoniam æquales oſtenſæ ſunt* A B A G *ipſis* D E D Z *& anguli* B A G E D Z *(ex hypotheſi) æquales, baſes* B G E Z *(ex quarta primi) æquales erunt, ac reliqui* A B G *ipſi* D E Z, *&* A G B *ipſi* D Z E *anguli æquales, reliquus igitur* B G C *reliquo* E Z N *æquus erit. Nam bini* D Z N *&* A G C *toti recti fuerunt. Eadem cauſa reliquus* G B C *reliquo* Z E N *æquus erit, cùm recti fuerint* A B C D E N *toti, cùm autem æquales ſint* B G *&* E Z, *triangula* B C G *&* E N Z *(per 26 primi) æqualia erunt ac æquiangula, rectæ itaque* B C C G *binis* E N N Z *æquales erunt. Quare triangula* A C B D N E *duo latera* A B B C *duobus* D E E N *æqualia habentia, & angulos* A B C *&* D E N *æquales, efficient baſes* A C *&* D N *æquales, per quartam primi. Quia verò* A T *binas poteſt* A C C T, *ſimiliter* D M *binas* D N N M, *cùm ſint (ex hypotheſi) recti* A C T D N M *anguli. Ab æqualibus* A T *&* D M *potẽtus, æquales tollamus ipſarum* A C *&* D N *potentias, reliquæ* T C M N *potentia baſiũ erunt æquales.*

Et

Et proinde T C M N *rectæ æquales erunt, potentiarum quidem latera · quare (per octauam primi) triangula* T A C M D N *æquales angulos* T A C & M D N *habebunt, sed ipsi* T A C *idem est* I A L *angulus, æquales igitur sunt anguli* I A L & M D N. *Si itaq; fuerint bini anguli plani rectilinei æquales, à quorum verticibus ad sublime, &c.*

Corollarium.

Si ad binos angulos rectilineos planos & æquales, à sublimi ducantur binæ rectæ æquales, æquosque angulos cum lineis angulos planos continentibus, alterũ alteri cõprehendẽtes, à sublimioribus earum signis in plana angulorum (qui in principio) demissæ perpendiculares æquales erunt. *Demonstratum fuit quod sub hac hypothesi rectarum* A T D M *æqualium, rectæ* T C M N *æquales ostensæ fuerint. Non itaque ampliori eget expositione.*

Propositio trigesimasexta.

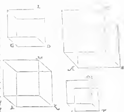
Si tres rectæ lineę proportionales fuerint, ex ipsis tribus solidum parallelepipedum, æquum est ei quod à media fit solido parallelepipedo, æquilatero quidem, æquiangulo autem prędicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B G, *ex quibus descriptum sit parallelepipedum* T L, *ex media verò* B *describatur aliud* K E *ipsi* T L *æquiangulum: Dico solidum* T L *æquum esse solido* K E, *quoniã* T L *fit ex tribus* A B G. *Esto ipsi* A *æqualis* M L, *ipsi verò* B *æquetur* N L, *ipsi autem* G *illa ex* L, *mediæ rursus* B *æquentur latera singula solidi* K E. *Sint item bina* T L K E *solida ita æquiangula, vt bini eorum quique anguli solidi, ex similibus angulis planis altero alteri componantur, vt* M L N N L X M L X *ipsis* Z E D D E I Z E I *æquẽtur. quoniam (ex hypothesi) inter binas* M L L K *media est proportionalis* Z E (*vel* E I) *erit sicut* M L *ad* Z E, *sic* Z E (*vel* E I *reciprocè*) *ad* L X *circũ æquales angulos* M L X & Z E I, *æqualia itaque sunt plana* M X & Z I, *per 14 sexti: quia verò ad binos angulos planos & æquales* M L X & Z E I, *à sublimi ducuntur binæ rectæ æquales* N L D E, *æquósque habentes angulos* N L M N L X, *ipsis* D E Z D E I, *cum lineis* M L L X & Z E E I *angulos planos continentibus. Sequetur (ex corrollario præfato) à sublimioribus earum signis* N & D, *in plana* M X & Z I *demissas perpendiculares æquales esse. Atqui eorum solidorum altitudo perpendiculares illæ sunt, per quartam diffinitionem sexti. Aequales itaque altitudines* N L D E *super æquis basibus* M X Z I *habentia parallelepipeda* T L & K E, *inter se sunt æqualia, per 31 huius. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ex ipsis tribus solidum, &c.*

Propositio trigesimaseptima.

Si quatuor rectę lineę proportionales fuerint, & quę ex ipsis solida parallelepipeda similia similitérque descripta proportionalia erunt, & si quæ ex ipsis solida parallelepipeda similia similitérque descripta proportionalia fuerint, & ipsæ quoque rectę lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B *ad* G D *vt* E Z *ad* I T: *ex quibus similia similiter que posita describãtur parallelepipeda* A K G L E M *&* I N: *Dico ea quatuor solida esse proportionalia* A K *ad* G L *vt* E M *ad* I N, *quoniam similia sunt hæc bina solida, scilicet* A K *ipsi* G L *&* E M *ipsi* I N. *Ipsa triplam habent laterum rationem, per 33 huius, sed latera* A B *ad* G D, *eandem habent quam* E Z *ad* I T (*per hypothesim*) *æqualium igitur tripla æqualia adinuicem erunt, per 15 quinti. Solida itaque erunt* A K *ad* G L, *vt* E M *ad* I N *sed iam ponantur ea similia solida proportionalia esse, quæ similiter ex lineis* A B G D E Z I T *descripta sunt. Dico lineas proportionales esse* A B *ad* G D, *vt* E Z *ad* I T, *Quoniam eandem habent rationem* A K *ad* G L *solida quam* E M *ad* I N *solida. quæ quidem ratio tripla est rationis* A B *ad* G D *seu* E Z *ad* I T, *rationes igitur æquales* A B *ad* G D, *seu* E Z *ad* I T *ab æqualibus solidorum rationibus, æquè multiplicatæ, æquales erunt, cùm eandem habeant earũ quantitates rationem, per 15 quinti. Si itaque quatuor rectæ lineæ, &c.*



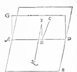
MONITVM.

Poteramus demonstratione Campani prolixius vti additis binis A B *&* G D *duabus continuè proportionalibus, similiter & ipsis* E Z I T *aliis, tum erit sicut* A B *ad quartum, sic solidum ex* A B *ad quod ex secunda* G D, *per corollariũ 33 huius, similiter* E Z *ad quartam erit vt quod ex* E Z *prima, ad quod ex* I T *secunda, primæ autem ad quartas, æqua ratione proportionales sunt, per 22 quinti. Præterea animaduertendum est ea quatuor solida non sibiipsis aut eidem necessario similia optari. Sed ea tantum quæ eadem ratione copulantur, aut simul bina antecedentia sunt, aut equidem bina cõsequentia inter se similia esse sufficiunt. Nã si eadẽ copulata ratione similia tantùm fuerint, & alia rursus similia, ea in antecedentia & consequentia facile rationum vicissitudine (ex 16 quinti) sumpta commutabuntur, quod putauimus apponendum, vt huius theorematis fœcundemus vires.*

Propositio trigesimaoctaua.

Si planum ad planum rectum fuerit, à signo autem in aliquo planorum existente in alterum planum perpendicularis agatur, ea in communem planorum sectionem cadit.

Esto planum D G *ad planum* A B *rectum, quæ sese secent in* D A. *A signo autem* I *in plano* D G *existente, aliqua perpendicularis in planum* A B *demittatur: Dico demissam in rectam* D A *cadere. Non enim, sed si fieri possit, cadat alibi, sitq́;* I Z, *à signo verò* I *ad rectam* D A *perpendicularis agatur* I E, *per duodecimam primi. A signo autem* E *per planum* A B *eidem* D A *perpendicularis excitetur* E C, *per vndecimam primi. Recta igitur* I E *ad binas* E D E C *recta, ad earum planum* A B *recta est, per quartam huius. Sed ad idem planum* A B *recta fuit* I Z, *ex hypothesi. Ab eodem itaque signo* I *ad idem planum* A B *binæ* I E I Z *ad rectos constituerentur, quod fieri non potest, per decimamtertiam huius. Non igitur cadit alibi quàm in* A D *recta ab* I *signo perpendicularis. Si itaque planum ad planum rectum, &c.*



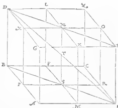
MONITVM.

Alia vsi sumus demonstratione ob Theonis breuem ac confusam & penè indemonstratam traditionem. Et insuper nec eam meminit Campanus, eò quòd modici feratur momenti, ad compendia tantum futurarum demonstrationum vtilis existens.

Propositio trigesimanona.

Si solidi parallelepipedi eorum quę ex opposito planorum latera opposita bifariam secta fuerint, extensáque per sectiones plana, communis planorum sectio & solidi dimetiens sese bifariam dispescent.

Esto solidum parallelepipedum A C G Z, *cuius aliquorum quæ ex opposito planorum* B I D E *opposita latera bifariam secentur, in signis* L K X O F M *&* P R. *Supponantur autem per eas sectiones extendi plana* L K M F *&* X O R P, *quæ se secent per rectam* N S. *Dimetiens verò solidi esto* D I *basium autem* A C G Z *dimetientes sint* B I D E: *Dico communem planorum sectionem* N S *& dimetientem* D I *bifariam sese secare. Quoniam parallelæ sunt, & æquales* D E E I, *per vigesimamquartam huius, Cùm sint latera parallelogrammorum oppositorum & parallelorum, Ipsæ in eodem sunt plano, per 35 primi diffinit. Quia verò à signis earum coniunguntur rectæ* D E B I, *Ipsæ in eodem sunt plano cum reliquis* D B E I, *per*



septimam huius, & æquales parallelæ, per 33 primi. Rursus cum recta L K *secet parallelogrammum* G Z *bifariam, per primam sexti, eò quòd secet bifariam eius basim* D Z. *Ipsa secabit eiusdem dimetientem* D E *bifariam, per coroll. 34 primi. Non alia de causa recta* X O *eandem* D E *secabit bifariam. Concurrent igitur binæ* L K X O *in* N *medio ipsius* D E *signo, similiter & ipsis opposita concurrent in* S. *Et idcirco recta* N S, *bifariam secat binas* D E B I *parallelas. A quarum signis* D N I S *ductæ rectæ* D I N S *in eodem sunt cum ipsis plano, per septimam huius, quare sese secabunt sit igitur in* T. *Triangulorum itaque* D N T *&* I S T *duo anguli duobus sunt æquales, per vigesimamnonam primi, & vnum latus* D N *vni* I S *æquum ostensum, nempe dimidium æqualium* D E B I. *Latera igitur* T N T S *&* T D T I *sunt inter se æqualia, per 26 primi. Tota itaque* N S *communis planorum sectio, & dimetiens solidi, tota* D I, *bifariam sese in* T *secant. Si igitur solidi parallelepipedi eorum quæ ex opposito planorum, &c.*

Corollarium.

Omne planum per centrum parellelepipedi extensum, secat illud solidum bifariam, non autem aliud per centrum non extensum. *Quoniam omne planum per centrum extensum, secat dimetientem parallelepipedi in centro bifariam. Ostensum est enim plana solidum bifariam secantia, dimetientem secare bifariam in centro. Quare omnes lineæ per centrum in eo plano ductæ angulos cum dimetiente efficient. Quia verò dimetiens cadit in parallelas solidi rectas, opposita latera describentes, siue in parallela solidi plana, quæ scilicet angulos ad extrema diametri efficiunt. Triangula à dimetiente & recta in eo plano per centrum extensa, & ea quæ per plana opposita solidi præfatas coniungit rectas, semper æqualia & æquiangula erunt, per 26 primi. Nam quæ per plana solidi opposita rectæ, æquales angulos ad dimetientem efficiunt, cùm sint parallelæ, per decimamsextam huius. Sed & anguli qui ad centrum æquales sunt, nempe ad verticem, per decimamquintam primi, vnúmque latus vni lateri, scilicet media dimetiens. Triangula igitur à quauis recta (in plano quod per centrum parallelepipedi per idem centrum extensa) & eius dimetiente, ad solidi extrema terminata, æqualia & æquilatera, ac æquiangula erunt, per vigesimamsextam primi, vnde sequitur planum illud secans, æquales (ad partes oppositas) basium solidi partes efficere, ac æquiangulas, & proinde similes & numero æquales ac magnitudine. Quare solidi illius binæ sectiones solidæ, æquales erũt, & similes, per octauam diffinitionem huius. Quod autem aliud planum ab eo quod per centrum extenditur bifariam solidum non secet. Patet, si plano per centrum non extenso parallelum per centrum extendatur, per corollariũ decimæquintæ huius. Cum enim id quod per centrum describitur bifariam secet, manifestum est in altera æqualium solidi partium, reliquum describi planum parallelum*

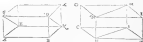
bifariam ſecanti. Cùm igitur totum ſua parte maius exiſtat, neceſſe eſt alteram harum ſectionum dimidio ſolidi eſſe minorem, & ideo reliquam maiorem. Omne itaque planum per centrum parallelepipedi extenſum, &c.

MONITVM.

Disiunctiuam huic theoremati contulit Theon, vt illud in cubo cenſeat intelligi, ſimiliter & Cãpanus in Cubo tantùm illud explicat, licet ſub parallelepipedo Cubum concipiamus nos itaque diſciplinæ genus ſectantes, dicemus parallelepipedum in ſolidis eadem frui dignitate, qua parallelogrammum in planis nam vt hoc quadrata, rectangula, rhombos, & rhomboides continet, ſic illud Cubos, ſolida altero longiora rectangula, aliáque non rectangula, quorum ſtantes in eiſdem ſunt rectis, & reliqua quorum ſtantes in eiſdem rectis non conſiſtunt, quorum ſingulorum oppoſitæ baſes & latera ſemper æqualia, ſimilia & parallela exiſtent, vnde illud ſolidum inter regulares enumerabimus figuras, tamen non inter perfectas, obque eius regularem conſtructionem corollarium præfatum (ſequuturis vtile) eidem coniunximus.

Propoſitio quadrageſima.

Si fuerint bina Priſmata ſub æquis altitudinibus, & alterum quidem baſim parallelogrammum habuerit, alterum autem triangulum, duplum verò fuerit parallelogrammum ipſius trianguli, bina Priſmata æqualia erunt.



Sint bina Priſmata ſcilicet ſuper baſi parallelogramma AEZBGD *&* TIKLMN, *ſuper baſi triangula, ſub æquis verò altitudinibus* AG *&* TL, *ſit autem trianguli* TIK *dupla parallelogramma baſis* AEZB: *Dico ipſa* AEZBGD *&* TIKLMN *Priſmata æqualia eſſe adinuicem, compleãtur ſolida* AX *&* TO *parallelepipeda, ductis inquam parallelis rectis & planis oppoſitis, per 31 primi, & corollarium 15 huius, vt ſæpius docuimus, ſcilicet baſi* AZ *ſimilis & æqualis ponatur* GX, *ipſi verò* AD *ſimilis ſit* EX. *Planum igitur erit* BDZX *baſis, cùm parallelæ ponantur* BZ *&* DX, *& igitur eas coniungentes, per ſeptimam huius* BD ZX DZ *in eodem erunt plano. Duplum igitur erit* BX *triangulo* BDZ, *& proinde ſolidum* AX *parallelepipedum (ex binis ſimilibus & æquis Priſmatis compoſitum) duplum erit ipſius* AEZ BGD *Priſmatis. Similiter eodémque argumento parallelepipedum erit* TO *ex binis æquis & ſimilibus Priſmatis* TIKLMN *&* ICKMON *compoſitum, & proinde eorum duplum erit: quoniam enim dupla eſt baſis* AZ *trianguli* KIT, *ex hypotheſi, cuius duplum eſt parallelogrammum* CT, *per trigeſimamquartam primi, ipſæ itaque* AZ *&* CT *parallelepipedorum* AX *&* TO *baſes, ſunt æquales, per ſextam communem ſententiam Sed (ex hypotheſi) altitudines ſunt æquales Parallelepipeda igitur* AX *&* TO *erunt adinuicem æqualia, per trigeſimamprimam huius, quare Priſmata* AEZBGD *&* TIKLMN *(ipſorum* AX *&* TO *dimidia) æqualia inter ſe erunt, per ſeptimam communem ſentẽtiam. Si itaque fuerint bina Priſmata ſub æquis altitudinibus & alterum, &c.*

Corollarium.

Ex prælibatis fit manifeſtum Priſmata ac ſolida ſub binis poligonis æquis ſimilibus & parallelis, Reliquis vero parallelogrammis comprehenſa, ad ſeinuicem poſſe eiſdem conferri legibus, ac parallelepipeda. *Cùm enim (ex hac & coroll. ſecundo vigeſimaquinta huius) conſtet, omne parallelepipedum in bina ſimilia & æqualia reſolui Priſmata, eiuſdẽ cum ipſo verticis, Super eadem verò aut dimidia eiuſdem baſi, eiſdémque ipſius ſolidi lateribus terminata, & ſimilis rationis: Dicemus Priſmata ſuorum parallelepipedorũ ſequi diſciplinam, quoniam ſi Priſma inſtar ſui ſolidi ſecandum (ex vigeſimaquinta huius) fuerit, docuimus corollariis eiuſdem, idem ſequi quod in parallelepipedo proponitur, æquè in Priſmate, vt in ſolido propoſito, à poligonis præfatis comprehenſo. Si autem ex vigeſimaſeptima deſcribendum offeramus, Priſma ex data recta dato ſimile optatum*

ſequi-

ſequi tertiumus, deſcripto ex dato Priſmate duplo ſolido, illique ex vigeſimaſeptima ſimilē ſolidum aliud ex data recta dato, cuius dimidium Priſ a erit optatum propoſito ſimile, ex data recta cōſtructum. Ad vigeſimamoctauam autem cum Priſmatis oppoſita plana diagonios non ſuſcipiant, hanc Priſmata ſectionem non patiuntur, ſed (per eandem vigeſimamoctauam) æqualia inter ſe corroborantur illa eſſe Priſmata, ac ſimilia quæ eiuſdem parallelepipedi ſunt dimidia. Quod autem ait vigeſimanona & tribus ſequentibus, ſub eadem altitudine ſupérque æquis aut eiſdem baſibus, eſſe æqualia parallelepipeda, aut in ratione baſium, vt per has Priſmata ſibi inuicem conferamus, illud tantùm poſtulabimus, Priſmata ſcilicet ſuper parallelogrammis ſimul, aut triangulis ſimul baſibus ad ſe comparari. Nam eadem manente ſublimitate, eadem eſt æqualium comparatio: dimidiarum vero baſium eadem eſt inter ſe quæ totarum affinitas. Priſmata igitur dimidia ſolida, eandem rationem quam tota habentia, ſub eodem vertice, baſes baſium dimidias, in eadem ratione eſſe totarum cōcludent. Si igitur tota ſolida ſint in ratione baſium totarum, dimidia eorum (Priſmata) erunt in ratione aut totarum ſi parallelogramma fuerint baſes, aut dimidiarum ſi triangula exiſtant, quæ ſemper eſt eadem (per 15 quinti) ex trigeſima tertia autem inferemus, quia parallelepipeda (Priſmatū dupla) triplam habent ſimilium laterum rationem, ſequetur Priſmata dimidia (eandem quam tota rationem habentia per 15 quinti) ac eadem latera ſolidorum habentia ſuorum ſimilium laterum triplam habere rationem. Ex trigeſimaquarta vero concludemus, cùm Priſmata in ſuorum parallelepipedorum ratione exiſtant, baſes vero priſmatum (ſimul trigonæ aut ſimul quadrangulæ) in baſium polygonorum ratione, altitudines autem ſemper æquales efficiant, priſmatum baſes & duplicium ſolidorum eiuſdem rationis baſes quoque ac vertices, eandem habere inter ſe quam ſolidorum duplicium baſes affinitatem. Nam ſi ſolidorum æqualium baſes reciprocæ fuerint verticibus, & eorum ſolidorum dimidia priſmata ſuas baſes verticibus reciprocas habebunt. Ex trigeſimaſexta autem dicemus, Si tres rectæ proportionales fuerint, ex ipſis tribus factus priſmatis angulus duplo ipſi parallelepip. do communis, efficit priſma æquum ei quod à media ſimilem ſuſcipit angulum, æquis lateribus compoſitum: nam commune priſmati & parallelepipedo illud vnum ſupponemus, tres ſcilicet linearum proportionalium dimenſiones ſimilem angulum conſtituere, et qui fit ex media ter ſumpta. Tum ſi priſmatis ſolidus angulus, ex tribus illis rectis conſtitutus fuerit, dupli eius parallelepipedi ex eiſdem ſimilis conſtituetur angulus. Sequetur itaque priſmata ſemper ipſis parallelepipedis dimidia inter ſe æquiangula veluti & eorū duplicia neceſſariò eſſe, licet non æquilatera, & ea proinde æqualium ſolidorum dimidia, inter ſe æqualia eſſe, ei quod ſcilicet à media proportionali angulum fecit, æquum ei quod à tribus proportionalibus poſitum ſuſcepit. Ex trigeſimaſeptima idem inferemus quod de parallelepipedis ad priſmata, cùm enim ex datis lineis ſimiliter deſcripta priſmata ſint, ſimilium parallelepipedorum ſimilitérque deſcriptorum dimidia, ſequetur ea priſmata duplicium ſolidorum inter ſe ſeruare rationem. & ideo ſi lineæ ea deſcribentes proportionales fuerint, ea proportionalia eſſe, ac è conuerſo, iuxta huius 37 legem, cùm autem 39 oppoſita ſolidi plana parallelogramma ſupponat, ipſiq́; ſolido dimetientem, quam non ſuſcipit priſma, à priſmatum hanc diſciplina recedere cenſebimus. Cæterùm vt ſolidorū binis polygonis ſimilibus, æqualibus, ac parallelis reliquis verò parallelogrammis comprehenſorum naturam, à priſmatum ex quibus componuntur (vt corollor. ſecundo vigeſimaquintæ huius) oriri doceamus natura Dicemus (ex vigeſimaſeptima huius) deſcripto parallelepipedo, eius dimidium priſma deſcriptum eſſe, deſcriptione vero priſmatum componetur ſimile ſolidum dato ex priſmatis compoſito, quæ verò 29, 30, 31 & 32 poſtulant theoremata in huiuſmodi ſolidis, ſuper baſibus polygonis intelligenda ſunt. Similiter & in 34, quod antē optat 33 in quibuſuis ſimilis rationis lateribus exigit, veluti & 37 quæ ſimilis rationis latera proportionalia eſſe poſtulat. Hæc nempe ſolida quæ Campanus lateratas dicit columnas, ex priſmatis compoſita ſimilia ac ſimiliter deſcripta, ſuorum ſimilium priſmatum ſequuntur doctrinam, & proinde parallelepipedorū priſmatum duplicium. Reliqua verò ex priſmatum conferentia, ex quibus hæc componi poſcimus ſolida, facilè conſequetur quiſque ex præfatorum intelligentia pauco ſudore.

VNDECIMI LIBRI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-num restitutarum Liber duodecimus.

Propositio prima.

QVæ in circulis multangulæ similes figuræ, adinuicem se habent sicut quæ ex dimetientibus quadrata.

In circulis A B D *&* Z I K *descripta sint multangulæ figuræ* A B G D E *&* Z I T K L, *similes similitérque posita, circulorũ verò dimetientes sint* B M I N *Dico esse poligonum* A B G D E *ad* Z I T K L *sicut quadratum ex* B M *ad quod ex* I N. *Connungãtur* A M B E Z N I L *rectæ, quoniam hæc poligona sunt similia, circũæquales angulos triãgulorũ* B A E I Z L *latera* I Z Z L *lateribus* B A A E *sunt proportionalia, quare (per sextam sexti) æquiangula erunt triangula, & ideo anguli* A E B Z L I *erunt æquales: sed ipsis* A E B Z L I *æquales sunt* A M B Z N I, *per 21 tertij in eodem segmẽto, Ipsi itaque* A M B Z N I *anguli adinuicẽ æquales erũt, sed &* B A M I Z N *æquales sunt, nempe recti, per trigesimamprimam tertij. Reliquus itaque* A B M *reliquo* Z I N *æquus erit, cùm tres vtriusque trianguli binis rectis æquẽtur, per corollarium primum 32 primi. Aequiangulorum igitur triangulorũ* A M B Z N I, *proportionalia sunt* A B *ad* Z I, *vt* B M *ad* I N *latera, per quartã sexti: sed poligonorũ* A B G D E *ad* Z I T K L *ratio, dupla est rationis* A B *ad* Z I, *per vigesimam sexti. Ipsa itaque poligonorũ ratio, erit dupla rationis* B M *ad* I N, *rationi* A B *ad* Z I *æqualis. Atqui quadratorum ex* B M *&* I N *ratio, dupla est rationis earundem* B M *ad* I N *suorum laterum, per eandem 20 sexti, Poligonorum itaque & quadratorum inter se rationes (eiusdem rationis dimetiẽtium* B M *ad* I N *duplæ) eadem adinuicem erũt. Poligonum igitur* A B G D E *ad* Z I T K L *erit sicut quadratum ex* B M *ad quod ex* I N. *Quæ itaque in circulis, &c.*

Propositio secunda.

Circuli sese adinuicem habent, sicut quæ ex dimetientibus quadrata.

Sint bini circuli A B G D *&* E Z I T, *eorum autem dimetientes sint* B D *&* Z T: *Dico esse* A B G D *ad* E Z I T *circulos, sicut quod ex* B D *ad quod ex* Z T *dimetientibus quadrata. Quod si* A B G D *ad alium* E Z I T *eã nõ habeat quam quadrata rationem, idem* A B G D *eam quadratorum rationem ad aliam magnitudinem ipso quouis alio* E Z I T *maiorẽ, vel minorem habebit, habeat itaque prius ad minorẽ, (si fieri poßit) quæ sit area* S, *quoniam positus est* E Z I T *circulus (ex hypothesi) maior ea area* S. *Auferatur ab ipso* E Z I T *circulo maius quam dimidiũ, & rursus maius quam dimidiũ, per primã decimi, donec relinquatur minus residuum excessu quo* E Z I T *ipsam* S *excedit, applicato, scilicet ipsi* E Z I T *circulo, quadrato*

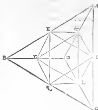
T E Z I, quod quidem maius dimidio circuli tollit, cùm sit dimidiũ circũscripti quadrati, rursusque super quadrati lateribus isoscelia describantur, sectis bifariam arcubus, Z T E K Z, manifestum est triangulum E K Z maius quàm dimidium sectionis E Z K circuli tollere. Nam rectanguli E C dimidium tollit (per 41 primi) triangulum E K Z, quod quidem rectangulum sectionem continet. Relinquatur itaque tãdem magnitudo minor præfato excessu, quæ sit sectiones illæ circuli, quibus circulus excedit poligonum E K Z L I M T N. Si igitur circulus E Z I T minori excessu excedat poligonum E K Z L sibi inscriptum, eo quòd excedit areã S, maius erit poligonum E K Z L area S ipsi itaq. poligono E K Z L simile circulo A B G D inscribatur (per 18 sexti circa B D dimetientem circuli A B G D, quoniã (ex hypothesi) fuit circulus A B G D ad aream S, sicut quadratum ex B D ad id quod ex T Z sed sicut quod ex B D ad quod ex T Z, sic est poligonum A X B O ad simile E K Z L, per præfatã. Sicut igitur, per vndecimam quinti, poligonum A X B O ad simile E K Z L, sic A B G D circulus ad aream S & vicissim, ideo sicut poligonũ A X B O ad A B G D circulum, sic poligonum E K Z L ad aream S, per 16 quinti. Minus autem est poligonum A X B O, circulo A B G D continẽte minus igitur erit poligonum E K Z L area S, per 14 quinti, Sed & maius ostensum est quod fieri non potest. Nõ igitur habet circulus A B G D rationem quadratorum quæ ex B D T Z, ad magnitudinem aliquam minorem circulo E Z I T: Dico rursus neque ad maiorẽ, quod si fieri posse credatur, esto S maior circulo E Z I T, sitq. circulus A B G D ad S, vt quod ex B D ad quod ex T Z. Erit igitur conuersim area S ad A B G D circulum, vt quod ex T Z ad quod ex B D per corollar. quartæ quinti: quia verò posita est S area circulo E Z I T maior, fiat sicut area S ad A B G D circulum, sic E Z I T circulus ad quãdam aream, hæc area (per 14 quinti) minor erit circulo A B G D, circulus igitur E Z I T erit ad aream minorem reliquo circulo A B G D, sicut S ad A B G D, hoc est, sicut quod ex T Z ad quod ex B D quadrata. Atqui iam ostendimus prima parte circulum quemuis non habere rationem quadratorum ex dimetientibus, ad magnitudinem reliquo quouis circulo minorem, nunc autem eam habere, quod fieri non potest. Non hac de causa subsistẽt hypotheses, circulum scilicet ad aliam magnitudinem alio circulo maiorem vel minorem rationem habere quàm dimetientiũ quadrata. Eam itaque quam dimetientium quadrata rationem habebit circulus, ad magnitudinem reliquo circulo æqualem, & proinde ad ipsum circulum, per septimam quinti. Circuli igitur sese adinuicem habent, &c.

Corollarium.

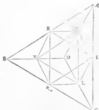
Circuli eandem habent rationem quam in eis similia similitérque descripta poligona. *Nam poligona eam habere ostendimus quam ex dimetientibus quadrata habent, quam similiter habent & circuli.*

Propositio tertia.

Omnis Pyramis triangularem basim habens, diuiditur in binas pyramides æquales, similes verò toti & adinuicem. Et in bina Prismata æqualia, & ipsa bina prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.



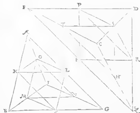
Sit aliqua pyramis A B G D, cuius basis sit A B G triangularis, vertex autem D: Dico A B G D pyramidem posse secari in binas pyramides æquas & similes toti, & adinuicem, ac in bina æqualia prismata, totius pyramidis dimidio maiora. Secentur bifariam sex pyramidis latera in E Z I T K L, coniunctis E Z Z I I E T K K L L T & insuper I T T E E K K Z Z L L I. Quoniam omnia pyramidis latera bifariam secta sunt, ac ideo proportionaliter. Sequetur rectas trianguli T K L parallelas esse basibus A B B G G A, per 2 sexti. Similia itaque erunt scilicet T D K toti A D B, & K D L toti B D G, ac L D T toti G D A, per corollarium secundæ sexti. Quia verò parallelæ fuerunt rectæ trianguli T K L rectis trianguli A B G. Illæ æquales angulos comprehendent, per decimam vndecimi. Pyramis itaque T K L D



sub similibus triangulis,& multitudine æqualibus toti pyramidi A B G D *continetur, scilicet* A B G A E D D G A D G B, *ipsis* T K L T K D D L T D L K. *Similes itaque sunt* A B G D *&* T K L D *pyramides, per septimam diffinit. vndecimi. Similiter ostendemus toti* A B G D *reliquam* A E I T *similem esse. Nam triangulo* A G D *simile est* A I T. *Triangulo vero* A B D *simile est* A E T, *& ipsi* A B G, *Illud* A E I, *& reliquum* E T I *reliquo* B D G. *Nam latera sunt lateribus dimidia & parallela. Et proinde vt ostendimus in reliqua* T K L D, *totidem erunt & similia. Ipsius verò* T K L D *pyramidis basibus æqualia erunt huius* A E I T *triangula. Nam vtraque sub dimidiis totius continentur lateribus. Toti igitur* A B G D *similes, & adinuicem æquales & similes sunt* T K L D *&* A E I T *pyramides, per octauam diffinitionem vndecimi. Quia vero parallelæ sunt & æquales* B E K T *&* Z I *ostensæ, nempe ipsius* A B *dimidia, eas coniungentes rectæ* B K K Z Z B *rectis* E T T I I E *æquales erunt & parallelæ, per trigesimamtertiam primi. Parallelogramma itaque erunt* B E T K B E I Z *&* K T I Z, *per trigesimamsextam diffinit. Quia verò eorum opposita latera sunt æqualia, per trigesimamquartam primi, triangula* E T I *&* B K Z *æquiangula erunt, per octauam eiusdem. Et proinde (per quartam eiusdem) æqualia. Ac insuper parallela plana, per decimamquintam vndecimi. Prisma igitur erit solidum* B K Z E T I, *per vndecimam diffinitionē vndecimi. Similiter cùm triangulorum* T K L *&* I Z G *latera, lateribus sint æqualia & parallela, nempe dimidia laterum trianguli* A B G, *manifestum erit parallelogramma esse,* G Z K L, Z K T I *&* G L T I, *per trigesimamtertiam primi, & trigesimamsextam diffinit. eiusdem. Prisma igitur erit totum* K L T Z G I *solidum, per vndecimā diffinit. vndecimi, sub ipsis parallelogrammis & triangulis* T K L I Z G *comprehensum. Tota itaque pyramis* A B G D *in binas pyramides* T K L D *&* A E I T, *ac bina prismata* B K Z E T I *&* K L T Z G I *secta fuit. Cùm autem prismatis* B K Z E T I *pars sit pyramis* B E Z K. *prismatis verò* K L T Z G I *sit pars alia* Z I G L *pyramis, quæ quidem reliquis quæ in principio binis pyramidibus* T K L D A E I T *æquales, & similes existunt, cùm componantur ex æquis ipsarum lateribus, ac proinde similibus triangulis, nempe dimidiis totius* A B G D *pyramidis lateribus. Sequetur bina prismata (ipsis pyramidibus maiora) plus totius* A B G D *pyramidis dimidio continere. Omnis itaque pyramis triangularem, &c.*

Propositio quarta.

Si fuerint binæ Pyramides triangulares bases habentes sub eadem altitudine: diuisa verò fuerit vtraque ipsarum in binas Pyramides, adinuicem æquales, & similes toti, & in bina Prismata æqualia, & in vtraque factarum Pyramidum, is modus semper setuetur. Erit sicut vnius Pyramidis basis ad alterius Pyramidis basim, sic quæ in vna Pyramide Prismata, ad ea quæ in altera Pyramide Prismata omnia, simili sectione producta.



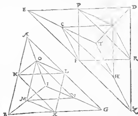
Proponantur binæ pyramides eiuſdē altitudinis A B G I *&* D E Z C, *quarum vtraque iuxta præcedentis methodum diuiſa ſit in binas pyramides æquales, ſimiles vero toti & adinuicē, ac in bina priſmata æqualia. Inſuper rurſus factæ pyramides ſimiliter ſubdiuidantur quotieſlibet. Dico eſſe ſicut* A B G *baſim ad* D E Z *baſim, ſic omnia priſmata à pyramide* A B G I *ſumpta, ad omnia à pyramide* D E Z C *ſumpta, ſimili ſecta modo, ſicque ſingula ad ſingula. Quoniam in hac pyramidum ſectione diuiduntur omnia pyramidū latera bifariam, ex præfata, erit tota* B G *ad dimidiam* G X *vt tota* E Z *ad dimidiam* Z F, *per 15 quinti, & ab eis itaq; rectilineæ ſimilia (per 22 ſexti) proportionalia erunt,* A B G *ad* L X G *ſicut* D E Z *ad* R F Z, *ſunt enim ſimilia, vt proxima patuit,* A B G *&* L X G, *ſicut &* D E Z *ipſi* R F Z, *vicißim igitur (per decimamſextam quinti) erit* A B G *ad* D E Z *ſicut* L X G *ad* R F Z *triangula, ſicut autem baſes* L X G *ad* R F Z, *ſic quæ ſuper ipſis priſmata* O M N L X G *ad* S T H R F Z, *per corollarium quadrageſimæ vndecimi. Nam ſunt ipſa priſmata ſub eadem altitudine dimidiarum pyramidum, per præfatam, quæ pyrami des ſunt (ex hypotheſi) eiuſdem altitudinis ſicut itaque baſis* A B G *ad baſim* D E Z *ſic eſt priſma* O M N L X G *ad priſma* S T H R F Z, *per vndecimam quinti, Sicque reliqua priſmata* K O L B M X *ad* P S R E T F. *Nam bina* O M N L X G *&* K O L B M X *ſunt æqualia, veluti* S T H R F Z *ipſi* P S R E T F, *ex præcedente, quare erunt ad ſe ſingula priſmata ſicut pyramidum baſes, per vndecimam quinti, ſicútque omnia ad omnia ſimul ſumpta priſmata, per duodecimam quinti. Cùm autem iam fuerit baſis* A B G *ad baſim* D E Z, *ſicut* L X G *ad* R F Z, *ſic erit* O M N *ad* S T H, *ſunt enim æqualia & ſimilia priſmatum oppoſita triāgula ipſis* L X G *&* R F Z. *Sicque erit* A K L *ad* D P R, *ſimilia ipſis* L X G R F Z, *vt latius patuit præfata, ſed ſicut baſes ad baſes, ſic oſtendimus eſſe pyramidum priſmata ad ſeinuicem. Sicut itaque baſes* O M N *vel* A K L *ad* S T H *vel* D P R, *ſic erunt ad ſe priſmata ex pyramidibus* O M N I *vel* A K L O, *ad priſmata ex pyramidibus* S T H C *vel* D P R S *ſimili methodo ſumpta, ſunt enim ſub eodem vertice, per conſtructionem, nempe dimidia totarum pyramidum altitudine, ſicut igitur totarum baſes* A B G *ad* D E Z *ſic omnia vel ſingula ad ſe erunt priſmata. Si itaque fuerint bina pyramides triangulares baſes, &c.*

MONITVM.

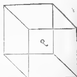
Abſtulimus circa huius theorematis finem has voces (æquemultiplicia) à Theone extra ſenſum relatas, nam à Græco (æquemulta) diceremus, nos autem vtrique ſatisfacere cupientes, diximus (ſimili ſectione producta) eò quòd ſimilis ſecandi forma æquam præ ſe ferat multitudinem partium, & inſuper ſimiles ſectionum eſſe cogat figuras, ne æquemulta non ſimilia poſtulari credamus, ſed æquamulta, & ſibi inuicem ſimilia, ſingula ſingulis, ſiue (ex duodecima quinti) omnia omnibus proportionalia baſibus eſſe fateamur.

Propoſitio quinta.

Sub eodem faſtigio Pyramydes, triangularéſque baſes habentes, adinuicem ſeſe habent ſicut baſes.



Supponantur binæ pyramides A B G I *&* D E Z T *triangulares bases* A B G *&* D E Z *habentes, sub eadem altitudine. Dico esse* A B G I *ad* D E Z T *pyramides, sicut* A B G *ad* D E Z *bases, simili secundæ huius argumento, si pyramides* A B G I *&* D E Z T *non habeãt rationem basium* A B G *ad* D E Z, *habeat aliqua earum scilicet* A B G I *rationem basium* A B G *ad* D E Z, *ad aliquod solidum* Q, *erit igitur solidum* Q *maius vel minus reliqua pyramide* D E Z T, *esto prius minus pyramide* D E Z T *solidum* Q. *A pyramide autem* D E Z T *auferatur plusquã dimidium, & reliqui plusquam dimidium (per tertiam huius) scilicet secta pyramide in binas pyramides, & bina prismata dimidio pyramidis maiora, & rursus binis pyramidibus hac secandi lege diuisis. Relinquetur tandem (per primam decimi) magnitudo minor excessu, quo pyramis* D E Z T *excedit solidum* Q. *Reliquum itaque ipsius pyramidis* D E Z T *scilicet ea prismata ab eadem frequentius detracta simul sumpta, maiora erunt solido* Q. *Quæ prismata sint (ex hypothesi) ea quæ inter triãgula* E C P P S R *&* P R Z C S H *continentur: secetúrque similiter pyramis* A B G I *in prismata* B M X K O L *&* C X L G M O N, *per eandem tertiam huius, quoniã enim est sicut basis* A B G *ad basim* D E Z, *sic (per hypothesim) pyramis* A B G I *ad solidum* Q, *sicque (per quartam huius) omnia prismata pyramidis* A B G I, *ad omnia simili sectione producta ex pyramide* D E Z T: *erit igitur (per undecimam quinti) sicut prismata pyramidis* A B G I *ad prismata pyramidis* D E Z T, *sic pyramis* A B G I *ad solidum* Q. *Vicissim itaque erit (ex decimasexta quinti) sicut prismata pyramidis* A B G I *ad pyramidem* A B G I, *sic prismata pyramidis* D E Z T *ad solidum* Q, *sed prismata pyramidis* A B G I *ipsa pyramide contẽta minora sunt. Prismata igitur pyramidis* D E Z T *solido* Q *(per decimamquartã quinti) minora erunt, sed & maiora ostensa sunt, quod fieri non potest. Non habet igitur aliqua pyramidum* A B G I *vel* D E Z T *rationẽ, quam habent bases ad magnitudinem minorem reliqua pyramide. Dico insuper quod neque ad maiorem, si enim supponeretur* Q *solidum maius aliqua pyramide scilicet ipsa* D E Z T, *haberétque reliqua pyramis* A B G I *ad ipsum* Q *rationem quam* A B G *basis ad* D E Z *basim: esset conuertendo (per corollariũ quartæ quinti) solidum* Q *ad pyramidem* A B G I, *sicut basis* D E Z *ad* A B G, *quia verò maius est* Q *solidum, pyramide* D E Z T, *ex hypothesi, erit sicut* Q *solidum ad* A B G I *pyramidem, sic* D E Z T *pyramis ad magnitudinem minorem pyramide* A B G I, *per decimamquartam quinti, sed sicut* Q *ad* A B G I *pyramidem, sic fuit basis* D E Z *ad* A B G *basim. Sicut igitur pyramis* D E Z T *ad magnitudinem reliqua pyramide* A B G I *minorem, sic erit basis* D E Z *ad* A B G *basim per undecimam quinti. Aliqua igitur pyramidum* A B G I *vel* D E Z T *rationem habuit quam bases, ad magnitudinem reliqua pyramide minorem, sed & non habere ostensum est, quod esset absurdum: non igitur habet aliqua pyramis rationem basium ad magnitudinem reliqua pyramide maiorem vel minorem, eam igitur habet ad æqualem reliquæ pyramidi, & proinde ad pyramidem ipsam, per septimam quinti. Sub eodem itaque fastigio pyramides triangularesq́; bases habentes.*



Propositio sexta.

Sub eadem altitudine Pyramides existentes, multangulásque bases habentes, adinuicem sese habent sicuti bases.

Sint sub eadem altitudine pyramides ABCE *&* GDI *habentes bases poligonas* ABC *&* GD *Dico esse pyramidem* ABCE *ad pyramidem* GDI, *sicut basis* ABC *est ad basim* GD. *Describantur (per vigesimamquintam sexti) triangula* F *&* K, *ipsis* ABC *&* GD *basibus æqualia, super ipsis porrò* F *&* K *pyramides supponantur sub eodem vertice ipsarum* ABCE *&* GDI, *demissa in bases æqua perpendiculari, per vndecimam vndecimi. Quoniam sicut singula triangula* AB *&* C *sunt ad triangulum* F, *sic sunt singulæ pyramides* AE BE *&* CE *ad pyramidem* FL, *per quintam huius. Sed singula simul sumpta triangula* ABC *totum* F *componunt, ex constructione. Singulæ igitur pyramides* AE BE CE *simul sumptæ pyramidem* F *componunt. Similiter singulæ* GI *&* DI *pyramides totam* KH *pyramidem component. Cùm autem sit vt* F *ad* K *bases, sic* FL *ad* KH *pyramides, per præfatam erit vt* ABC *ad* GD *bases, ipsis* F *&* K *æquales, sic* ABCE *ad* GDI *pyramides, ipsis* FL *&* KH *æquales. Sub eadem igitur altitudine pyramides existentes multangulas, &c.*

Propositio septima.

Omne Prisma diuiditur in tres Pyramides sibi inuicem æquas, triangulares bases habentes.

Proponatur prisma cuius bases oppositæ sint triangula ABG DZE: *Dico ipsum prisma secari in tres pyramides inuicem æquales, triangulares bases habentes. Ducantur rectæ* BD GD GE. *Quoniam parallelogrammum est* AB ED, *per vndecimam diffinitionem vndecimi, æqualia sunt* ABD *&* BDE *triangula, per 34 primi. Quare (per quintam huius) æquales erunt pyramides* ABDG BBDG, *super æquis basibus* ABD EDB *& eodem vertice* G *comprehensæ. Rursus quia parallelogrammum est* BGZE, *æquales erunt bases* BEG *&* EGZ. *Quare pyramis super basi* EGZ *vertice verò* D, *æqua erit pyramidi super basi* BEG *& eodem vertice* D *constituta, per quintam huius. Atqui pyramis cuius basis est* BEG, *eadem est ei quæ fuit super basi* BDE *vertice verò* G *contenta, nempe sub quatuor triangulis* BDE DEG DBG *&* EBG. *Cui quidem pyramidi binæ reliquæ ostensæ sunt æquales, & triangulares bases habentes totum complent prisma, tres igitur pyramides* ABDG EBDG EGZD *æquales, triangularésque bases habentes totum efficiunt* ABGDZE *prisma. Omne itaque prisma diuiditur in tres pyramides, &c.*

Corollarium primum.

Prisma quotlibet triplum est Pyramidis eandem triangularem basim habentis, & æquale fastigium. *Vt patuit hoc theoremate cùm diuidatur in tres æquas, quarum binæ sunt in eadem basi & altitudine. Si verò Prisma super parallelogramma basi constituatur, Pyramis verò in dimidia eius basi & æqua altitudine. Rursus tertia pars erit ipsius Prismatis. Nam patuit (quadragesima vndecimi) Prisma cuius parallelogramma basis, duplæ est trianguli alterius Prismatis, & æqua sublimitas, esse reliquo prismati æquale, vnde sequetur illatio proxima.*

Corollarium secundum.

Si plura Prismata eiusdem verticis trigonas bases super eodem plano in vnum polygonum

componant Pyramidem super ea basi & altitudine tertiam esse eius solidi partem, sub cunctis simul sumptis Prismatis comprehensi. *Nam singula prismata singularum super sua basi & altitudine pyramidum tripla, concludunt omnia omnium tripla, per 12 quinti, esse quare parallelepipeda tripla sunt pyramidum eiusdem basis & verticis, eo quod bina continent prismata.*

Corollarium tertium.

Si bina Prismata sub eadem altitudine bases habeant simul trigonas, aut simul tetragonas, ipsa Prismata ad seinuicem sunt vt bases. *Cum enim ea prismata sint æquemultiplicia pyramidum super eisdem basibus, & altitudine, quæ quidem sunt vt bases, & ipsa sequetur esse vt bases. Sūt enim tripla pyramidum super basi trigona, per præcedens corollarium.*

Corollarium quartum.

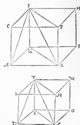
Pyramidum super eadem basi tetragona, & eodem vertice Prismata sunt sesquialtera. *Nam pyramis illa binas pyramides super basi trigona eiusdem prismatis constitutas continet, cùm dixerimus iam illud prisma triplum esse pyramidis super dimidia eius tetragona basi constitutæ, cuius est dupla reliqua super tota basi posita, per sextam huius.*

Corollarium quintum.

Quare similiter concludemus solida præcedenti corollario memorata (quæ lateratas vocat Campanus columnas) ad se esse vt bases poligonæ, cùm sub eodem continentur vertice. *Nam sunt in ratione pyramidum siue prismatū, quæ super eisdem basibus & vertice, hoc est, in ratione basium. Quare ad ea, similiter prismata eiusdē verticis erunt vt bases, eò quòd ea laterata in prismata eiusdem verticis reducantur, cum secantur bases oppositæ in triangula, per vigesimam sexti. Super quibus triangulis prismata, ad se sunt vt bases.*

Propositio octaua.

Similes Pyramides triangulares bases habentes, in tripla sunt ratione laterum eiusdem rationis.



Proponantur similes Pyramides triangulares bases habentes ABGI *&* DZET, *quarum similis rationis latera sint* AB *&* DZ: *Dico pyramides* ABGI *&* DZET *triplam habere laterum* AB *ad* DZ *rationem, super basi* ABG *pyramidis* ABGI, *& vertice* I *cōstituatur prisma, ductis ipsi* IG *parallelis* ACBF, *quod sit* AGBCIF, *cui addatur aliud prisma perfecto parallelepipedo* AFGH *ex binis prismatis composito, per corollarium quadragesimæ vndecimi. Similiter pyramidi* DZET *super basi* DZE *fiat prisma* DEZLTM, *& parallepipedum* DMEN: *quoniam similia sunt parallelepipeda* AFGH *&* DMEN, *cum sint ex similibus (ex hypothesi) pyramidibus similiter constructa, ipsa erunt in tripla ratione laterum* AB *ad* DZ *similis rationis, per 33 vndecimi: sed ipsa sunt prismatum* AGBCIF *&* DEZLTM *æquemultiplicia, nempe dupla, per coroll. 40 vndecimi, ipsa itaque prismata parallelepipedorum habent rationem, per 15 quinti. Atqui eadem prismata pyramidum* ABGI *&* DZET *sunt rursus æquemultiplicia, nempe tripla, per præcedentis corollariū. Ipsæ itaque pyramides prismatum habēt rationem, per eandem 15 quinti, & ideo (per 11 quinti) pyramides rationē parallelepipedorum* AFGH *&* DMEN *habebunt, quæ fuit tripla laterum* AB *ad* DZ. *Pyramides itaque* ABGI *ad* DZET *sunt in tripla ratione laterum* AB *ad* DZ. *Similes igitur pyramides triangulares bases habentes, &c.*

Corollarium.

Pyramides similes, poligonas bases habentes, triplam habent rationem similis rationis laterum.

terum [illegible] *enim similibus poligonis, similiter & in similia triangula & aequalia numero, per vigesimam sexti, erunt singula secta singulis similes & in tripla ratione sumptorū laterum, per hoc theorema. Quare poligonae (trigonarum aequemultiplices, nempe vt bases basiū per sextam huius) eandē habebunt ipsis rationem, per 15 quinti, & ideo triplam laterum similis rationis similiter prismata ac laterata columnae super basibus & earum pyramidū fastigio (cum sint ipsarum pyramidum aequemultiplicia nempe tripla per corollarium 7 huius) cādem ipsis pyramidibus habebunt (ex 15 quinti) rationem, & igitur triplam similium laterum.*

Propositio nona.

AEqualium Pyramidum triangulares bases habentium, reciprocae sunt bases altitudinibus, Et Pyramides triangulares bases habentes, quarū reciprocae sunt bases verticibus, sunt aequales.

Exponantur binae aequales pyramides triāgulares bases habentes, ABGI *&* DEZT*, quarum bases sint* AGB *&* DZE*, vertices verò rectae* GI *&* ZT*. Dico esse bases* AGB *ad* DZE *reciprocae, sicut* ZT *ad* GI *vertices. Perficiantur ex pyramidibus prismata* AGBOIC *&* DZENTK*, ex ipsis vero parallelepipeda* BOGH *&* ENZL*, vt proxima diximus. Ipsa igitur* BOGH *&* ENZL *sunt pyramidum sescupla, nempe prismatum triplorum dupla. AEqualium itaque pyramidum sescupla aequalia erunt, per commun. sententiam. Sed & bases habent in ratione basium pyramidum, cum sint earum duplae, scilicet* FB *ipsius* AGB *basis, &* ME *ipsius* DZE*, per 34 primi. Altitudines vero* GI *&* ZT *communes habent solida cum pyramidibus. Sed & verticibus reciprocas habent bases solida, per 34 vndecimi. Pyramides igitur solidis eandem rationem basium habentes, & communes altitudines, bases habebunt verticibus reciprocas. Erit igitur basis* AGB *ad* DZE *(pyramidum* ABGI *&* DEZT*) sicut* ZT*, vertex ad* GI *verticem reciprocè, per secundam diffinitionem sexti. Ad secundam vero partem ponamus esse reciprocè* AGB *ad* DZE *bases, vt* ZT *ad* GI *vertices. Dico pyramides* ABGI *&* DEZT *esse aequales. Cùm enim (per constructionem) duplae sint bases* FB ME *parallelepipedorum, basibus* AGB DZE *pyramidum, Erunt in ratione solidorum & pyramidum bases. Quia vero solidorum & pyramidum aequa sunt fastigia, singula singulorum eandem habebunt rationem. Sed (ex hypothesi) pyramidum reciprocae sunt bases verticibus. Et igitur solidorum similis rationis bases & fastigia, reciprocè forent verticibus. Quae itaque solida sunt (per 34 vndecimi) aequalia. Sed & pyramidum* ABGI *&* DEZT *aequemultiplicia sunt ea* BH *&* EL *solida, nempe vt ostendimus sescupla. Pyramides aequalium aequemultiplicium partes sunt igitur adinuicem aequales, per decimamquintam quinti. AEqualium itaque pyramidum triangulares bases, &c.*

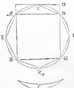
Corollarium.

Hinc assequimur Pyramides poligonas aequales, reciprocas habere verticibus bases. *Sint Pyramides poligonae aequales super* A *&* B*. Dico earum bases* A *&* B *reciprocas esse verticibus. Describantur ipsis basibus* A *&* B *(per vigesimamquintam sexti) aequalia triangula* G *&* D *super quibus pyramides aequè altae ipsis* A *&* B *construantur. Pyramides igitur* G *&* D *super aequis basibus & verticibus ipsis* A *&* B *erunt aequales, per sextam huius. Ipsae igitur reciprocas habent bases* G *ad* D*, verticibus* D *ad* G*, per hoc theorema. Sed sicut* G *ad* D *bases, sic* A *ad* B *bases erit, cùm sint aequales. Et sicut ipsarum* D *ad* G *vertices, sic ipsarum* B *ad* A *vertices, qui simili-*

ter sunt æquales. Sicut igitur A ad B bases, sic erunt reciprocè ipsarum B ad A pyramidum vertices, per vndecimam quinti. Idem sequitur in prismate & laterata columna, vt iam latius corollario quadragesimæ vndecimi diximus. Sequuntur etenim illa (super oppositis basibus poligonis existentia) pyramidum siue parallelepipedorum rationem, maximè cùm sint æquemultiplicium partes, aut partium æquemultiplicia.

Propositio decima.

Omnis Conus Cylindri tertia pars est, eandem eidem basim habentis, & æquale fastigium.



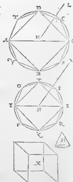
Proponatur conus habens ad basim circulum A B G D. *Atque cylindrus eandem basim habens & altitudinem: Dico conum cylindri esse tertiam partem, siue cylindrum coni triplum esse. Ab impossibili enim, Si cylindrus non sit triplus coni, aut maior, aut triplo minor erit. Esto prius triplo coni maior cylindrus, hac magnitudine* C, *fiat autem in circulo* A B G D *quadratum* A B G D, *sectis bifariam residuis sectionibus circuli in* E Z I T *signis, & coniunctis* A E E B B Z Z G G I I D D T T A, *rursusque sectis residuis sectionibus bifariam, ductis subtensis quotieslibet. Cùm autem quadratum* A B G D *sit dimidium sibi circunscripti quadrati, per quadragesimamseptimam primi. Circunscriptum verò maius sit circulo* A B G D, *sequetur quadratum* A B G D *plus dimidio circuli* A B G D *continere. Similiter quia triangulum* A T D *est dimidium parallelogrammi* A O, *per quadragesimamprimam primi, sequetur idem* A T D *maius esse dimidio sectionis* A T D *ipso parallelogrammo* A O *minoris. Idem ostendemus, infinitè triangula Isoscelia super poligoni basibus, quotcunque in sectione descripta, dimidio sectionis esse maiora. Quia verò ostendimus (corollario secundo septimæ huius) prismata ac laterata solida (eiusdem verticis) ad se esse vt bases, concludemus parallelepipedum super quadrato* A B G D, *maius dimidio auferre à cylindro qui super circulo* A B G D *fit sub eodem vertice, eò quòd auferat dimidium parallelepipedi super quadrato circulum continente descripti, vt patuit. Similiter reliquæ sectionis cylindri (quæ super sectione* A T D) *maius dimidio dicemus auferre prisma, quod super triangulo* A T D *constituitur, sub cylindri altitudine, eò quòd præcisè dimidium auferat parallelepipedi super parallelogrammo* A O *sub eodem cylindri vertice descripti. Sicque infinitè plus dimidio reliquarum quotuis sectionum cylindri tollere poterimus. Auferatur itaque à cylindro circuli* A B G D *ea arte plus dimidio & reliqui item plus dimidio. Relinquatúrque tandem (ex prima decimi) magnitudo minor ipso excessu* C, *quo cylindrus triplum coni excessit, ex hypothesi, eáque sit sectiones cylindri constitutæ super sectionibus circuli, scilicet* A E E B B Z Z G G I I D D T T A. *Cùm autem hæ relictæ sint excessu* C *minores, sequetur illud quod superest lateratum solidum, quod super poligono* A T D I G, *maius esse triplo coni constituti super circulo* A B G D, *cùm cylindrus excedat lateratum solidum minus ipsa* C, *qua cylindrus excessit triplum coni. Multo itaque maius erit idem lateratum solidum triplo pyramidis lateratæ, super eodem poligono & coni altitudine descriptæ: nam ea pyramis cono includitur, quod fieri non potest. Nam eiusdem pyramidis triplum ostensum est idem lateratum solidum, per corollarium vigesimæseptimæ huius. Non igitur erit cylindrus triplo sui coni maior. Dico quod neque minor. Siquidem fieri posse credatur super eodem typo. Esto minor cylindrus triplo sui coni aliqua magnitudine* C, *cùm enim ostensum sit pyramides veluti prismata aut laterata solida, ad se esse vt bases sub eadem altitudine, ex sexta & corallario septimæ huius. De cono (vt de cylindro diximus) tollatur plusquam dimidium, & reliqui plusquam dimidium, relinquatur verò (per primam decimi) ex triplo coni, minor magnitudo ipsa* C, *quæ sit sectiones coni super basibus quæ circa multangulas pyramides. Triplæ itaque illæ pyramides cylindro sunt maiores, cùm plus deficiat cylindrus à triplo coni, quàm hæ triplæ pyramides, nempe ipsa* C. *Sed triplæ pyramides solido super ipsarum poligono & vertice sunt æquales, per corollarium septimæ huius. Solidum itaque lateratum quod super pyramidum poligono & sub cylindri altitudine est constitutum, cylindro ipsum continente maius erit, contra 9 commun. sentent. quod est absurdissimum. Nam solidum illud ipsi cylindro inclusum est. Non itaque*

minor

minor erit cylindrus triplo sui coni, neque maior, vt patuit. Erit itaque ipsi triplo æqualis. Omnis igitur conus cylindri tertia pars est eandem eidem, &c.

Propositio vndecima.

Sub eodem fastigio existentes Coni & Cylindri, adinuicem sese habent sicut bases.



Proponantur sub eodem fastigio coni vel cylindri, scilicet super basibus A B G D *&* E Z I T *æquali verò fastigio* K L *ipsi* M N: *Dico conum & cylindrum super basi* A B G D *sic esse ad conum & cylindrum super* E Z I T, *singula singulis, vt basis* A B G D *ad basim* E Z I T, *quod si conorum aliquis scilicet* A B G D L, *non habeat rationem quam bases ad reliquum* E Z I T N, *habeat eam basium rationem ad aliam magnitudinem* X, *quæ aut maior aut minor cono* E Z I T N *erit. Sit itaque prius* X *minor cono* E Z I T N *magnitudine* H, *à cono autem* E Z I N *tollatur sæpius maius quàm dimidium, vt proxima iam demonstrauimus, relinquatúrque tandem (per primam decimi) magnitudo minor ipsa* H *magnitudine. Quæ quidem sit sectiones coni super basibus sectionũ* E P P Z Z R R I I S S T T O O E *& vertice* M N *contentæ. Pyramis itaq. sub poligona basi &* M N *vertice, maior erit ipsa* X: *nã conus* E Z I T N *plus excedit ipsam* X *quàm pyramidem* T E Z R I N, *circulo itaque* A B G D *simile poligonum ipsi* E P Z R I S T O *fiat ad datam* A G, *per decimamoctauam sexti, sitq.* A V B F G C D T, *cùm autem sit (ex hypothesi) conus* A B G D L *ad* X, *sicut basis* A B G D *ad basim* E Z I T, *sicut verò bases fuerunt, sic pyramis* D A B F G L *ad pyramidem* T E Z R I N, *per sextam huius. Sicut igitur, per vndecimam quinti, conus* A B G D L *ad* X, *sic erit pyramis* D A B F G L *ad pyramidem* T E Z R I N, *& ideo vicissim conus* A B G D L *ad pyramidem* D A B F G L *sic erit, vt* X *ad* T E Z R I N *pyramidẽ, per decimamsextam quinti, atqui minor est pyramis* D A B F G L *cono* A B G D L *circunscripto. Minor itaq. erit (per 14 quinti) pyramis* T E Z R I N *ipsa* X *magnitudine, sed & maior ostensa fuit, quod fieri nõ potest. Conus igitur aliquis rationem nõ habet ad magnitudinem reliquo cono minorẽ, quam habent bases. Dico insuper quod neque ad reliquo cono maiorem: quod si fieri posse credamus, habeat conus* A K L *ad magnitudinem* X *reliquo cono* E M N *maiorem, eam quam habent bases* A B G D *ad* E Z I T *rationem, erit conuertendo (per coroll. quartæ quinti)* X *ad* A K L *conum, vt* E Z I T *basis ad* A B G D *basim, cùm autem* E M N *conus sit minor ipsa* X, *per hypothesim, erit sicut* X *ad* A K L *conum, sic* E M N *conus ad magnitudinem aliquam quæ minor erit cono* A K L, *per decimamquartam quinti. Sicut autem* X *ad conum* A K L *sic (per hypothesim) bases* E Z I T *ad* A B G D *fuerunt, sicut igitur bases* E Z I T *ad* A B G D, *sic erit conus* E M N *ad magnitudinem reliquo* A K L *minorem, quod fieri non posse patuit prima huius parte. Non itaque habet aliquis conus ad magnitudinem reliquo maiorem, aut minorem, rationem quam bases habent. eam igitur rationem habebit quilibet conus, ad reliquo cono æqualem, & proinde ad ipsum conum, per septimam quinti. Cùm autem conorum sint æquemultiplices (scilicet triplices) cylindri super eadem basi & altitudine, per decimam huius, qui quidem (ex decimaquinta quinti) eandem igitur ipsis conis habent rationem, sequitur cylindros similiter sub eadem basi & vertice, rationem basium sequi & conos. Sub eodem itaque fastigio existentes coni & cylindri, &c.*

Propositio duodecima.

Similes Coni & Cylindri, ad seinuicem in tripla sunt ratione dimetientium quæ in basibus.

Proponantur similes coni vel cylindri, is cuius basis ABGD *vertex verò* KL, *& is cuius basis est,* EZIT, *vertex verò* MN, *sintq́; basium dimetientes* BD *&* ZI, *centra verò* K *&* M: *Dico eos conos vel cylindros* ABGDKL *&* EZITMN, *triplam rationem habere rationis dimetientium* BD *ad* ZI, *quod si aliud esse opinemur, habeat aliquis conorum* ABGDL *ad aliquam magnitudinẽ, triplam rationem quam habent* BD *ad* ZT *basium dimetientes: ea quippe magnitudo aut maior reliquo cono* EZITN *aut equidẽ minor erit, esto prius minor, sitq́; ea* X *solidum, quia maior est conus* EZITN *solido* X, *auferatur ab ipso* EZITN *cono maius quàm dimidium, & reliqui maius quàm dimidium, descripto in eius basi coni quadrato, & rursus triangulis, super quibus solida eiusdẽ verticis, semper maius dimidio coni vel cylindri tollunt, vt secunda, decima, & vndecima huius docuimus. Relinquatur tandem magnitudo minor eo excessu, quo conus* EZITN *excedit solidum* X, *qui sit sectiones coni super sectionibus,* EO OZ ZP PI IR RT TS SE, *& vertice* N *circa pyramidem quam relinquunt descriptæ. Relicta igitur pyramis* EOZPN, *maior erit solido* X, *nam conus plus excedit solidum* X *quàm pyramidem. Describatur itaque (per decimamoctauam sexti) circulo* ABGD *simile poligonum ipsi* EOZPIRTS, *sitq́;* ACBVGFDQ, *coniunctis* CK LK LB LC *&* OM NM NZ NO *rectis, quoniam similes sunt figuræ, erit* BC *ad* OZ *vt* BD *ad* ZT, *per primam diffinitionem sexti, &* BD *ad* ZT *vt* KL *ad* MN, *per vigesimam diffinitionẽ vndecimi, cùm similes sint coni sicut itaque* KL *ad* MN *sic* KB *ad* MZ *(quæ ex centro) & anguli* BKL ZMN *recti, per decimam sextam diffinitionem vndecimi. Æquiangula itaque sunt* BKL *&* ZMN *triangula, per sextam sexti. Sicut igitur* KL *ad* MN *sic (per quartam sexti)* LB *ad* NZ, *fuit autem* BC *ad* OZ *vt* BD *ad* ZT, *&* BD *ad* ZT *vt* KL *ad* MN, *&* KL *ad* MN *vt* LB *ad* NZ. *Æqua igitur ratione erit* BC *ad* BL, *sic* ZO *ad* ZN, *per vigesimamsecundam quinti, ipsis autem* LB *&* NZ *æquales sunt* LC *&* NO, *æqualium triangulorum similes subtensæ, per decimamsextam diffinitionem vndecimi, Sicut igitur* LB *ad* NZ *sic* LC *ad* NO *triangula itaque* LBC *&* NZO *sunt similia, per primam diffinitionem sexti, cùm sint æquiangula, per sextam sexti. Pyramides igitur super similibus basium* ABGD *&* EZIT *poligonis similibus & totidem triangulis descriptæ, similes erunt, per septimam diffinitionem vndecimi, pyramis itaque* ABKL *triplam habet rationem ad pyramidem* EZMN, *quam* BC *ad* ZO, *& proinde quam* BD *ad* ZT *basium dimetientes, per corollarium octauæ huius, sed eandem habet (ex hypothesi) conus* ABGDL *ad solidum* X, *per corollarium octauæ huius, erit igitur conus* ABGDL *ad solidum* X, *sicut pyramis* ABKL *ad pyramidem* EZMN, *per vndecimam quinti. & vicissim erit conus* ABGDL *ad pyramidem* ABKL *sicut solidum* X *ad pyramidem* EZMN, *atqui maior est conus* ABGDL *pyramide* ABKL, *totum scilicet sua parte. Maius itaque erit solidum* X *pyramide* EZMN, *sed & minus ostensum fuit, quod esset absurdum. Simile fiet argumẽtum conuertendo, si conferatur conus* EZITN *magnitudini minori ipso reliquo* ABGDL *cono. Nam nihil refert an maior conus minori, an minor maiori conferatur, sed quouis cuilibet (hac hypothesi sumpta) collato, semper consurgit absurdum, vt monito proximo dicemus nullus igitur conus habet ad magnitudinem alio quouis simili cono minorem, triplam rationem quam habent eorum bases inter se: Dico præterea quod neque ad maiorem alio cono, sit igitur (hac hypothesi) solidum* X *maius aliquo cono, scilicet hoc* ABGDL, *sit autem conus* EZITN *ad solidum* X *in triplæ ratione dimetientium,* ZT *ad* BD, *erit igitur sicut* EZITN *conus ad solidum* X, *sic* EZMN *pyramis ad* ABKL *pyramidem. nam similes pyramides sunt in tripla ratione propriorum dimetientium, per corollarium octauæ huius. Conuertendo itaque (ex corollario quartæ quinti) erit solidum* X *ad* EZITN *conum, sicut* ABKL *pyramis ad* EZMN *pyramidem. sed sicut solidum* X *ad* EZITN *conum, sic erit conus* ABGDL *ad aliquam magnitudinem, quæ minor erit cono* EZITN, *per decimamquartam quinti, cùm* ABGDL *sit minus ipso* X. *Quam igitur habet rationem pyramis* ABGDL *ad pyramidem* EZITN, *quæ fuit tripla dimetientium, eam habet aliquis conus*

ABGDL

A B G D L, ad magnitudinem aliquam reliquo cono E Z I T N minorem. Patuit autem quod & nullus hanc rationem habeat, quod inconuenit, non ea de causa habet aliquis conorum ad aliquam magnitudinem reliquo simili quouis cono maiorem vel minorem, rationem triplam dimetientium quæ in conorum basibus existunt, eam itaque rationem habet quiuis conus ad magnitudinem reliquo simili quouis cono æqualem: ac proinde ad reliquum conum. Cùm autem cylindri quæ super basi & conorum vertice morantur, sint conorum æquemultiplices (nempe tripli ex decima huius) ipsi (ex decimaquinta quinti) eadem conorum ratione sibi adhærebunt, ac ideo triplam habebunt quam communium basium dimetientes Z T & B D. Similes igitur coni & cylindri ad se inuicem, in tripla sunt, &c.

MONITVM.

Aliqui circa secundæ, quintæ, vndecimæ, duodecimæ, & decimæoctauæ huius, demonstrationes impegerunt, cùm in his antecedens aliquod particulare particulari consequenti conferri arbitrarentur, veluti hoc theoremate. Si conum A K L cono E M N tanquam antecedens consequenti sociantes inferrēt, quod scilicet antecedens A K L non habens ad magnitudinem X consequente E M N minorem, rationem triplam quam habent B D ad Z T dimetientes. Concludit consequens E M N non habere ad magnitudinem antecedente minorem, rationem cōuersam eorundem, scilicet Z T ad B D, quod ex necessitate non sequitur. sed tanti fit conum A K L cono E M N conferre quanti è conuerso conū E M N eodem argumento cono A K L comparare, vt sequenti typo discutiemus.

Licet antecedens A K L non possit habere ad magnitudinem X minorem consequente E M N, triplam rationem dimetientiuum B D ad Z T. Nihilominus consequens E M N potest habere ad magnitudinem F antecedente A K L minorem triplam rationem conuersæ ipsarum scilicet Z T ad B D.

A K L	E M N
32	3
F	X
24	2
B D	Z T
4	4

Ad hæc animaduertendum est his aut similibus demonstrandis, antecedentia & consequentia non sumi particulatim vt circuli ad circulum, coni ad conum, &c. Sed in vniuersum veluti cuiusuis circuli ad quemuis circulum, cuiusuísque coni ad quemlibet conum similem aut eiusdem fastigij, prout exoptat hypothesis. Nec insuper rationum inspici quantitates, puta si fuerit dupla sesquialtera aut quadrupla, &c sed terminorum qualitates nempe basium aut earum dimetiētium, quæ singula & omnia docent proportiones circa species potius quàm circa indiuidua versari: quæ proportiones cùm non per quātitatem rationum expressam, sed per relationem basium vel laterum suorum proportionalium exprimantur. Ipsa proportionalia sua varietate sequentium, falsò argueremus à data antecedentis & consequentis quantitate rationis immobili, vt inde consurgat proportionalium generalium quantitas rationis. Omnes itaque circulos omnibus circulis conferentes, non propositorum inter se tātum, sed quorumuis ad quosuis huiusmodi respectum inquirimus, & quorum respectum non à quibusuis, sed à proprijs oriri dimetientibus iuxta proposita hypothesis authoritatem, haud secus omnes conos omnibus conis collatos, nō quorumuis sed priorum dimetientium tripla coniungi ratione, cuiusquidem rationis non aspectatur quātitas, sed terminorum qualitas, à quibus sumenda proponitur, quales sunt dimetientes, à quorum ratione circulorum, conorum, cylindrorúmque necnon sphærarum nascitur intelligentia.

Demonstrationes igitur hæ ab hoc absurdo educuntur, non quod antecedens aliqua sumpta hypothesi hanc haberet rationem ad consequens, alia verò postmodum sumpta non haberet. id nanque absurdum non pareret, ob hypothesis discrepantiam eidem soli antecedenti adaptatam, quæ facilè opposita parit. Sed quosuis circulos ad quoslibet, siue quosuis conos ad quoslibet (hoc est æquè consequens ad antecedens vt antecedens ad consequens) rationem basium, aut dimetientiū, iuxta hypothesis votum habere, & nō habere, hæc cùm sint in eodem subiecto, hoc est in quibusuis circulis aut conis, opposita ad se inuicem (scilicet cuiusuis ad quemuis circulorū vel conorum) facilè parient absurdum, ac perinde ab hoc per inconueniens demonstratum.

Propositio decimatertia.

Si Cylindrus plano secetur, parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erit cylindrus ad cylindrum, sicut axis ad axem.

Esto Cylindrus A B G D, *cuius axis sit* K X, *bases verò oppositæ sint circuli* A K B *&* G X D, *secetur autem cylindrus* A B G D *plano* I Z T *parallelo oppositis* A K B *&* G X D *planis. Dico esse cylindrũ* A T *ad cylindrum* T G, *sicut* K Z *ad* Z X *axem. Extendatur vtrinsque axis in* L *&* P, *axi autem* Z K *æquales ponantur* K E E L: *ipsi verò* Z X *æquales ponantur quotuis* X M M O O P. *Per signa verò* L E M O P *parallela plana ipsis* A K B *&* G X D *ducantur, per corollarium 15 vndecimi, super quibus planis & centris* L E M O P, *circuli ipsis* A K B *vel* G X D *æquales describantur, extensa circa eos superficie* A N R S *&* G C Q F. *Cylindri itaque erunt* A T A S S R *super æquis parallelis basibus* A K B N E S *&* R L, *ac æquis verticibus* Z K K E E L, *per 18 vndecimi, & constructionem, qui (per 11 huius) æquales erunt, quum æquales sint eorum bases, similes verò, per vigesimam diffinitionem vndecimi. Similiter* I D D C C F F Q *æquales erunt (ex eisdẽ) & similes. Quotuplus igitur erit cylindrus* R T *ipsius* A T, *tam multiplex erit axis* L Z *ipsius* K Z, *sunt enim æquales numero axes & cylindri æquales. Haud secus tam multiplex erit* Q T *cylindrus, ipsius* G T, *quotuplex est* P Z *axis ipsius* X Z. *Si itaque axis* L Z *excedat axem* P Z, *deficiat, vel eidem æquetur, & cylindrus* R T *similiter excedit cylindrum* Q T *deficiet, vel eidem æquabitur, augmenta etenim cylindrorum axium sequũtur augmenta, ex hypothesi. Quatuor igitur magnitudinum* K Z *&* Z X *axium, &* A T T G *cylindrorum, æquemultiplicia primæ* K Z *& tertiæ* A T, *scilicet* L Z *axis, &* R T *cylindrus. Alia quæuis multiplicia secundæ* Z X *& quartæ* T G (*hæc* P Z *axem &* Q T *cylindrum*) *simul excedunt, æquantur, vel deficiũt adinuicem sumpta. Earum igitur simplices* K Z *ad* Z X *axes, erũt vt* A T *ad* T G *cylindri, per quintam diffinitionem quinti. Si itaque cylindrus plano secetur parallelo existente eis quæ ex opposito planis, erit &c.*

Propositio decimaquarta.

In æqualibus basibus existentes Coni & Cylindri, adinuicem sese habẽt sicut fastigia.

Sint super æquis basibus A B E Z *cylindri* A G E C *aut coni* A I B E K Z: *Dico esse* A G *ac* E C *cylindros, aut* A I B *ad* E K Z *conos, sicut* T I *ad* L K *fastigia. Producatur cylindrus* E C *in* N, *extensa in rectum* K L *recta, centro autem* N *circulus ipsi* E L Z *parallelus & æqualis fiat* N M, *recta verò* I T *æqualis sit* L N, *& perficiatur cylindrus* E M: *cylindri itaque* A G *&* E M *æquales erunt, per vndecimam huius, sunt enim sub æqua altitudine* I T *ipsi* L N, *& æquis basibus, ex hypothesi, quoniam autem totus* C E M *cylindrus secatur plano* E L Z *parallelo existente ipsis* K C *&* M N *oppositis. Erit sicut* N L *ad* L K *axes, sic cylindrus* M E *ad* E C *cylindrum, per præfatam. Sed sicut* N L *ad* L K, *sic* I T *ad eandem* L K, *per septimam quinti, & sicut* M E *ad* E C *cylindri, sic* A G *ad eundem* E C, *ex eadem. Sicut igitur (per vndecimam quinti)* I T *ad* L K *fastigia, sic erunt* A G *ad* E C *cylindri. Quia verò* A B I, *&* E K Z *coni eorum cylindrorum sunt tertiæ partes, per decimam huius, ipsi (per 15 quinti) in earum cylindrorum ratione erunt, & proinde sicut* I T *ad* K L *fastigia. In æqualibus igitur basibus existentes coni, &c.*

Propositio decimaquinta.

AEqualium conorum & cylindrorum, reciprocæ sunt bases verticibus, & coni ac cylindri quorum reciprocæ sunt bases verticibus, sunt æquales.

Sint

Sint æquales coni AGL EIN vel cylindri AX EO, sitq; basibus ABGD EZIT, Ipsius autem AGL vel ABGD vertex sit KL, Reliqui verò EO sit MN, basium verò dimetientes sint AG EI. Dico esse reciprocè sicut ABGD ad EZIT bases, sic MN ad KL vertices. Si coni vel cylindri bases æquas habeant, vertices æquos habebunt, per præfatam, cùm sint æquales. Et ideo reciprocè proportionales, nempe in ratione æqualitatis erunt bases, & vertices. Si verò bases aut vertices sint inæquales, & è conuerso reliquorum vertices aut bases inæquales erunt. Nam si æquales essent bases, æquales essent vertices, vt diximus, & è conuerso, per vndecimam huius. Sint ergo inæquales vertices, maior autem sit MN, minor verò KL, cui æqualis ponatur MP per signum CP ducto plano parallelo planis ipsius EO, per corollarium decimæquinta vndecimi. Cylindrus igitur EO parallelo plano CPH secabitur. Quare (per decimamtertiam huius) erunt MN ad MP vertices, vt EO ad EH cylindri. Sed sicut EO ad EH sic AX (ipsi EO æqualis) ad eundem EH, ex septima quinti, sicut verò AX ad EH sic ABGD ad EZIT bases, per vndecimã huius. Sicut igitur MN ad MP, hoc est, ad KL, vertices, sic (per vndecimam quinti) ABGD ad EZIT bases reciprocæ, per secundam diffinitionem sexti. Ad secundam autem, Supponantur bases reciprocæ verticibus: Dico cylindros AX & EO esse æquales. Sint ideo vt ABGD ad EZIT bases, sic vertex MN ad KL, vel MP. Erit basis ABGD ad basim EZIT, sicut cylindrus AX ad cylindrum EH, per vndecimam huius. Sed sicut ABGD ad EZIT bases, sic (ex hypothesi) MN ad KL (hoc est, MP) vertices. Et proinde (per decimamtertiam huius) sic EO vel AX ad EH cylindri. Sicut igitur ABGD ad EZIT bases, sic AX ad EH, Sicque EO ad eundem EH cylindrum. Igitur AX & EO (ad eundem EH eandem rationem habentes) sunt æquales, per nonam quinti, nec non sub eisdem basi & vertice constituti coni. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocè sunt, &c.

Corollarium.

Quoniam exposuimus tantùm conos & cylindros, quorum vertices basibus perpendiculares incidunt. Exponendi sunt reliqui quorum vertices angulos ad bases efficiunt obliquos eisdem vti actionibus ac passionibus quibus præfatos vti hactenus discussimus.

Ex decima huius.

Quoniam diximus decima huius conum cylindri tertiam esse partem, eandem ipsi basim & æquale fastigium habentis, Illúd que demonstratum est proposito cylindro cuius basis secatur per quadratum inscriptum, & super quadrati lateribus descripta Isoscelia triangula poligonum componentia, rursusque sub huius poligoni lateribus alia eadem arte infinitè descripta, plus dimidio basis auferentia, vt frequentius patuit. Et ideo super his basibus solida quæ sub cylindri inclinati altitudine eadem includuntur cylindro, manifestum est plus dimidio cylindri auferre, & reliqui plus dimidio, veluti in rectis cylindris ostendimus. Nam hæc inclinata solida super æquali altitudine, & æquis basibus rectorum, rectis sunt æqualia, per corollarium quadrasimæ vndecimi. Quare similiter plus dimidio tollunt vt recta. Conferentes igitur inclinatum cylindrum, cono super eadem basi & vertice recto, ab impossibili insuper arguentes, per decima huius demonstrationem, ostendemus lateratum inclinanti cylindro inclusum, maius esse triplo, siue pyramidis & eidem æquum, quod fieri non potest. Illúdque erit primæ partis disiunctiua, qua proposuimus cylindrum aut triplo coni maiorem esse, aut minorem, si æqualis non suscipiatur. Secunda vera parte concludemus solidum illud lateratum cylindro conceptum, ipso cylindro maius esse quod rursus absurdius apparebit. Quare si nec triplo coni fuerit cylindrus maior, nec minor, necesse æqualis erit. Horum demonstratio inclinatorum facilè rectorum sequitur demonstrationem, eo quod iam ostensum est pyramides & laterata super æquis basibus & altitudine, siue recta, siue inclinata inuicem esse æqualia, nempe vt bases, per sextam huius. Cylindrus igitur inclinatus triplus erit cuiuslibet coni (licet recti) super eius basi & altitudine constituti, sed eius coni triplus fuit cylindrus rectus, per decimam huius. Cylindrus igitur inclinatus, re-

cto sup[illegible] basi & vertice æquus erit. Idem fit in conis, qui tertiæ sunt partes æqualium & ideo inter se [illegible] erunt.

Ex vndecima huius.

Quare sequetur iuxta vndecimam huius, sub eodem fastigio existentes cylindros ac conos inclinantes aut rectos ad se esse vt bases. Cum enim recti ad se sint vt bases, rectis verò æquales sint inclinati, ipsi ad se erunt vt bases.

Ex duodecima huius.

Et proinde ex duodecima huius, similes coni & cylindri inclinati triplam habent rationem dimetientium quæ in basibus. Cùm æquales sint rectis eam rationem habentibus, per duodecimam huius, Ipsi eandem habebunt, cum maximè æquales habeant bases rectis.

Ex decimatertia huius.

Et ideo sequetur ex decimatertia huius. Cylindrum inclinatum sectum plano parallelo oppositis eius planis, in rationes axium sectum esse. Supponantur autem super eadem basi rectus & inclinatus cylindri, subque eodem vertice, qui secentur plano oppositis parallelo, manifestum erit vnius sectiones alterius sectionibus æquales esse, sunt enim super æquis basibus & vertice, nempe inter parallela plana. Sed & eorum axes proportionaliter secantur à planis, per decimamseptimam huius. Inclinati igitur (rectis æquales) suorum axium rationem veluti recti habebunt. Nam vtraque est eadem axium ratio.

Ex decimaquarta huius.

In æqualibus itaque basibus existentes coni & cylindri inclinati, ad se erunt (ex decimaquarta huius) vt fastigia. Cum enim inclinati rectis eandem basim & fastigium habentibus, sint æquales, Recti verò sunt ad se vt fastigia, Inclinati igitur ad se erunt vt eadem fastigia vtrisque communia.

Ex decimaquinta huius.

Vnde reciprocè erunt æqualium conorum, vel cylindrorum inclinatorum aut rectorum, bases verticibus, & è contrà. Cũ enim sæpius diximus inclinatos & rectos æquales esse, qui easdem habẽt bases & vertices. Cũ igitur recti æquales, suorum verticũ ac basium reciprocã patiantur rationem, Sequetur inclinatos (rectis æquales) suarum basium ac verticum (vtrisque communium) instar rectorum reciprocam rationem habere Similiter si reciprocam habeant eorum vertices & bases rationem, & ipsi æquales erunt, eò quod æquales sint rectis cylindris, super eisdem basibus & vertice, qui quidem inter se sunt æquales, per eandem decimamquintam huius. Suscipiemus itaque ea quæ de conis & cylindris hoc duodecimo discußimus, quorum vertices basibus perpendiculares insistunt, ex conorum & cylindrorum diffinitionibus, æquè intelligi in conis & cylindris, quorum vertices ad basium plana inclinantur, siue obliquos efficiunt angulos. Notabimus tamen huiusmodi conos aut cylindros inclinantes, minimè teretes esse veluti rectos: nam si secentur plano suscipiente verticem eorum ad rectos, hæc sectio non circulum, sed conoydalem figuram in eorum superficie describet, cuius maior dimetiens æqualis erit (in cylindris) dimetienti basis, hoc est, eadem constabit. Necnon in conis eadem quæ in rectis contingent sectis eadem methodo.

Propositio decimasexta.

Binis orbibus circa idem centrum existentibus, in maiori orbe multangulum æquilaterum & parilaterum inscribere, non tangens orbem minorem.

Sunt



Sint duo circuli A B G D *&* Z I T, *circa idem centrum* C *constituti. Sit autem maiori qui sit* A B G D *inscribendum poligonum æquilaterum, & paria numero latera habens, non tangens vero circulum* Z I T *minorem. Sit vtriusque diameter recta* B I D, *Per signum autem* I *ipsi* B D *ad rectos excitetur* A I G *recta, Semicirculus vero* B A D *bifariam secetur, per 30 tertij. Idq; sæpe fiat. Relinquetur magnitudo arcus minor ipso* D A, *per coroll. primæ decimi. Qui esto* D L, *per* L *vero eidem* B D *perpendicularis agatur* L O N, *coniunctis* L D D N *rectis. Quoniam anguli* D O N *&* D O L *sunt recti, ex constructione, recta* B D *secat bifariam rectam* L N M O, *per tertiam tertij. Quare (per 4 primi) reliqua latera triangulorum* D O N D O L, *scilicet* D L D N *erunt æqualia. Si igitur circulo* A B G D *æquales ipsis* D L D N *coaptentur, per primam quarti. Ipsæ conuenient in* B *in numero pariter pari (per 33 noni) æqualésque arcus subtendent, per 28 tertij. Nam secti sunt per numerum à binario duplum, scilicet dimidia sectione frequenter repetita, qua quidem multiplicatum fuit circuli decrementum. Quia vero* L N *est ipsi* A G *parallela, per 28 primi, cùm vtraque sit eidem* B D *perpendicularis, & in eodem circuli plano, per constructionem. Ipsa* L N *non tangit circulum* T I Z. *Minus igitur ipsum circulum* T Z I *tangent rectæ,* D L D N. *Nec proinde reliquæ ipsis æquales, per 14 tertij. Binis itaque orbibus* A B G D *&* Z I T *circa idem centrum* C *existentibus, in maiori orbe* A B G D *multangulum æquilaterum & parilaterum (quod sub* D L D N *& reliquis lateribus ipsis æqualibus, & numero pariter pari constitutis) non tangens orbem minorem* Z I T *inscripsimus.*

Corollarium.

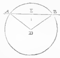
Hinc fit, perpendicularis diametro inter maiorem circulum & rectam tangentem minorem constituta, nullum circulorum tangit.

MONITVM.

Cogimur demonstrationem fusius prosequi Theone, qui primam decimi sat impropriè assumit. Ea namque vltra dimidium excessus tollendos præcipit, quod huic minimè conuenire potest, quæ pares laterum numeros exoptat. Insuper licet in reliquis verum proferat, illud tamen improbatum ex prius demonstratis relinquit, vt breuitati consulat, confusè tamen.

Lemma.

Si Sphæra plana quadam superficie secetur, communis superficierum sectio circũferentia erit circuli.



Sit sphæra A B C *secta plano* A E B, *Centrum verò sphæræ, sit* D, *à signo autem* D *in planum* A E B *perpendicularis agatur* D E, *per vndecimam vndecimi. A signo verò* E *in communem plani & superficiei sphæræ sectionem, per planum* A E B *ducantur quotcunque lineæ* E A E B *coniunctis* D A D B. *Quoniam æquales sunt* D E A D E B *anguli recti (nam* D E *recta est ad planum) Subtendentes eos verò rectæ* D A D B *sunt æquales, ex centro per 12 diffinit. vndecimi. Ipsæ* D A *&* D B *(per 47 primi) possunt rectas* D E E A *&* D E E B *à quibus communis* D E *ablata, reliquas* E B E A *æquales relinquit potentia, quare & longitudine, similiter omnes lineæ ductæ à signo* E *ad lineam vtrasque plani & sphæræ superficies secantem, æquales ostendentur. Illa igitur linea circunferentia erit circuli, per decimamquintam diffinit. primi. Si vero planum per centrum sphæram secuerit, rectæ à centro sphæræ in communem eorum sectionem ductæ, erunt æquales, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Nam ea communis sectio est in superficie sphæræ. Quare quauis arte circulus erit plana superficies ea linea comprehensa, cuius centrum, sphæræ centrum erit.*

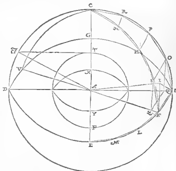
Corollarium.

Inferemus, Si à centro sphæræ æquales perpendiculares agantur in circulos sphæram secantes, ipsos circulos æquales esse, ac demissas perpendiculares in eorum centra cadere sequetur. *Nam ea quæ ex centro sphæræ, semper potest perpendicularem, & eam qua ex contactu in circunferentiam protenditur. Communi igitur ablata perpendiculari, sequetur reliquas quotcunque, inuicem æquas esse. Quare circulos æquales describent per primam diffinit. tertij, & in eorum centra cadunt perpendiculares, per decimamseptimam diffinit. vndecimi, sunt enim conorum axes. In quos verò circulos maiores cadunt perpendiculares, minores erunt circuli. Nam ab eadem potentia quæ ex centro sphæræ, maior perpendicularis ablata potentia, minorem relinquit eius qua ex circuli centro potentiam, & ideo minorem efficit circulum. Si igitur æquales fuerint circuli illi, in eos demissæ perpendiculares æquales erunt. Nam si maiores vel minores essent, circuli inæquales essent, vt patuit quod obstaret hypothesi. Et proinde perpendiculares in bases, omnium dictarum à centro sphæra minimè existunt. Nam singulæ alia eas possunt, & eam quæ a centro circuli secantis sphæram eas iungit.*

Propositio decimaseptima. Problema 2.

Binis sphæris circa idem centrum existẽtibus, in maiori sphæra solidum polyhedrum inscribere, non tangens sphęram minorem in superficie.

Proponantur binæ sphæræ A B D *&* A T F, *circa idem centrum* A *constitutæ, oportet antẽ maiori sphæræ* A B D *inscribere polyhedrũ, non tangens minorem sphæram sua superficie, sint binæ sphære dimetiẽtes* D B *&* G E, *ad rectos sese in* A *centro secantes. Per signa verò* A B D G E *extensum planum, secet sphæras, hæ sphærarũ sectiones circuli erunt, per lemma præfatum, sed & maiores (cùm per centrum ducta sint super maxima dimetiẽte) qui sint* B G D E *&* A X Y. *Minoris autem sphæræ circulum* T F *tangat recta* T Ꝧ, *quæ ad circunferentiam vsque maioris*



sphæra ducatur, coniuncta insuper A Ꝧ. *Diuidatur autem bifariam quadrans* E B, *idque sæpe fiat, relinquetur (per coroll. primæ decimi) arcus minor eo quẽ subtenderet recta* T Ꝧ, *qui sit* B K. *Cùm autem circuli* B C D *&* B E G *sint æquales, per* 1 *diffinitionẽ tertij, coaptentur circulo* B E D *rectæ ipsi* K B *subtensa æquales, per primam quarti, fiet poligonum æquilaterum & parilaterũ, per* 16 *huius, non tangens circulum sphæræ* A T F *minoris, sint itaque eius poligoni latera* B K K L L M M E *in quadrante* A B E: *connectantúrque dimetientes* K A V L A M A *&c. super plano* A D G B E *circuli. Ad signum* A *ipsi plano* A B G D E *perpendicularis excitetur ad superficiem vsque sphæræ maioris, quæ sit recta* A C *per* 12 *vndecimi. Per rectam* A C *ducantur plana sphæram secantia in singulis poligoni* B K L M E *& reliquis sectionibus, illæ quidem sectiones, circuli erunt maiores, nam qui per centrum sphæra per*

præfatum

præfatum lemm. & igitur æquales, per primam diffinitionē tertij. Distribuantur igitur similiter ipsi quadranti ABE, *quadrantes* ACB ACK *horum circulorum, coaptatis (per primam quarti) rectis ipsi* BX *æqualibus, quæ quidem sint* BO OP PR RC *&* XS SH HN NC, *coniungantur insuper* SO HP NR *rectæ. quoniā circuli* ABCD *&* AKCV *ducuntur per rectam* AC, *ipsi ad planum* ABGDE *recti sunt, per decimamoctauam vndecimi, quoniam æqualibus circulis æquales coaptatæ sunt, æquales erunt* SK KB *recta, à signis autem* S *&* O *in planum* BGDE *perpendiculares demittantur* SZ OQ, *per vndecimam vndecimi, ipsæ in rectas* KV BD *cadent, per trigesimamoctauam vndecimi. Triangulorum igitur* SZK *&* OQB *bini anguli binis sunt æquales, scilicet* KZS *ipsi* BQO, *cùm sint recti, &* ZKS *ipsi* QBO, *per vigesimamseptimam tertij, æquales enim subtendunt circunferentias* SCV *&* OCD, *& vnum latus* SK *vni* OB *æquale ostensum, reliqua igitur latera & anguli æqualia erunt, per vigesimamsextam primi, scilicet* SZ *ipsi* OQ *&* ZK *ipsi* QB. *Reliquæ igitur* AZ AQ *rectæ æquales erunt, cùm totæ* AK AB *fuerint æquales, quæ scilicet ex centro. Sicut igitur* AZ *ad* ZK, *sic* AQ *ad* QB, *æquales ad æquales, igitur trianguli* ABK *ipsi* BK *parallela erit* QZ, *per secundam sexti. Cùm autem binæ* SZ OQ *sint eidem plano* BGDE *perpendiculares, ex hypothesi, parallelæ sunt ipsæ* SZ OQ, *per sextam vndecimi. Sed & æquales ostensæ sunt ipsæ* SZ OQ, *rectæ itaque* SO ZQ *ipsas coniungentes, æquales & parallelæ sunt, per trigesimamtertiam primi. Vni verò earum scilicet ipsi* ZQ *parallela est* BK, *& reliquæ igitur* SO *eadem* BK *parallela erit, per nonam vndecimi. Rectilineū igitur* BKOS *in vno erit plano, per septimam vndecimi.*

Similiter ostendemus quadrangula SOPH HPRN *singula in vno esse plano, demissis perpendicularibus in planum* ABGDE, *vt iam diximus. Triangulū verò* NRC *in vno est plano, per 2 vndecimi. Si itaque per signū* C *& singula* LME *signa, quadrantes circulorum sphæram in centro* A *secantiū ducantur, scilicet* ACL ACM ACE, *ac inter eos similiter constituantur planæ per reliquas verò septem sphæræ similes & æquales partes, similis descriptio fiat, componemus solidum polyhedrū præfatis & descriptis planis conclusum, maiori sphæræ* ABGDE *inscriptum, quod quidem non tangere minorem sphæram suæ superficie discutiamus.*

A signo A *in planum* KBOS *perpendicularis agatur* AI, *per vndecimam vndecimi, coniunctis* IK IB *rectis, in ipso plano, recti igitur erunt anguli ipsius* AI *ad rectas* IK IB, *& reliquas ipsam in eo plano tangentes, per secundam diffinitionem vndecimi: nam est* AI *recta ad planum* KBOS. *Quia verò æquales sunt* AK AB, *potest autem* AK *rectas* AI IK, *potest similiter* AB *rectas* AI IB, *sequetur binas* AI IK *potentias, binarum* AI IB *potentiis æquari, communi itaque ablata* AI *supererunt æquales* IK *&* IB *adinuicem potentia, & ideo longitudine, similiter ostendemus rectas* IO IS *super eodem plano ductas, & præfatis & adinuicem esse æquales, nanque ex centro sphæræ subtendunt eas cum recta* AI *veluti ostensum est in rectis* IK IB.

Vt igitur proposito typo demonstremus centro I, *interuallo autem* IB *vel* IK, *&c.*



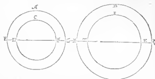
... quadrangulum planum KBOS, cùm autem tres ... quales (vt patuit) SO vero minor ipsis, est enim ... opposita per trigesimamquartam primi, quæ minor est ipsa KB, per secundam sexti, sequetur rectam BK maiorem angulum recto efficere BIK, eo quod tres SK KB BO tres circuli excedant quadrantes, quare singulæ maiorem recto subtendent angulum maior igitur erit BK reliqua IB, per decimãnonã primi, quæ ex centro. Cæterum quia rectus est quilibet angulorum AIB AIK AIS & AIO, quos subtendunt quæ ex cẽtro maioris sphæra scilicet AB vel AK, &c. Subtendit item quæ ex eodẽ centro A & rectum AT & angulum ad tangentem, per decimamoctauam tertij, æquales erunt potentiæ rectarum AI IB, potentiis ipsarum AT T &, per quadragesimamseptimam primi. Maior autem est T & ipsa IB, cùm sit ex hypothesi, maior ipsa KB, quam nuper ipsa IB maiorem ostendimus, reliqua itaque AI reliquam AT excedet potentia, siue igitur longitudine, sed AT est ex centro minoris sphæræ, IV vero (quæ in basim polyhedri perpendicularis) minorem sphæram transgreditur, non ideo tanget polyhedri basis minorem sphæram. minus igitur eandem minorem sphæram tangent reliqua polyhedri bases, cum sint ipsæ KBOS minores. Nam sicut ostensum est rectam SO minorem esse rectã BK, patebit HP minorem esse ipsa SO & NR ipsa HP, & reliquæ quotuis vsque ad C, quare minora efficiunt quadrangula minoribus igitur circulis comprehensa, & proinde a centro sphæræ remotioribus, per corollarium præfati lemmatis. Binis itaque sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyhedrum inscripsimus, non tangens sphæram minorem in superficie.

Corollarium.

Polyhedrum in Sphæra constitutum, ad simile similitérque alij Sphæræ inscriptum, triplam habet rationem quam sphærarum dimetientes. *Nam à centris sphærarum ad similes bases ductæ rectæ, similes concludunt pyramides singulas singulis, quæ cum singulæ singulis similibus alterius sphæræ, triplam habeant rationem similium laterum, quæ sunt sphærarum rectæ, quæ ex centris, per corollarium octauæ huius, Patulum erit (ex duodecima quinti) omnes pyramides vnius sphæræ, ad omnes alterius pyramides similes, eãdem (rectarum scilicet quæ ex centris sphærarũ triplam) habere rationem. quia verò earum quæ ex centris rationem habent dimetientes sphærarum, per 15 quinti, sequetur polyhedra triplam dimetientium suarum sphærarum consequi rationem. Et ideo triplam laterum rationem ac veluti pyramides in eis similes habuerunt.*

Propositio decimaoctaua.

Sphæræ adinuicem in triplici sunt ratione propriorum dimetientium.



Proponãtur binæ sphæræ ABG & DEZ quarum dimetiẽtes sint BG & EZ. Dico sphæram ABG ad sphæram DEZ habere triplam rationem dimetientium BG ad EZ. Quod si non fateamur, habeat aliqua sphærarum scilicet ABG triplam rationem dimetientium BG ad EZ, ad aliam sphærã, quæ prius sit minor reliqua DEZ, ea scilicet ITK, quæ ipsi DEZ concentrica statuatur, ipsi verò DEZ polyhedrum inscribatur non tangens sphæram ITK minorem, per præfatam polyhedro verò ipsius DEZ simile similitérque positum supponatur sphæræ ABG inscriptum, quoniam sphæra ABG ad sphæram ITK triplam habet (ex hypothesi) rationem, rectarum BG ad EZ, sed triplam quam BG ad EZ habet polyhedrũ ipsius ABG ad polyhedrum ipsius DEZ per corollarium præfatum. Sicut igitur sphæra ABG ad sphæram ITK, sic erit (per vndecimam quinti) polyhedrum spæhræ ABG, ad polyhedrum sphæræ DEZ. Vicissim igitur sicut sphæra ABG ad polyhedrum ipsius ABG, sic sphæra ITK ad polyhedrum sphere DEZ, sed sphæra ABG maior est polyhedro sibi inscripto. Sphæra igitur ITK (per 14 quinti) maior erit polyhedro ipsius DEZ eandem ITK sphæram continente, quod fieri non potest. Non igitur habet aliqua earum sphærarum triplam rationem dimetientium

ad

ad min[illegible] Dico præterea neque ad maiore[illegible] quod si fieri posset, habeat [illegible] ad maiorem [illegible] ad I T K, *triplam rationẽ dia[illegible]* B G *ad* T K *quarti[illegible] mi-nor ipsa* D E Z. *Erit (per 14 quinti) sicut* D E Z *ad* A B G, *sic* I T K *ad aliam sphæram [illegible]* G, *quæ ideo sit* C H F *ipsi* A B G *concẽtrica. Erit igitur (per corollarium quartæ quinti) [illegible] sicut* E H I *ad* I T K. *Inscribatur itaque ipsi* A B G *polyhedrum non tangẽs sphæram* C H F, *per præ[illegible] cui simile supponatur sphæræ* I T K *inscriptum. Cum* A B G *&* D E Z *sphæræ triplam habeant rationem quam* B G *ad* T K, *ex hypothesi, eãdem autem habent polyhedra ipsis* A B G *&* I T K *similiter inscripta per corollarium præfatum, scilicet triplam ipsarum* B G *&* T K. *Sicut igitur sunt sphæræ* A B G *ad* D E Z, *sic polyhedrum sphæræ* A B G *ad polyhedrum sphæræ* I T K, *sed sicut* A B G *ad* D E Z *sphæræ sic sunt* C H F *ad* I T K *per constructionem. Sicut igitur (per vndecimam quinti)* C H F *ad* I T K *sphæræ, sic quæ in* A B G *& in* I T K *polyhedra erunt. Vicissim igitur (per 16 quinti) sicut* C H F *spæhra ad polyhedrũ sphæræ* A B G *sic* I T K *sphæra ad polyhedrum in ipsa* I T K *inscriptum. Minor autem est* C H F *sphæra polyhedro in* A B G *eam continente: minor itaque erit* I T K *sphæra polyhedro ipsi* I T K *inscripto, per 14 quinti, quod fieri non potest. Nulla igitur sphæra triplã dimetientium rationem habebit, ad aliquam reliqua data maiorem sed neque ad minorem, vt ostendimus eam igitur habebit ad æqualem, siue ad eandem reliquam, per septimam quinti. Sphæræ ideo adinuicem, &c.*

Corollarium.

Hinc fit sphæras adinuicem esse sicut polyhedra similia similitérque in ipsis descripta, scilicet in tripla dimetientium ratione vtraque.

Propositio decimanona.

Si Sphæra planum tangat, à centro in contactum demissa, perpẽdicularis erit plano.

Proponatur sphæra B C D L, *cuius centrum sit* A, *tãgat autem sphæram planum* G C I *in signo* C, *à cẽtro verò* A *in* C *demittatur* A C: *Dico* A C *perpendicularem esse plano* G I C, *secetur sphæra planis per rectã* L A C *ductis, qui sint* A B C D L, A F C E L, *quæ secent planum* G C I *per rectas* G C H *&* K C I, *circuli igitur erunt bina sphæræ sectiones (per lemma 16 huius) sub communi dimetiẽte* L A C *constituti. Per planum igitur* G C I *ductæ* G C H K C I *rectæ ad signum* C, *extra circulos* B C D L F C D L *cadunt. Ipsæ igitur circulos in* C *tangunt, per secundam diffinitionem tertij: recta igitur* L A C *ad ipsas* G C H K C I *rectos efficit angulos, per 18 tertij, & igitur ad ipsarum planum* G C I *angulos rectos efficiet, per quartam vndecimi recta* A C. *Si itaque sphæra planum tangat, à centro autem in contactum &c.*

L
B F A E D
G
K C I
H

MONITVM.

Hanc duodecimo ideo addidimus de sphæris dicenti, ad futurarum demonstrationum libri decimi quinti facilitatẽ, cuiusquidẽ omnes inscriptiones absoluere freti, huius obsequio ac lemmatis 16 huius, demissarum à centris regularẽ concludemus angulorum ac subtensarum habitudinem.

LIBRI DVODECIMI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM RESTITUTARUM Liber decimustertius.

Propositio prima.

SI recta linea extrema & media ratione secetur, maius segmentum assumens totius dimidiam, quintuplum potest eius quod ex totius dimidia.

Recta namque A B *sit extrema & media ratione secta in* G, *maius autem eius segmentum* A G *assumat dimidiam totius* A B, *eáque esto* D A: *Dico totam* G D (*ex maiori segmento & dimidia totius cõpositam*) *quintuplum posse quadrati* D A, *quæ est dimidia totius* A B. *Ex* A B *fiat quadratum* A K E B, *ex* G D *verò fiat* G D L Z, *productis* Z G *in* I *&* K A *in* C. *Sit autem dimetiens quadrati* G L *recta* D Z, *perficiaturq́; quadratum ex* D A *ducta per* T *parallela ipsi* D A G. *Quoniã quadrata sunt* A E D T, *& dupla* A B *ipsius* D A (*ex hypothesi*) *quadruplum erit* A E *ipsius* D T, *per vigesimam sexti quia verò dupla est* A K (*rectæ* A B *æqualis*) *ipsius* A T, *quæ rectæ* A D *æquatur, duplum erit* (*per primam sexti*) A I *ipsius* T G: *sed* T G *æquũ est reliquo* L T *supplemento, per quadragesimamtertiam primi. Binis itaque* L T T G *æquum erit* A I *quia verò tota* A B *extrema & media ratione secatur, quod sub tota* A B *&* G B (*hoc est rectangulum* G E) *æquum est, quadrato reliqui segmenti* A G *scilicet ipsi* T Z, *per decimamseptimam sexti, nam tres sunt* A B A G G B *proportionales, per tertiam diffinitionem sexti. Totum igitur* A E *æquum erit toti gnomoni* L T T Z T G, *quadruplum vero fuit quadrati* D T *ipsum* A E. *Gnomon itaque* L T T Z T G *quadrati* D T *quadruplus erit, & proinde totum* D Z *quadratum ex* D G, *quintuplũ erit quadrati* D T, *quod fit ex dimidia ipsius* A B *scilicet* D A. *Si igitur recta linea extrema & media ratione, &c.*

Propositio secunda.

Si recta linea suiipsius segmenti quintuplum potuerit, duplæ prædicti segmenti extrema & media ratione diffectæ maius segmentũ, reliqua est pars eius quę in principio rectæ lineæ.

Possit recta A B *quintuplum suiipsius segmenti* A G, *dupla autem ipsius* A G *extrema & media ratione secetur. Dico maius segmentum esse* B G *duplæ ipsius* A G, *esto dupla ipsius* A G *recta* G D. *Describantur autem ex ipsa* A B *quadratum* A C Z B, *cuius dimetiens sit* A Z, *ex* G D *verò quadratum* G D I K, *perficiatúrque quadratum ex* A G *ducta per* T *parallela ipsi* A B, *productisque in rectum* K G L *&* Z B E *rectis, quoniam enim* A B *quintuplum potest ipsius* A G, *quadratum* C B *quintuplũ erit quadrati* A T, *ex hypothesi. Reliquus itaque gnomon* C T T Z T B *quadruplus erit quadrati* A T, *sed quadrati* A T *quadruplum est* G I, *per vigesimam sexti. Nam dupla supponitur* D G *ipsius* A G, *ipsi igitur* C T T Z T B *gnomoni, æquum est quadratum* G I, *quia vero* K G G T *æquales sunt rectis* D G G A, *eorundem quadratorum lateribus,*

dupla

dupla erit E G *ipsius* G T, *& ideo (per primam sexti) duplum erit* G E *ipsius* T E, *ipsi vero* T E *æquum est* C T, *per quadragesimamtertiam primi. Binis itaque* C T T E *æquum erit* G E, *reliquum igitur* E I *reliquo* T Z *æquum erit, per tertiam communem sententiam. Atqui* T Z *quadratum est ipsius* G E, *circa dimetientem* A T Z, *per vigesimamquartam sexti, rectangulum vero* E I *est sub binis* G D D E, *quia* D I *&* G D *sunt æquales. quod igitur sub* G D D E, *reperitur æquum esse quadrato ipsius* G E. *Tres igitur* G D G E *&* D E *sunt proportionales, per secundam partem decimæseptimæ sexti, secta est igitur* G D *in* E *extrema & media ratione, per tertiam diffinitionem sexti, quia verò maior est tota* G D *prima, sua parte* G E *secunda, &* G E, *igitur reliqua* E D *maior erit, ipsius itaque* G D *(duplæ rectæ* A G) *maius erit segmentum* G E. *Si igitur recta linea sui ipsius segmenti quintuplum potuerit, duplæ autem, &c.*

Propositio tertia.

Si recta linea extrema & media ratione secetur, minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti. Quintuplum potest eius quod à media maioris segmenti fit quadrati.

Esto recta A B *extrema & media ratione secta in* G, *cuius quidem maius segmentum* A G *bifariam in signo* D *sectum sit: Dico minus segmentum* G B *vnà cū* D G *dimidia maioris, quintuplum posse eius quod ex* G D. *Describatur ex* A B *quadratum* A B E C, *secentúrque similiter ipsi* B A *rectæ* A C B E E C, *per decimā sexti, in signis* R T M N S L, *quoniā æqualia sunt totius* A E *latera, æqualia erunt earum segmenta. Iungantur ideo rectæ* G S D L R M T N *præfatis lateribus parallelæ, quoniam extrema & media ratione secta est* A B, *minus verò segmentum est* G B *(vel* B M) *maius verò* A G *(vel* R S) *rectangulum* A M *sub tota & minori, æquum erit quadrato maioris ipsi scilicet* R S, *per trigesimam sexti. cùm autem æquales sint (per constructionem)* A D D G, *æqualia erunt (per primā sexti)* A I I G *sed & (per 43 primi)* I G *ipsi* M Z *supplemento, ipsa itaque* A I M Z *æqualia erunt. Aequus igitur erit* I G M Z *gnomon ipsi* A M, *sed ipsi* A M *æquū fuit quadratum* R S. *Ipsa igitur* R S *&* I G M Z *gnomon, æqualia erunt, est autem* R S *quadruplum quadrati* I Z, *cùm bifariam secta sint latera ipsius* R S *similiter ipsi* A G, *ex hypothesi. Quadruplus igitur erit* I G M Z *gnomon quadrati* I Z, *cui additum idem* I Z, *totum ideo* B K *quadratum ex* B D *quintuplum erit quadrati* I Z, *hoc est ipsius* D G *mediæ maioris segmenti* A G. *Minus itaque segmentum* B G *vnà cum* D G *dimidiæ maioris* A G, *quintuplum potest eius quod ex* D G *maioris segmenti dimidia. Si igitur recta linea extrema, &c.*

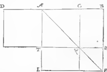
Propositio quarta.

Si recta linea extrema & media ratione secetur, quæ ex tota & ex minori segmento bina quadrata, tripla sunt eius quod à maiori segmento fit quadrato.

Secetur extrema & media ratione rectæ A B, *cuius maius segmentum sit* A G: *Dico quadrata ex* A B *&* B G *simul sumpta, tripla esse quadrati quod fit ex* A G *maiori segmento, fiat ex* A B *quadratum* A B E D. *Ipsi verò* A B *similiter secetur* D A *in* T, *per decimam sexti, ducantur per signa* G *&* T *parallelæ lateribus quadrati* A E, *rectæ* G Z I T Z K, *coniuncta dimetiente* B Z D. *quoniam secta est* A B *extrema & media ratione, quod sub* A B B G *extremis rectangulum* A K, *æquū est quadrato* T I *quod à media* A G *per 17 sexti, quia verò æqualia sunt supplemēta* A Z Z E, *per 43 primi communi addito* G K, *æqualia erunt* A K G E *ædinuicem, & igitur ipsi* T I *quadrato æqualia erunt singula* A K G E. *Totum igitur* A E *(quod ex* A B) *cum quadrato* G K *(quod ex* B G) *triplū erit quadrati* T I, *quod ex* A G *maiori segmento, nam in conferendis rectangulis* A K E G *quadratum* G K *bis sumitur. Si itaque recta linea extrema & media ratione secta fuerit, &c.*

Propositio quinta.

Si recta linea extrema & media ratione secetur, apponatúrque eidem æqualis maiori segmēto, tota recta linea extrema & media ratione secatur, & maius segmentum est ea quæ in principio recta linea.



Recta A B *extrema & media ratione secetur, cuius maius segmentum esto* A G. *Ipsi verò* A G *in rectum æqualis apponatur* A D. *Dico totam* B D *extrema & media ratione secari in* A, *maiusque eius segmētum esse ipsam* A B *quæ in principio posita est, fiat ex* A B *quadratum* A E, *ex* A D *vero quadratum* D T, *ipsi autem* A B *similiter secetur* B E *in* K, *sintq́; per signa* G *&* K *parallelæ,* G Z K Z T *quadrati lateribus, quoniam extrema & media ratione secatur* A B *in* G, *quod sub* A B B G *(hoc est* G E*) æquum est ipsi* A Z *quadrato quod ex* A G, *per 17 sexti, eidem autē* G E, *æquum est* T E. *Nam supplementa* G K Z L *sunt æqualia, per 43 primi. ipsum igitur* T E *quadrato* A Z *æquum est, sed* A Z *&* D T *(per primam sexti) sunt æqualia, ipsi igitur* D T *æquum est* T E, *commune addatur* A K, *æquum erit ideo rectāgulum* D K *quadrato* B L, *sed rectangulum* D K *fit sub tota* D B *&* D A, *hoc est,* B K *sibi æquali, quadratum enim est* D T. *quadratum verò* B L *fit ex reliquo segmento* A B, *per constructionē. Tres itaque rectæ* B D B A A D *sunt proportionales, per 17 sexti. Sicut igitur tota* B D *ad maius* B A, *sic idem* B A *maius ad* A D *minus segmentum. tota igitur* B D *extrema & media ratione secatur, per tertiam diffinitionem sexti, & eius maius segmētum est* A B *quæ in principio recta linea. Si igitur recta linea, &c.*

MONITVM.

Proponit Theon post hanc quintam quasdam diffinitiones, quibus quid sit resolutio priori, quid autem sit compositio posteriori enunciat, vt demum quinque præfatarum demonstrationum ita peruertat ordinem, quo supposita propositionis conclusione argumentum quo conclusa fuit probet priori argumento quod resolutionem vocat, subsequenti autem argumentum supponit, vt propositum concludat. quæ cùm nihil ad Euclidis elementa conferre percipiamus, eò quòd maximè nihil vltra propositum ostendant, data opera ob componendum omisimus, & modici aut nullius momēti ea fuisse arbitrati sumus.

Propositio sexta.

Si recta linea certa extrema & media ratione secta fuerit, vtrumque segmentorum incerta est, eáque appellatur Apotome.

D A G B

Exponatur certa recta A B *extrema & media ratione secta in* G, *Maius verò eius segmentum sit* A G *Dico ipsorum* A G *&* G B *vtrumque segmentorum, rectam incertam esse, eámque vocari apotomen. Addatur ipsi* A B *recta* D A *in rectum, æqualis dimidiæ ipsius* A B, *Certa erit* D A *dimidia totius* A B, *per sextā diffinitionem decimi. Quia verò (ex prima huius)* G D *quintuplum potest rectæ* D A, *recta* G D *rectæ* D A *potentia commensurabilis erit, per sextam decimi, habent enim numerorum rationem earum potentiæ. Cum autem habeant rationem quam quinque ad vnum (vel 20 ad 4) non quadrati ad quadratum, Ipsæ quadratorum rationem non habent, per coroll. 25 octaui. Quare recta* G D *potentia tantùm est ipsi* D A *commensurabilis, per nonam decimi, eò quòd sint longitudine incommensurabiles. Quare à certa* G D *aufertur certa* D A *potentia tantùm toti* G D *commensurabilis. Reliqua itaque* A G *est apotome, per septuagesimamtertiam decimi. Quia insuper recta* A B *extrema & media ratione secatur, quod ex* A G *æquum est ei quod sub* A B B G, *per decimamseptimā sexti. Sequetur itaque*

que quod ex apotome A G *ad certam propositam* A B *comparatum, latitudinem efficere* G B. *Qua igitur* G B *(per nonagesimamseptimam decimi) prima erit apotome. Rectæ ideo* A B *certa vtraque sectio, apotome erit, scilicet* A G *&* G B. *Si itaque recta linea extrema & media, &c.*

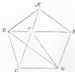
Corollarium.

Hinc fit, Si maius segmentum fuerit certa linea, minus apotome esse.

Vt si recta A B C *maius segmentum* A B *bifariam secetur in* D, *Recta* D C *quintuplum potest rectæ* B D, *per tertiam huius. Quia vero* B D *(certæ proposita* A B *dimidia) certa est, per sextam diffinitionem decimi. Ipsi verò* B D *commensurabilis (scilicet quintupla) potentia est* D C. *Ipsa igitur* D C *certa erit, per eandem diffinit. Cùm autem potentia* D C *&* D B *non habeant rationem quadratorum, ipsæ longitudine incommensurabiles (ex nona decimi) erunt, & igitur potentia tantùm commensurabiles. Reliqua igitur* B C *minus segmentum totius* A C, *est (per 73 decimi) apotome. Poterat breuius demonstrari, sed hac demonstratione fusius patebit linearum natura.*

Propositio septima.

Si quinquanguli æquilateri tres anguli, ordinatim aut non ordinatim æquales fuerint, æquiangulum erit ipsum quinquangulum.



Quinquanguli A B G D E *sint æqualia latera, & tres eius quilibet anguli. Sint prius ordinatim qui ad* A B G, *productis* A G B E B D *rectis: Dico æquiangulum fore ipsum* A B G D E *quinquangulum. Quoniam anguli qui ad* A B G *sunt æquales, & circum eos æqualia latera, bases quoque* B E B D A G *sunt æquales, per quartam primi. Et proinde anguli* A E B *&* G D B *erunt (per octauam primi) æquales. Quia verò rectæ* E D B E *sunt æquales ostensæ, anguli* B E D B D E *sunt (per quintam primi) æquales. Totus igitur* A E D *toti* G D E *æquus erit, per 2 commu. senten. Cùm autem æquales sint* B A G A B E *anguli (per 8 primi) trianguli* A B C *bina* A C C E *latera æqualia erunt, per sextam primi. Reliqua itaque* C B C G *æquales erunt, per tertiam commun. sentent. Triangulorum igitur* C G D *&* D E C *bina latera* C G G D, *binis* C E E D *æqualia sunt, & basis communis* C D. *Anguli itaque* C G D *&* C E D *æquales erunt, per octauam primi, sed æquales sunt (per eandē)* A G B *&* B E A, *totus igitur* B G D *toti* A E D *æquus erit. Sed ipsi* A E D *æquus fuit* E D G. *Ipsi verò* B G D *reliqui* B A E A B G. *Omnes igitur quinquanguli* A B G D E *anguli sunt æquales, Sed iam non ordinatim. Sint æquales anguli* A G D, *Quoniam anguli qui ad* A *&* G *sunt æquales, & æquis lateribus (ex hypothesi) comprehensi, bases* B E *&* B D *& anguli* B E A B G D *æquales erunt, per quartam primi. Sed Isosceles* B E D *anguli* B E D B D E *sunt (per quintam primi) æquales. Totus itaque* A E D *toti* G D E *æquus erit. Sed ipsi* G D E *æquus fuit* B A E, *per hypothesim. Tres itaque quinquanguli* A B G D E *anguli qui ad* A E D *ordinatim sunt æquales. Omnes igitur (ex prima parte) æquales erunt. Si igitur quinquanguli æquilateri tres anguli, &c.*

Propositio octaua.

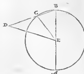
Si quinquanguli æquilateri & æquianguli binos ordinatim angulos rectæ lineæ subtendant, extrema & media ratione sese inuicem diuidunt, & maiora earum segmenta ipsius quinquanguli lateri sunt æqualia.



Sit pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B G D E, *subtendant autem binos eius proximos angulos (qui ad* A *&* B*) rectæ* A G B E, *sese secantes in* T: *Dico rectas* A G *&* B E *se extrema & media ratione secare inuicem, & maiora earum segmenta lateribus quinquanguli æqualia esse, pentagono* A B G D E *circũscribatur circulus, per decimamquartam quarti, quoniam anguli qui ad* A *&* B *sunt æquales, & æquis lateribus comprehẽsi, bases* A G *&* B E *æquales erunt, per quartam primi, ac reliqui anguli* B A G *ipsi* A E B *&* A B E *ipsi* B G A *æquales. Triangulorũ igitur* A B T *&* B E A *bini anguli binis sunt æquales, scilicet* B A T *ipsi* B E A, *&* A B T *communis, reliqui itaque* B T A *&* B A E *erunt (per corollarium trigesimæsecũdæ primi) æquales, nempe residui duorum rectorum. Proportionalia itaque sunt eorum latera circum æquales angulos,* B E *ad* B A *sicut* B A *ad* B T, *per quartam sexti. Cum autem isosceles sit triãgulũ* A B T, *similis nanque ipsi* B E A, *& exterior angulus* A T E *binis interioribus (quæ ad basim scilicet* T B A *&* T A B) *sit æqualis, per trigesimamsecundam primi. Duplus verò sit* G A E *angulus ipsius* B A G, *per trigesimamtertiam sexti, nam dupla est* G D E *circunferentia ipsius* B G, *duplus erit igitur* T A E *angulus ipsius* B A T *anguli, cuius* B A T *duplus fuit* A T E *exterior nam bini interiores ad basim* B A *sunt et æquales, per quintam primi. Recta igitur* T E *æqualis erit ipsi* A E *æquum angulum subtendenti, per sextam primi, & proinde ipsi* B A *ac reliquis pentagoni lateribus æqualis erit ipsa* T E, *fuit autem* B E *ad* B A *sicut* B A *ad* B T. *erit igitur sicut tota* B E *ad* E T *(æqualem ipsi* B A*) sic* E T *ad* B T, *per septimam quinti. Maior autem est* B E *tota ipsa* E T, *maior itaque erit* E T *ipsa* T B, *secta igitur est* B E *in* T *extrema ac media ratione, per secundam diffinitionem sexti, cùm autem æquales sint* B E *&* A G, *à quibus æquales tolluntur* B T T A. *Reliquæ igitur* T E *&* T G *æquales erunt. Binæ igitur* A G B E *(binos angulos proximos subtendentes) sese in* T *extrema & media ratione secant adinuicem, & ipsius pentagoni lateribus sunt æquales. Si igitur quinquanguli, æquilateri, & æquianguli binos ordinatim &c.*

Propositio nona.

Si exagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptorum componantur, tota recta extrema & media ratione secatur, & maius segmentum est ipsius exagoni latus.



Proponatur circulus A G B, *in eo verò descriptarum figurarum, latus quidem decagoni sit* B G, *latus verò exagoni, sit* G D, *sint autem in rectam* B G G D: *Dico ipsam* B D *extrema & media ratione sectam esse in* G, *maius verò eius segmentum esse* G D *exagoni latus, sit centrum circuli* A B G *signum* E, *per primam tertij, dimetiens verò* A E B, *iunganturq;* E G E D *rectæ, quoniam* B G *latus est decagoni, arcus* B G *quarta pars erit arcus* G A *& proinde angulus* G E A *quadruplus erit anguli* B E G, *per trigesimãtertiam sexti, sed &* G E A *binis interioribus* E G B E B G *(per trigesimamsecundam primi) est æqualis. Igitur bini quadruplum ipsius* B E G *efficiunt, cùm autem* E G B E B G *sint (per quintam primi) æquales, nam binæ* E B E G *sunt ex cẽtro, singuli eorum scilicet* E G B *vel* E B G *dupli erunt, ipsius* B E G *quia verò* G D *est latus exagoni, ipsa æqualis erit ei quæ ex centro* G E, *per corollarium decimæquintæ quarti, quare anguli* G D E G E D *(per quintam primi) erunt æquales. Atqui ipsis æquus est exterior* B G E, *per trigesimamsecundam primi. Angulus igitur* B G E *duplus est anguli* G D E: *sed & idem* B G E *duplus fuit ipsius* G E B, *ipsi itaque* B D E *&* G E B *anguli sunt æquales, communis verò est* G B E, *reliquus igitur* D E B *reliquo* B G E *æquus erit, per trigesimamsecundam primi. Triangulorum igitur* B D E B E G *æquiangulorum proportionalia sunt (per quartam sexti) latera* D B *ad* B E *sicut* B E *ad* B G, *æqualis autem est recta* B E *quæ ex centro ipsi* G D, *vt patuit. Sicut igitur tota* D B *ad* D G *æqualem ipsi* B E, *sic eadem* D G *ad* G B, *maior autem est tota* D B *ipsa* D G. *maior igitur erit (per decimamquartam quinti)* D G *ipsa* G B: *totius igitur* D B *extrema & media ratione secta in* G, *maius segmentum fuit* D G *exagoni latus, minus verò* G B *decagoni eidem circulo inscriptorum. Si itaque exagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum, &c.*

Coroll

Corollarium.

Hinc ſequitur lateris exagoni extrema & media ratione ſecti, maius ſegmentum eſſe latus decagoni, eidem circulo inſcriptorum. *Si enim a recta* D G *ſecetur æqualis ipſi* G B, *dicemus eſſe ſicut tota* D E *ad totam* D G, *ablatam* D G *ad ablatam* G B, *erit igitur (ex decimanona quinti) reliqua ad reliquam, ſicut tota ad totam. Quare ſimiliter ſecta erit* D G *ipſi* D B, *media & extrema ratione, per tertiam diffinitionem ſexti, &c.*

Propoſitio decima.

Si in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum fuerit, ipſius quinquanguli latus poteſt & exagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum.

Deſcribatur in circulo A G D *quinquãgulum* A B G D E *æquilaterum, cuius vnum latus ſit* A B: *Dico* A B *poſſe latus exagoni & decagoni in eo circulo deſcriptorum. Sumatur (per 1 tertij) cẽtrum circuli* A G D *ſitq̃;* Z, *connexis autem* Z B *& diametro* A Z L *demittatur in rectã* B A *perpendicularis, quæ ſit* Z T K *ductis* B K K A *à rectis, rurſus fiat perpẽdicularis à ſigno* Z *in rectã* A K, *quæ ſit* Z I *pducta in* M, *ſecet rectam* B A *in* N *coniuncta* K N *quoniã recta* A L *ſecat biſariam circulum* A G D, *per 17 diffinitionem primi, & æquales rectæ* A B B G, *rectis* A E E D *æquales arcus auferunt, per 28 tertij, reliqui* G L L D *erunt æquales, cùm autem (per tertiã tertij) æquales ſint* B T T A, *communis verò* T Z, *& anguli ad* T *recti, reliqui* A Z K B Z K *(per 4 primi) æquales erunt, ideo (per 26 tertij) æquales erunt arcus* A K K B, *quare & æquales erunt arcus* A K *&* G L, *æqualiũ* D G *&* A B *dimidij, & proinde ſubtenſæ* A K K B, *erunt latera decagoni quia verò perpendicularis eſt* Z I *ad* A K, *ſimiliter æquales erũt rectæ* A I I K, *& arcus* A M M K, *cum autem æquales ſint arcus* G L K A, *duplus erit* G L *ipſius* K M, *necnõ* B G *ipſius* B K *arcus. Totus itaque* B G L *totius* M K B *duplus erit, angulus igitur* L Z B *anguli* B Z M *duplus erit, per 33 ſexti. Sed idem* L Z B *angulus anguli* Z A B *duplus eſt, per 20 tertij. Aequales itaq; ſunt* Z A B *&* N Z B, *eiuſdem dimidij. Triangulorum ideo* A B Z *&* B N Z *bini anguli* B A Z *&* B Z N *ſunt æquales, communis verò* N B Z. *Reliqui itaque* A Z B Z N B *erunt æquales (nempe duorum rectorum reſidui, per coroll. 32 primi) æquiangula igitur erũt* A Z B B Z N *triãgula, & proinde erit (per 4 ſexti)* A B *ad* B Z *ſicut* Z B *ad* B N. *Quod itaque ſub* A B B N, *æquum erit ei quod ex* B Z, *per 17 ſexti. Cæterùm quia* A I I K *rectæ ſunt æquales, angulos verò æquales ad communem* I N *efficiant, triangula* A I N *&* K I N *æqualia erũt, & æquiangula, per 4 primi, æqualis itaque erit* A N *ipſi* N K, *& idcirco (ex quinta primi) anguli* N A K N K A *æquales erunt, ſimiliter &* K A B *ipſi* K B A, *& (per primam communem ſententiam)* K B A *ipſi* N K A, *reliquus igitur* B K A *reliquo* K N A *æquus erit, æquiangula itaque erunt* A K B *&* A N K *triangula, erit igitur (per quartam ſexti)* B A *ad* K A, *ſicut* K A *ad* A N. *Quod igitur ſub* B A A N *æquũ erit quadrato* A K, *lateris quidẽ decagoni per 17 ſexti. Patuit autẽ quod ſub* B A B N *æquum eſſe ei quod ex* B Z, *quod per corol. 15 quarti, eſt latus exagoni. Sed quod ex* B A *latere pẽtagoni, æquũ eſt binis ſcilicet ei quod ſub* A B B N *& ſub* B A A N *per 2 ſecundi. Latus igitur pentagoni* A B *poteſt ipſas* B Z *&* A K *(ea quæ ſub* A B B N *& ſub* B A A N *potens) latera quidem exagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. Si itaque in circulo quinquangulum æquilaterum deſcriptum, &c.*

Corollarium.

Perpendicularis in baſim pentagoni per centrum trãſit. *Nam recta* A L *per cẽtrum* Z *ducta biſariam ſecat arcum* G D, *vt patuit. Anguli igitur* G Z L *&* D Z L *æquales erunt, per 26 tertij, & æquis lateribus comprehenſi, baſes ideo æquales erunt, per quartam primi. Secta eſt igitur* G D *biſariã. & ideo ad rectos (per tertiam tertij) à recta* A Z L *perpendiculari.*

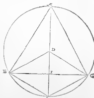
Propoſitio vndecima.

Si in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum inſcribatur, eius latus incerta eſt, eáque appellatur Minor.

Esto circulus A G D *habens diametrum certam, illi circulo inscribatur quinquãgulum æquilaterum* A B G D E. *Dico eius quinquãgulæ latus esse lineã incertam, quæ dicitur minor. Sit ipsius circuli centrum* Z *per primam tertij, dimetientes verò sunt* A Z I B Z T. *A semidiametro* Z T, *quarta pars auferatur* Z K, *per nonam sexti, similiter ab ipsa* G A *quarta* G C. *Ipsa igitur* Z K *simul ac tota* B K *certæ erunt, per sextam diffinitionem decimi. A binis autem semicirculis* A B G I *&* A E I D *æquales arcus tollantur* A B G *&* A E D, *per 28 tertij, reliqui itaque* G I *&* I D *sunt æquales, si verò supponamus triangulum* A D G, *is bina latera* A G A D *æqualia habebit, per vigesimamnonam tertij, & angulos* G A I D A I *æquales, per vigesimamseptimam tertij, & latus* A L *commune. Bases igitur* G L L D *(per quartam primi) æquales erunt, & dupla ideo* G D *rectæ* G L. *Similiter cum* A B B M *binis* G B B M *sint æquales. Et anguli* A B T G B T *æquales, per 27 tertij, bases* A M M G *(per eandem quartam primi) æquales erunt. Et proinde* A G *dupla ipsius* M G *erit. Quoniam enim triangulorum* A Z M A G L *angulus* G A L *est communis, rectus autem fuit* A M Z, *Nam* B M *ad rectos cadit. Rectus item* A L G, *per tertiam tertij. Reliqui itaque* A Z M *&* A G L *æquales erunt per coroll. 32 primi, nempe duorum rectorum residui. Ipsorum igitur* A Z M *&* A G L *proportionalia erunt, per quartam sexti, latera* L G *ad* G A *sicut* M Z *ad* Z A. *Et vicißim (per 16 quinti) sicut* L G *ad* M Z, *sic* G A *ad* Z A. *Sed sicut* G A *ad* Z A *sic (per decimamquintam quinti) erunt earum quartæ partes, scilicet* G C *ad* Z K. *Sicut igitur (per vndecimam quinti)* L G *ad* M Z *sic erit* G C *ad* Z K, *vicißim itaque (per 16 quinti) erit* L G *ad* G C *sic* M Z *ad* Z K. *Quare (per 15 quinti) erit sicut* M Z *ad* Z K *sic* G D *(dupla ipsius* G L*) ad* G M, *duplam ipsius* G C. *Quia verò est* M Z *ad* Z K *sicut* G D *ad* G M, *erit componendo (per 18 quinti)* G D G M *simul ad* G M, *sicut tota* M K *ad* Z K. *Et ideo (per 22 sexti) quod ex* G D G M *simul sumptis, ad quod ex* G M *erit, vt quod ex* M K *ad quod ex* Z K. *Cùm autem rectæ* G A *extrema & media ratione sectæ, maius segmentum sit* G D *pentagoni latus, per 8 huius. Sequetur (ex prima huius)* G D *maius cum* G M *(dimidia totius) rectas simul sumptas, quintuplum posse eius quod fit ex* G M *dimidia totius. Quintuplum igitur erit quod ex* M K *eius quod ex* Z K. *Nam fuit ex* G D G M *ad quod ex* G M, *sicut quod ex* M K *ad quod ex* Z K. *Recta itaque* M K *certa erit, per sextam diffinitionem decimi, potest enim quintuplum certæ* Z K. *Quoniam autem posuimus* Z K *quartam esse, ipsius* B Z *vel* A Z *semidiametri, quintupla erit* B K *ipsius* Z K, *& ideo qualium* Z K *potest vnam aream earum poterit* B K *viginti quinque. Sed qualium* Z K *potuit vnam, earum* M K *potuit quinque. Qualium itaque* B K *potuit vigintiquinque, earum potuit* M K *quinque. Quintuplum igitur poterit* B K *ipsius* M K, *quæ quidem* B K *&* M K *cum iam ostensæ sint certa, nempe rationem numerorum potentia habentes. Ipsæ potentia commensurabiles erunt certæ propositæ* Z K. *Sed & inter se potentia tantùm, cùm habeant rationem quadrati 25 ad non quadratum quinque, quæ non est quadratorum ratio, per coroll. 25 octaui. Et proinde latera* B K *&* K M *longitudine incommensurabilia, per nonam decimi. Certæ ideo potentia tantùm commensurabiles sunt* B K *&* K M. *Reliqua igitur* B M *apotome erit, per 73 decimi, congruens verò sola* M K, *per 79 decimi. Poßit autem tota* B K *maius congruente* M K, *eò quod ex* N. *Quia verò qualium potentia* B K *fuit quinque, earum* M K *fuit vnius. Ipsa itaque* N *excessus, earum poterit 4 quarum* B K *potuit quinque,* M K *verò vnum. Excessus igitur* N *toti* B K *longitudine incommensurabilis erit, per nonam decimi, cùm habeant rationem quadrati 4 ad non quadratum 5, & ideo non quam quadrati habent, per coroll. 25 octaui. Tota igitur* B K *maius potest congruente* M K, *eò quòd fit à sibi longitudine incommẽsurabili. Sed tota* B K *exposita certæ (scilicet diametro* B T*) longitudine fuit cõmensurabilis, per sextam decimi. Cùm ipsius* B T *quinque octauas sumpserit, per constructionem, & ideo rationem habeant numerorũ. Recta igitur* B M *apotome erit quarta, per quartam apotomarum diffinit. Si autem area comprehendatur sub certa* B T *& apotome quarta* B M, *hanc aream potens vocatur minor, per 94 decimi. Quia verò trianguli* A B T *rectãguli (per 31 tertij) in basim* B T *demissa perpendicularis* A M, *efficit (per coroll. 8 sexti) latus* A B *quod ad segmentum* B M *medium proportionale, inter totam* B T *& ipsam* B M. *Sequetur quadratum quod ex* A B *(latere pentagoni) æquum esse (per 17 sexti) ei quod sub extremis* B T *certa &* B M *apotome quarta. Illud igitur quadratum potens* A B *latus pentagoni, vocatur minor, per eandem 94 decimi. Si igitur in circulo certam habente diametrum quinquangulum æquilaterum, &c.*

Propositio duodecima.

Si in circulo triangulum æquilaterum descriptum fuerit, ipsius trianguli latus potentia triplum est eius quæ ex centro circuli.



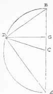
In circulo A B E G *triangulum æquilaterum descriptum sit* A B G: *Dico trianguli* A B G *latus, potentia triplum esse eius quæ ex centro circuli* A B G E. *Sit (per primam tertij) centrum* D *circuli* A B E G, *producta* A D *in* E, *coniunctáque recta* B E. *Quoniam dimetiens* A E *bifariam secat circulum, æquales erunt arcus* B E *&* E G. *Nam æqualium* A B A G *sunt residui. Recta igitur* B E *sextam subtendit circuli partem, & proinde ei quæ ex centro est æqualis, per coroll. decimæquinta quarti. Sed* A E *dimetiens (ipsius ideo* B E *dupla) quadruplum eius potest, per vigesimam sexti. Hoc autem quadruplum possunt binæ* A B B E, *per 47 primi. Binæ igitur* A B B E *quadruplum possunt eius quod ex* B E. *Ablato itaque ipsius* B E *quadrato, reliquum* A B *trianguli latus, triplum potest rectæ* B E, *siue eius quæ ex centro sibi æqualis. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum, &c.*

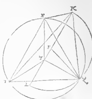
Corollarium.

Hinc sequitur, latus trianguli secare bifariã eam quæ à cẽtro sibi perpendicularis ad circunferentiam ducitur. *Cũ enim triangula* B D G B E G *sint (ex octaua primi) æquiangula, anguli* D B I E B I *erunt æquales, & ideo (per quartam primi)* D I I E *bases, æquales erunt. Præterea trianguli æquilateri latus, potentia sesquitertium est eius quæ ab vno angulorum in latus oppositum perpendicularis cadit, nam qualium* A B *est potentia 12 earum* B I *(dimidia) erit trium. Reliquæ igitur* A I *earundem partium erit 9, cùm binæ* A I B I *(per 47 primi) ipsam* A B *possint, quæ quidem potentia 12 est ipsius 9, sesquitertia, cæterũ trianguli latus media est proportionalis inter dimetiẽtem & perpendicularem, scilicet* A E *ad* A B *vt* A B *ad* A I, *ex coroll. 8 sexti. Et insuper quæ ab angulo perpendicularis, basim bifariam secat, & per centrum transit: nam si alia duceretur ab* A *in* I *recta, quam ea quæ per* D *ducitur, binæ rectæ superficiem concluderent, contra 12 comm. sentent. quod fieri non potest. Quare sequitur oppositum, quæ scilicet per centrum transit, perpendicularis est basi, per tertiam tertij.*

Propositio decimatertia. *Problema 1.*

Pyramidem trilateram & ęquilateram constituere, & data Sphæra comprehendere, & demonstrare, quod ipsius sphærę dimetiens potentia sesquialter est lateris ipsius Pyramidis.





Data sphæra sit ea quæ sub dimetiente A B, *ipsi verò* A B *centro* C *semicirculus describatur* A D B, *coniuncta* C D, *ab ipsa porrò* A B *tertia pars abscindatur (per nonam sexti) sitq́;* G B, *ipsi item* A B *à signo* G *ad rectos excitetur recta* D G, *coniunctis* A D D B. *Ponatur autem rectæ* G D *æqualis* T E, *centro verò* T *interuallo* T E *circulus* E Z I *fiat, cui circulo triangulum æquilaterum inscribatur (per secundam quarti)* E I Z, *productis* T E T Z T I. *Ad signũ*

insuper T ad rectos excitetur plano E Z I T, recta T K, per duodecimã vndecimi, quæ æqualis abscindatur ipsi G A coniunctis K I K E K Z, producta verò K T in rectum, ipsi G B æqualis ponatur T L, cùm enim recta T K sit ad planum E Z I T recta, rectos efficiet ad ipsas T E T I T Z angulos, per secundam diffinitionem vndecimi, cùm autem triangulorum K T Z & A G D bina latera K T T Z, binis A G G D sint æqualia, & æquos (nempe rectos) contineant angulos, per constructionẽ, æqualia erunt ipsa K T Z & A G D triangula (per quartam primi) & æquiangula. Similiter triangula K T E & K T I eisdem A G D, & proinde adinuicem erunt æqualia & æquiangula, bases verò K E K I K Z A D (per quartam primi) æquales erit igitur trilatera pyramis E Z I K, dico quod æquilatera, cùm ab angulo recto A D B in basim A B perpendicularis agatur D G, similia erunt (per octauam sexti) A B D A D G D B G triangula. Erit igitur A B ad D B sicut D B ad G B, sicut itaque A B ad G B, sic quod ex A B ad quod ex D B, per corollarium vigesimæ sexti, tripla autem est A B ipsius B G, triplum igitur erit quadratũ ex A B ad quod ex D B quia rursus ex similitudine triangulorum est A B ad B D sicut A D ad D G, erit (per vigesimamsecundam sexti) sicut quod ex A B ad id quod ex D B, sic quod ex A D ad id quod ex D G: triplum autem fuit quadratum A B quadrati D B, triplum igitur erit quadratum A D quadrati D G, quia verò æqualis est K Z ipsi A D & T Z ipsi G D, triplum erit quadratum ipsius K Z quadrati T Z, sed eiusdem T Z quadrati triplum potest E Z, per duodecimam huius, æqualis igitur erit E Z ipsi K Z, & proinde reliqua K I K E E I Z I pyramidis E Z I K latera, ipsis & adinuicem erunt æqualia, pyramidem itaque construximus æquilateram E Z I K. Cæterũ si æqualibus positis K T & A G æquales posita addãtur T L & G B, tota K L toti A T æqualis erit. Secetur bifariam K L in F, cùm æquales sint K F & A C, per septimam comm. sentent. reliqua F T ipsi C G erit æqualis. Triangula igitur F T Z & C G D duo latera duobus circũ æquales angulos D G C & Z T F rectos æqualia habent, bases igitur F Z & C D æquales habebunt, per quartam primi, eodem patebit argumento eandem C D æqualem esse eis quæ signa E F & I F coniungerẽt, illæ etenim æquos & æquis lateribus comprehensos (ipsi F T Z) comprehendunt angulos, recta verò C D ipsi A C (quæ ex centro) æqualis est, quare recta F Z ipsi F K æqualis erit similiter & ipsis F E F I F L, centro igitur F, interuallo verò F K vel F Z semicirculus K Z L fiat, quo circunducto manente dimetiente K L, quoad vnde cæpit redeat, describetur sphæra circa F centrum, per duodecimam diffinitionem vndecimi, tangẽs singulos pyramidis quæ ad K E I Z angulos, nam illi ipsius sphæra semidiametro F K à centro sphæræ æquè distant, vt patuit. Pyramidem igitur trilateram ac æquilateram data sphæra cuius dimetiẽs est K L, vel A B, inscripsimus hanc E Z I K, quod autem eius dimetiens K L sit potentia sesquialter lateris K Z ipsius pyramidis patet, ostensum est quadratum D B tertiam esse partem quadrati A B, reliquæ verò duæ tertiæ eiusdem ex A B sunt in quadrato A D, per quadragesimamseptimam primi. Nam A B binas A D D B potest, sesquialterum itaque erit quadratum A B quadrati A D, & proinde K L sphæra dimetiens ipsi A B æqualis, similiter sesquialterum poterit ipsius K Z lateris pyramidis ipsi A D æqualis. Pyramidem igitur trilateram & æquilateram constituimus, & data, &c.

Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ quadruplum sesquialterum potest eius quæ ex centro circuli basim Pyramidis continentis. *Cum ostensum sit dimetientem K L sesquialterum posse lateris E Z & ostensum sit insuper latus E Z triplum posse eius T E (quæ ex centro circuli) triangulũ E Z I ambientis, ex 12 huius, relinquetur ostensum (per quintam diffinitionẽ sexti) rationem K L & T E extremarũ, ex quantitatibus rationum mediarũ scilicet* $1\frac{1}{2}$ *per 3 inter se multiplicatarum* $4\frac{1}{2}$ *componere, quæ est ipsius A B ad T E ratio quadrupla sesquialtera potentia.*

Corollarium secundum.

Et insuper ab angulo Pyramidis per centrum Sphæræ in basim oppositam demissa, ipsi basi

vnica

vnica perpendicularis erit, & in cētrum circuli basim continentis cadet. *Nā si alia (ab ipsa K F T per centrum sphæræ in centrum circuli ducta) angulos rectos ad basis planum efficeret, ab eodem signo duæ rectæ eidem plano ad rectos constituerentur, contra decimātertiā vndecimi, quod fieri non potest. Si verò alia à vertice K ad basis centrum T non per centrum F duci posse credatur, binæ rectæ superficiem concludent, quod erit absurdum, contra 12 communē sententiam. Ea igitur quæ per centrum sphæræ ducitur in centrum basis, vnica perpendicularis erit. Quæ verò in centrum basis ab angulo perpendicularis erit, per centrum sphæræ transibit.*

Corollarium tertium.

Præterea perpendicularis à cētro Sphæræ in basim Pyramidis, æqualis est sextæ parti dimetientis Sphæræ. *Vt patuit C G sextam partem ipsius A B æquam fuisse ipsi F T, centra sphæræ, & basis coniungenti.*

Propositio decimaquarta. *Problema 2.*

Octahedrum constituere, eadémque Sphæra, qua pyramidem comprehendere, & ostendere quod ipsius Sphęræ dimetiens potentia lateris ipsius Octahedri duplus est.

Esto propositæ sphæræ præfatæ dimetiēs A B, centrum verò G, super A B autem semicirculus fiat A D B, excitetúrque ipsi A B perpendicularis D G, coniūcta D B, cui æqualis ponatur E T ex E T verò quadratum fiat E Z I T, per 46 primi, cuius dimetiētes sint E I T Z, sese in K secantes, quæ itaque bifariam sese secabunt, per corollarium 34 primi. Plano autem E Z I T ad signum K recta excitetur K L, æqualis rectæ D G, per duodecimum vndecimi. Producta autē L K in M, æqualis fiat K M ipsi K L, vel G D, quæ ex centro sphæræ. Cùm autem æquales sint rectæ K E K T K I K Z, & earum bases E T T I I Z Z E æquales, nempe quadrati latera, anguli rectarum E I T Z (quæ ad K) æquales erunt, per 8 primi, & recti, per decimam eiusdē diffinitionē. Recta igitur E T (per 47 primi) potest ipsarum E K vel K T singularum duplum. Sed D B (æqualis ipsi E T posita) duplum potest rectæ D G quæ ex centro, per eandem 47 primi, cum rectus sit angulus D G B, ex hypothesi, ipsi igitur D G quæ ex centro æquales erunt K E K I. Et proinde K I K Z, sed & æquales positæ sunt eidem D G rectæ L K K M, rectos angulos ad ipsas E I T Z facientes ad signum K, per secundam diffinitionem vndecimi. Recti igitur erunt omnes anguli quos efficiunt ad K rectæ E I T Z L M, sed æquis lateribus comprehensi, scilicet K E K I K T K Z K L K M, vt patuit. Eos itaque angulos æquales bases L E L T L I L Z ad aliásque partes M E M T M I M Z subtendent, per quartam primi, simulac quadrati latera eosdem angulos subtendentia (scilicet E T T I I Z Z E) reliquis æqualia erunt, ex eadem quarta primi. Aequilatera igitur & æqualia erunt (ex eadem) triangula L E T L T I L I Z L Z E, K E T K T I K I Z K Z E adinuicem, quare octahedrum erit E Z I T L M, per 22 diffinitionem vndecimi. Cùm autem Z T sit æqualis dimetiēti A B nempe dupla earum quæ ex centro G D, vel G B, super ipsa Z T semicirculus per signa T I Z ductus, manente recta Z T circumductus, quoad vnde cœpit redeat, sphæram describet (per 12 diffinitionē vndecimi) angulos E Z I T L M octahedri sua superficie tangentem, eò quòd æquè distent a centro K, interuallo ipsius D G quæ ex centro, vt fuit ostensum. Sphæra igitur cuius dimetiens fuit A B, vel Z T sibi æqualis, octahedrum E Z I T L M comprehendimus. Quod autem eius sphæræ dimetiēs Z T duplum possit lateris ipsius octahedri, indicat 47 primi. Nam rectæ E Z E T rectū quadrati E Z I T angulum Z E T comprehēdentes, sunt æquales, illas autem potest subtendens Z T. Ipsa igitur Z T singularum duplum poterit, & ideo reliquæ ipsi Z T æquales dimetientes, reliquorum laterum ipsi E Z æqualium du-

plum poterunt. Octahedrum itaque construximus, eadémque sphæra qua pyramidem comprehendimus, & ostendimus, &c.

Corollarium primum.

Pyramidis latus potentia sesquitertium est lateris Octahedri eidem Sphæræ inscripti. *Cùm enim dimetiens duplum possit lateris octahedri, qualium dimetiens potest 6 earum potest latus octahedri 3, sed qualium dimetiens fuit 6, earũ fuit latus pyramidis 4 potentia, per 13 huius. Qualium igitur pyramidis latus potuit 4, earum latus octahedri potuit 3.*

Corollarium secundum.

Octahedrum in binas Pyramides æquas & similes diuiditur. *Harum communes bases sunt super quolibet quadrato a lateribus octahedri comprehenso, ad quod conueniunt octahedri octo triangula, quæ igitur pyramides (per octauam diffinitionem undecimi) æquales erunt & similes. Præfatum verò commune quadratum, dimidium est potentiæ dimetientis sphæræ, cùm sit quadratum lateris octahedri.*

Corollarium tertium.

Præterea inferemus tres Octahedri dimetientes ad rectos se bifariam in centro Sphæræ id continentis secare. *Vt patuit in signo* K A C *eiusdem sphæra esse dimetientes.*

Propositio decimaquinta. *Problema 3.*

Cubum construere, & data Sphæra qua priora comprehẽdere, ostenderéque quod ipsius Sphæræ dimetiens potentia triplus est lateris cubi.

Esto data præcedentibus theorematis sphæræ dimetiens A B, *centrum vero* C, *super quo semicirculus fiat* A D B, *à dimetiente* A B *tertia pars secetur* B G, *per nonam sexti. Ipsi item* A B *ad signum* G *perpendicularis excitetur* D G, *per undecimam primi, coniunctis* D A D C D B. *Rectæ quidem* D B *æqualis ponatur* Z I. *Ex* Z I *quadratum describatur* E Z I T, *super signis verò* E Z I T *perpendiculares plano* E Z I T *ipsi* Z I *æquales excitẽtur* E K Z H I M T N, *coniunctis* K H H M M N N K, *quæ ipsi* Z I *et reliquis æquales erunt (per trigesimamtertiam primi) & parallelæ. Et insuper angulos æquos suscipient, per decimam undecimi, qui ideo recti erunt, cùm quadratum sit* E Z I T, *& reliqua igitur bases quadrata erunt. Cubus igitur erit* E Z I T K H M N *solidũ sub sex quadratis æqualibus comprehensum, per 21 diffinitionem undecimi. Per apposita igitur cubi latera* K E *&* M I *planum extendatur* K E I M, *per alia rursus* N T *&* H Z *aliud planum* H Z T N. *Cùm horum planorum singula, solidum bifariam secent, scilicet in bina Prismata æqua & similia (per 8 diffinitionẽ undecimi) ipsa igitur plana per centrum illud secabunt, per corollarium trigesimæ nonæ undecimi. Communis igitur eorum planorum sectio in centrum cadet quæ sit* L F. *Quoniam planorum* K E I M *&* H Z T N *latera* H N *&* K M *bifariam sese secant, per corollarium 34 primi, similiter &* Z T E I. *Per has itaque sectiones ducitur communis secans* L F, *bifariam diuidens plana* H E I M *&* H Z T N *per primam sexti, super æquis basibus & eodem vertice cubi, quare ipsa* L F *suorum planorum dimetientes bifariam secabit, per corollarium trigesimumquartum primi, scilicet rectas* K I E N Z N H T *cubi dimetientes. Ad signum igitur idem conuenient sese secantes, sit itaque illud* O. *Aequales igitur*

erunt

erunt rectæ OK OE OI OM OH OZ OT *&* ON, *per ſeptimam communem ſententiam, cum ſint æqualium & ſimilium rectangulorum dimetientium dimidia. Centro igitur* O, *interuallo autem aliqua earum* OE *vel* OK *&c. extenſa ſphæræ ſuperficies, ſingulos cubi angulos, qui ſcilicet ad* E Z I T K H M N *ſuſcipiet, per duodecimam diffinitionem vndecimi, cum omnes a ſigno* O *ad angulos cubi ductæ ſint æquales, Cæterum recta* EI *binas poteſt* EZ *&* ZI *æquales, per quadrageſimamſeptimam primi. Duplum igitur poteſt* EI *ipſius* ZI *quia vero* KI *angulum rectum ſubtendit* KEI, *eo quod* KE *ſit recta ad planum rectarum* EZ ET, *per quartam vndecimi, cum quadratæ ſint cubi baſes, rectæ* KI *poteſt ipſam* EI *ac inſuper* KE *æqualem ipſi* ZI, *quare recta* KI *triplum ipſius* ZI *poterit, ſed rectæ* ZI *æqualis eſt* DB *recta, cuius triplum potuit dimetiens* AB, *per decimatertia huius demonſtrata, ipſæ itaque* KI *&* DB *dimetientes, erunt æquales. Cubum igitur construximus* KI, *& data ſphæra cuius dimetiens* AB *comprehendimus, eadem qua & priora ſolida. Oſtendimusq́ quod ipſius ſphæræ dimetiens* KI *vel* AB, *potentia tripla fuit lateris cubi, ſcilicet* DB *vel* ZI.

Corollarium primum.

Sequitur inde, ſphæræ dimetientem poſſe & pyramidis & cubi ſibi inſcriptorum latera. *Nam pyramidis potentia lateris, ipſius dimetientis duo tertia ſibi (per decimamtertiam huius) ſumit, Cubi verò lateris potentia (ex hac) vnum tertium dimetientis eiuſdem ſumit. Pyramidis itaque & cubi latera poteſt ſphæra dimetiens.*

Corollarium ſecundum.

Cubi omnes dimetientes & ſinguli ſeſe in centro ſphæræ cubum continentis bifariam ſecant. *Ac inſuper rectas centra baſium oppoſitarum coniungentes bifariam ſecant in eodem ſigno, vt oſtendit recta* LOF. *Nam anguli* LKO *&* FIO *ſunt æquales, per vigeſimãnonam primi, & æquis lateribus* LK *ipſi* FI *&* KO *ipſi* IO *oſtenſis comprehenſi, baſes igitur* LO FO *æquales erunt, per quartam primi. Similiter oſtendentur reliqua centra baſium cubi oppoſitarum iungentes, bifariam ſecari in ipſo centro* O.

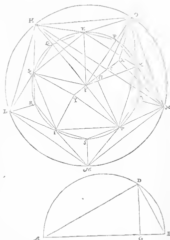
MONITVM.

Huius demonſtrationem aliam conſtruximus, vt inde proximum eliceremus corollarium, futuris admodum decimiquinti ſolidorum inſcriptionibus vtil eperficiendis.

Propoſitio decimaſexta. *Problema 4.*

Icoſahedrum conſtruere & data Sphæra comprehendere, qua & dictas figuras, oſtendeiéque quod ipſius Icoſahedri latus incerta linea eſt, eáque appellatur Minor.

Proponatur datæ prioris ſphæra diameter AB, *à quo quinta pars (per nonam ſexti) abſcindatur* GB, *ſuper* AB *verò ſemicirculus fiat* ADB, *ipſiq́*, AB *ad ſignum* G *perpendicularis excitetur* DG *coniunctis* DA DB *rectis. Recta verò* DB *æqualis ponatur* EF, *centro autem* F *interuallo* E *circulus deſignetur* EIV, *in quo (per vndecimam quarti) pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribatur* EZITK *ſecentur verò (per trigeſimam tertij) bifariam circunferentiæ* EZ ZI IT TK KE *in* QRSVP, *coniunctæ igitur* EQ QZ ZR EP PK *& reliquæ, erunt latera decagoni circulo* EIV *inſcripti. Ab ipſius circuli plano, à ſignis verò* QRSVPF *perpendiculares excitentur (per duodecimam vndecimi)* QH RL SM VN PO FC, *quæ ſecentur æquales ei quæ ex centro* EF *vel* DB, *ipſæ itaque (per ſextam vndecimi) parallelæ erunt, & æquales. Erunt itaque coniũgentes rectæ* CH CO CN *necnon* CM *&* CL *æquales, & parallelæ erunt rectis* FQ FP FV FS *&* FR. *Parallela igitur ſunt per ipſas plana* EZITK *&* HLMNO, *per decimamquintam vndecimi. Centro igitur* C *interuallo* CO *vel* CH *circulus per* HLMNO *ducetur, qui æqualis erit circulo* EIV. *Nam quæ ex centro* FQ *&* CH *fuerunt æquales, coniunctæ igitur* HL LM MN NO OH *pentagonum conſtituet, cu-*



ius latera lateribus ipsius EZITK *sunt æqualia, per vigesimamnonã tertij, singula etenim bina decagoni subtendunt latera, vel quintam partem æqualium circulorum. A signis autẽ superioribus scilicet* HLMNO, *ducantur subtendentes* HE HZ LZ LI MI MT NT NK OK OE *angulos rectos, qui sub perpendicularibus* HQ OP LR *cum reliquis, & lateribus decagoni* RZ QEP, *&c. Cũ autem perpendiculares* HQOPLR *&c. posita sint ei quæ ex centro* FE *æquales, ipsæ lateri exagoni ei circulo inscripti æquantur, per corollarium decimæquintæ quarti. Quare rectæ* HE HZ OE OK (*subtendentes ipsarum perpendicularium cum decagoni lateribus angulos rectos*) *ipsas poterunt, per quadragesimã septimam primi, sed decagoni & exagoni latera, potest latus pentagoni* (ZE *vel* HO) *eidẽ circulo inscripti per decimam huius. Ipsæ itaque subtendentes* HE HZ OE OK KN, *&c. idem potentes ipsis pentagoni lateribus* EZITK *vel* HLMNO *æquales erunt. Et proinde æquilatera erunt, ex ipsis triangula* HZE EOH OEK KNO NKT TNM MTI IML LIZ ZLH *numero decem. Rursus producatur recta* FC *ad vtrasque partes in* Y *&* X, *secentur autem æquales lateri decagoni* QE, *rectæ* FY *&* CX, *quia recta* XY *ad planum* EZITK *recta fuit, ipsa ad reliquum* HLMNO *recta erit, per corollarium decimæquartæ vndecimi. Coniuncta itaque* XO XN XM *& reliqua* YZ YI YT *subtendunt eam quæ ex centro* CO *& latus decagoni* CX, *quæ proinde* (*per quartam primi*) *æquales erunt ipsæ* XO XN XM *& reliquæ lateri pentagoni, easdem rectas subtendenti, per decimam huius, quare triangula ex binis illis rectis* XO XN *& latere pentagoni* ON *& reliqua* XNM XML XLH *&* XHO *sunt æquilatera, quæ quidem sunt quinque numero similiter eisdem æquilatera ostendentur reliqua opposita à vertice* Y *ad bases pentagoni* EZITK *ducta, quæ itaque viginti æqualia & æquilatera triangula solidum componentia erunt, & ideo solidum illud Icosaedrum dicetur, per vigesimamquartam diffinitionem vndecimi, vt autem illud priorum sphæra concipi doceamus, cuius scilicet dimetiens fuit* AB, *secetur bifariam* FC *in* & *coniunctis* &H &Y, *quoniam* FX *recta componitur ex* FC (*quæ æquatur lateri exagoni scilicet ei quæ ex centro* FE) *&* CX *lateri decagoni, ipsa extrema & media ratione secatur in* C, *& maius segmentum est* FC, *per nonam huius. Si igitur minus* CX *& maioris* FC *dimidia* &C *componantur, tota* &X *quintuplum potest eius quod ex* &C, *per tertiam huius, sed quia* FC *&* CH *positæ sunt æquales, ei quæ ex centro, recta* HC *quadruplum poterit rectæ* &C *dimidiæ, per vigesimam sexti, atqui ipsas* HC &C *rectum angulum comprehendentes subtendit* &H, *& proinde illas potest, per quadragesimamseptimam primi, recta igitur* &H *quintuplum poterit rectæ* &C, *quare æquales erunt* &H *&* &X *eiusdem* &C *quintuplum potentes. Similiter ostẽdemus ipsis* &H &X *æquales esse, reliquas à signo* & *ad reliquos angulos* LM

NO,

NO, subtendunt enim rectos angulos ab ipsa C & & eis quae ex centro comprehensos sed qu[illegible] aequalis est F &, similiter recta ad reliquum planum E Z I T K, eadem T & cum reliquis qua ex [illegible] in angulos reliquos E Z I T K, subtendent angulos rectos sub recta F & (ipsi & C aequali) & rectis F T F K F E, &c. quae ex centro (reliquis C H C O aequalibus) comprehensos. Aequales igitur erunt rectae & T & K & E & Z & I rectis & H & L & M & N & O, quibus aequalis ostēsa est & X dimidia totius X Y, reliqua itaque & Y eisdem aequalis erit si igitur centro & interuallo autem altera quadam harum, sphaerae superficies extēdatur, ipsa icosahedri duodecim tanget angulōs, E Z I T K H L M N O X Y, quae describetur ducto semicirculo, (super dimetiente X Y facto) manente recta X Y quoad vnde caepit redeat, per duodecimam diffinitionem vndecimi. Caeterum quia patuit rectam & X quintuplum posse rectae & C, sequetur totam X Y quintuplum posse totius F C, per decimamquintam quinti, sunt enim dupla, & ideo quintuplum recta F E, qua ex centro ipsi F C aequalis, necnon ipsius D B eisdem aequalis quintuplum poterit igitur ipsa X Y, cùm autem media sit D B, quae ad segmentum G B, inter A B & G B, per corollarium octauae sexti, erit sicut A B ad B G, sic quod à prima A B ad quod ex secunda D B, per corollarium vigesimae sexti, quintupla autem fuit A B ipsius B G, ex hypothesi, quintuplum igitur erit quod ex A B dimetiente sphaerae, eius quod ex D B aequali lateri icosahedri, sed eiusdem quintuplum fuit X Y sphaerae dimetiens, ipsae igitur A B & X Y sphaerarum dimetientes aequales erunt, in data igitur sphaera, ex dimetiēte A B icosahedrum depinximus, quod autem icosahedri praefati latus sit minor, patet, cum certa sit A B dimetiens, quae quidem quintuplum potest ipsius D B siue ipsius E F quae ex centro circuli E Z I T K, certa erit E F, per sextam diffinitionem decimi. Eius itaque E F dupla (dimetiens circuli E Z I T K) certa erit, per eandem. Pentagoni igitur latus eidem circulo inscripti incerta erit, vocata verò minor, per vndecimam huius, eius autem pentagoni & icosahedri idem ostensum fuit esse latus, icosahedri itaque latus incerta erit appellata minor. Icosahedrum igitur construximus, & data sphaera comprehendimus, &c.

Corollarium primum.

Hinc fit dimetientem sphaerae Icosahedrum continentis, quintuplum posse eius quae ex centro circuli quinque Icosahedri angulos tangentis. *Insuper eandem diametrum Y X componi ex latere exagoni F C & binis decagoni F Y C X eidem circulo inscriptorum. Nam quintuplum potuit X Y dimetiens ipsius F C, et quae ex centro (scilicet F L) aequalis.*

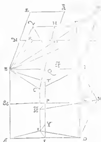
Corollarium secundum.

Icosahedri latera opposita sunt parallela. *Nam sphaerae dimetientes in oppositos Icosahedri cadunt angulos, vt patuit in recta Y X. Si itaque binae dimetientes H T & O I ducantur, ipsae in centro F concurrent. Quare rectae H O T I eas iungentes in eodem sunt plano, per secundam vndecimi. Quia verò ad dimetientes angulos aequales efficiunt, per octauam primi, scilicet triangula ex aequis semidimetientibus & latere Icosahedri. Ipsa latera H O T I parallela erunt (per 28 primi.)*

Propositio decimaseptima. Problema 5.

Dodecahedrum construere, & data sphaera comprehendere, qua & praedictas figuras, ostenderéque quod dodecahedri latus incerta est linea, éaque appellatur Apotome.

Proponantur binae praefati cubi bases, hoc est, duo quadrata A B G D & E B G Z sese in communi sectione B G secantia ad rectos, iuxta ipsius cubi naturam. Diuidantur singula eorū in quatuor quadrata, ductis rectis eorum latera bifariam secantibus, scilicet Q L & K Q ā N X, quae quidem in centris ipsarum basium bifariam se secabunt, per coroll. 34 primi, scilicet in P & O. Secentur autem extrema & media ratione hae quatuor rectae P Q P L O N O X in T Y R S, per trigesimam sexti, maiora autem segmenta sint ad O & P. A signis autem R O S plano E B G Z rectae excitentur R V O H S F, per duodecimam vndecimi. A signis verò T P Y plano A B G D similiter excitentur rectae T C P ſt Y I. Quae quidem R V O H S F T C P ſt Y I aequales ponantur singulae ipsi O R vel O S, coniunctis H Q Q C & B C C G G F F V V B. Dico pentagonum B C G F V esse in eodem plano aequilate-



rum æquiangulum, & insuper basim dodecahedri eadem sphæra qua reliquæ figuræ comprehensi eius vero latus F V esse apotomen. Ad primum itaque quod B C G F V in eodem sit plano. Cum rectæ R V S F sint ad idem planū perpendiculares, ipsæ parallelæ erunt, per sextam vndecimi, sunt autem æquales positæ Rectæ igitur R S & V F æquales & parallelæ erunt, per trigesimātertiam primi. Similiter æquales & parallelæ erunt T Y & C I. Ipsi autem R S parallela est B G, per constructionem. Eidem igitur B G parallela erit V F, per nonam vndecimi. Rectæ igitur B V F G ipsas coniungentes in eodem ipsarum plano erunt, per septimam vndecimi. Trapezium itaque B V F G in vno est plano. Reliquum vero B C G in vno est plano, per secundam huius, vt autem pateat B G F V & B C G in eodem esse plano, ostendamus rectas H Q Q C in rectum positas esse. Cum rectæ R V O H S F sint æquales & parallelæ, æquales erunt V H H F ipsis R O O S æqualibus, per trigesimamtertiam primi, & ideo adinuicem, & proinde æquales maiori segmento sectarū N O P Q, &c. ex hypothesi. Quia igitur æquales sunt O H T C, per hypothesim, maiori segmento O R. Est autem minus segmentum T Q dimidij lateris cubi P Q, sicut itaque tota O Q (dimidium cubi latus) ad C T maius segmentum, sic erit O H maius eiusdem segmentum, ad T Q minus, per tertiam diffinitionem sexti. Triangulorum igitur H O Q & Q T C bina latera O Q Q T angulum componunt, in duabus cubi basibus existentia, binis aliis triangulorum lateribus reciproca scilicet O Q ad C T vt O H ad Q T. Et insuper sunt eisdem parallela, scilicet O Q ipsi C T, per sextam vndecimi. Nam sunt ad idem planum A B G D rectæ, & similiter O H ipsi T Q, cùm sint rectæ ad reliquum E B G Z. Reliqua igitur triangulorum latera H Q Q C in rectam lineam erunt, per trigesimamsecundam sexti. Si igitur ducatur recta B H triangulum erit B C H, quod itaque in vno erit plano, per secundam vndecimi. Et proinde totum B C G F V pentagonum in vno est plano. Quòd autem sit æquilaterum doceamus. Cum enim binæ B N N R binis B Q Q T sint æquales, nempe tota & minora segmenta, & angulos rectos comprehendant, scilicet quadratorum B O & B P, bases B R & B T (per quartam primi) æquales erunt. Quia vero B R B T sunt æquales, & binæ R V T C (maiora segmenta) æquales. Et anguli B R V B T C recti, ex hypòthesi, bases B V B C (per eandem quartam primi) æquales erunt. Similiter ostendentur reliquæ coniunctis G T vel Z S rectis, æquales esse, F G G C ipsis B V B C. Quòd autem F V reliquis sit æqualis, patet cum B N sit æqualis toti N O sectæ, quadrata totius B N & minoris segmēti N R, tripla sunt quadrati maioris segmenti R O, per quartam huius. Eiusdem quadrati R O proinde triplum erit quod ex B R ipsas B N N R potente, per quadragesimamseptimam primi. Addatur quadratum ex R V, æquali ipsi R O. Bina ex B R & R V quadrata quadrupla erunt quadrati R O, & ideo quadratum rectæ B V (ipsas B R R V potentis) quadruplum erit quadrati R O. Sed ipsius R O quadrati quadruplum est quod ex V F eius dupla, per vigesimam sexti. Rectæ igitur B V & V F (eiusdem quadruplum potentes) erunt æquales. AEquilaterum itaque erit quinquangulum B C G F V. Quod autem sit æquiangulum B C G F V, Producantur B S & B F rectæ. Quoniam enim recta N O extrema & media ratione secta, additur O S, æqualis maiori segmento, totius N S maius segmentum erit N O (per quintam huius) minus autem O S. Quod igitur ex tota N S & minori O S (vel S F sibi æquali) triplum est eius quod ex N O, per quartam huius. Quæ itaque ex N S S F cum quadrato B N, quadrupla sunt quadrati N S. Quorum quidem iis quæ ex B N N S æquum est quod ex B S, per quadragesimamseptimam primi, cùm rectus sit O N B quadrati anguli. Quæ igitur ex B S S F quadrupla sunt quadrati N O, Eis autem ex B S S F æquum est quod ex B F, per quadragesimamseptimam primi, fuit enim recta F S plano E B G Z. Quod itaque ex B F quadruplum est eius quod ex N O, Eiusdem verò ex N O quadruplum est quod ex B G, scilicet B G Z F quadratum, æquales igitur sunt B G & B F, Haud secus ostendentur æquales esse G B G V. Cùm enim æquales sint N S ipsi X R æqualis erit G R ipsi B S, & proinde G V ipsi B F, quæ ostensa est æqualis ipsi G B. Triangulorum itaque B C G B V F & G F V tria latera, tribus sunt æqualia. Anguli igitur (per octauam primi) B C G B V F & G F V erunt æquales. Quinquanguli itaque B C G F V tres anguli qui ad C V F sunt æquales. Reliqui igitur (per septimam huius) æquales erunt reliquis. AEquiangulum igitur

tur erit B C G F V. *Quia vero planum æquiangulum & æquilaterum ostensum est pentagonum* B C G F V *tangens vnicū cubi latus, Ostendamus quanam arte singulis duodecim cubi lateribus, singula similiter applicantur pentagona sibi mutuo cohærentia, quæ duodecim dodecahedri componunt bases. Quoniam similiter secta fuit recta* P L *ipsis* P Q O N *vel* O X, *& æquales super signis* T F Y, *erectæ sunt perpendiculares ipsi* O H *& reliquis, scilicet maiori segmento, sequetur parallelas esse* C I T Y, *& proinde* C I G D, *per nonam vndecimi. Planum igitur erit* G C I D, *per septimam vndecimi. Planum autem est* A I D *triangulum, per secundam huius. Iungantur itaque* I A I L ß L, *Manifestum erit rectas* C G *æquales esse* I D I A. *Nam* A L L Y *(ipsis* B Q Q T *æquales) efficiunt subtensas* A Y B T *æquales, per quartam primi. Et rursus quia* B T T C *rectum continent angulum,* B T C *veluti &* A Y I, *cùm rectæ sint* C T I Y *ad idem planum* A B G D, *ex hypothesi. Ipsis* B T A Y *æqualibus potentiis, æquales addantur potentiæ ipsarum* C T I Y. *Æquales igitur componentiū (per quadragesimamseptimam primi) erunt potentiæ ipsarum* B C A I, *æquales proinde erunt rectæ* B C A I, *similiter & eisdem* I D *&* C G *sunt æquales. Cùm autem* A I I D *&* A L L D *sint æquales, basis verò* I L *cōmunis, anguli* A L I D L I *æquales erunt, per octauam primi, & ideo recti, per decimam diffinit. primi eadem causa recti fuerunt* C Q B C Q G *anguli. Quia verò binæ* Q T T C *binis* L Y Y I, *sunt æquales, & æquos angulos (rectos ex hypothesi) continentes, anguli* C Q T *&* I L ß, *reliqui erūt æquales, per 4 primi. Quare planum* A I D *æquè inclinatur ad planum* A B G D, *vt planū* B C G *ad idē* A B G D *per 4 diffinit. vndecimi. Similiter ostendemus planum* C G D I *æquè inclinari ad planum* A B G D, *vt* B V F G *ad* E B G Z, *Cum triangulorum* H O Q *&* ß P K *æqualibus lineis compositorum æquales sint anguli* H Q O ß K P, *qui sunt inclinationis anguli. Si autem extensa recta* ß K *in* M *perficiatur pentagonum* G C I D M, *ostendemus eadem lege illud planum æquiangulum ac æquilaterum esse, quæ reliquum* B C G F V *ostendimus, similiter & reliqua* B C I A *&* A I D *si perficiantur, æqua similia similitérque posita ostendentur, cohærentia autem in communibus rectis* B C C G C I A I I D. *Seruata itaque hac methodo singulis cubi lateribus* 12, *singula pentagona* 12 *cohærebunt dodecahedrum componentia. Quod autem sphæra comprehendatur præscriptum dodecahedrum, Supponātur cubi propositæ bases. Secent autem (per trigesimamnonam vndecimi) cubum plana bina per rectas* N X ß Q. *Communis eorum planorum sectio recta erit* H O *producta. Nam communis recta est ad planum* E B G Z, *per decimamnonam vndecimi. Quæ quidem producta* H O, *dimetientes cubi bifariam & ipsa sese secabunt mutuò, per trigesimamnonam vndecimi, secent igitur in* & *coniuncta* & V. *Signum igitur* & *communis dimetientium sectio, est centrum sphæræ cubum ambientis, per demonstrata decimaquinta huius, quare à signo* & *in singulos ducta cubi angulos æquales erunt. Quia insuper æqualis est* & O *dimidio lateri cubi, scilicet ipsi* N O *&* O H *ipsi* O S, *tota* & H *toti* N S *æqualis erit. Extrema itaque & media ratione secatur* & H *in* O, *& proinde quæ ex* & H H O *triplum efficiunt quadrati* O & *vel* O N, *per quartam huius. Sed ipsi* H O *æqualis est* H V. *Recta igitur* & V *ipsas* & H H V *potens, per quadragesimamseptimam primi, triplum poterit quadrati* N O. *Atqui ea quæ ex centro sphæræ cubum ambientis, triplum potest dimidij cubi lateris, per decimamquintam quinti. Nam dimetiens tota, totius lateris triplum potest, per decimamquintam huius. Quæ igitur ex centro sphæræ cubum ambientis, æqualis erit rectæ* & V, *Similiter æqualis ostendetur reliquis* & F & C & I, *&c. Ad reliquos dodecahedri angulos ductis. Quæ igitur ex centro sphæræ cubum ambientis, in vtrosque & cubi & dodecahedri angulos ducta, erunt æquales. Eadem itaque sphæra dodecahedrum comprehendimus, qua & cubum, & ideo qua reliquas figuras, scilicet centro* &, *interuallo autem quauis rectarum* & V *vel* & B, *sphæræ extendatur superficies, ipsa per singulos vtriusque cubi & dodecahedri ducetur angulos. Quod autem latus dodecahedri sit apotome, scilicet* F V *patebit. Quoniam extrema & media ratione secta est* O N, *erit* O N *ad* O R *sicut* O R *ad* R N, *per tertiam diffinit. sexti. Erit igitur (per decimamquintam quinti) inter duplas earum eadem ratio, scilicet* N X *ad* R S *sicut* R S *ad binas* N R S X. *Cubi igitur lateris* N X *extrema & media ratione secti, maius segmentum erit* R S, *vel* F V *dodecahedri latus. Sed cubi latus est certa linea. Nam dimetientis suæ sphæræ quæ certa fuit tertiam partem potest, per decimamquintam huius. Si igitur certa linea* N X *extrema & media ratione secetur, eius segmenta apotome erunt, per sextam huius. Apotome igitur erit recta* F V, *maius segmentū ipsius* N X *certa & dodecahedri latus existens. Dodecahedrum itaque construximus, & data sphæra comprehendimus, qua & prædictas figuras, ostendimúsque quod dodecahedri latus incerta est linea, eáque appellatur apotome.*

Corollarium primum.

Hinc fit cubi latere extrema & media ratione secto, maius oriri segmētum dodecahedri latus eadem Sphæra conclusi. *Vt patuit rectam* V F *maius segmentum fuisse rectæ* N X *lateris cubi.*

Corollarium secundum.

Cubi latus æquum est rectæ subtendenti angulum pentagoni dodecahedri eidem Sphæræ cum cubo comprehensi. *Nam angulos* B C G A I D, *vel* G M D *subtendunt cubi latera* B G *ad* G D.

Corollarium tertium.

Dodecahedri sex sunt latera bina inter se opposita & parallela, quorum bifarias sectiones iungunt æquales tres rectæ, in cẽtro Sphæræ dodecahedrum continentis sese ac illa bifariam secantes, & ad rectos. *Quoniam super sex cubi basibus sex reperiũtur dodecahedri latera, vt ostensum est, quæ bifariam secantur à rectis centra basium cubi coniungentibus, vt* H E *producta & similes. Quæ quidem sunt tres sese ad rectos secantes, cùm sint lateribus cubi parallelæ, & in centro Sphæræ cubum continentis (per ostensa 15 huius) sese bifariam secantes. His verò cubis subtensis externæ adduntur æquales, scilicet* H O *&* T P, *& reliqua similes, dimidio dodecahedri lateri, ex hypothesi æquales. Et proinde omnes sunt æquales dimidia oppositorum dodecahedri laterum signa coniungentes, eáque latera bifariam & ad rectos secantes.*

Corollarium quartum.

Recta opposita dodecahedri latera bifariam diuidens, extrema & media ratione secta, efficit maius segmentum latus cubi, minus vero latus dodecahedri eadem Sphæra comprehensi. *Quoniã enim recta* H Ct *extrema & media ratione secta fuit ostensa in* O, *maiúsque eius segmentum fuisse dimidiũ cubi latus* O Ct, *minus verò* H O *dimidiũ ipsius* V F. *Sequetur igitur (per decimãquintã quinti) duplas earum eãdem habere rationem, scilicet duplam ipsius* H E, *quæ signum ipsi* H *oppositum coniungit, totam esse, maius vero segmentum duplam ipsius* O Ct, *quæ est cubi latus: minus verò duplam ipsius* H O, *æqualem lateri* V F *dodecahedri.*

Propositio decimaoctaua. *Problema 6.*

Latera quinque præfatarum figurarum exponere, & adinuicem comparare.

Esto prædictæ sphæræ dimetiẽs A B, *quæ secetur bifariã in* G, *ab eadẽ insuper* A B *tertia pars* B D, *& quinta* B L, *per nonã sexti auferantur. Ducto verò super* A B *semicirculo, à signis* G D L *perpẽdiculares ipsi* A B *excitentur* G E D Z L M, *coniunctis* A E E B A Z Z B A M M B. *Cùm autem rectus in semicirculo sit angulus* A Z B *media erit* Z A *proportionalis inter* A B *&* A D: *nam* Z A *est ad segmentum* A D, *per corollarium octauæ sexti. Sicut igitur* A B *ad* A D, *sic erit quadratũ* A B *ad quod ex secunda* Z A, *per corollarium vigesimæ sexti. Tripla autem est* A B *ipsius* B D, *per hypothesim, sesquialtera igitur erit* A B *reliquæ* A D *nam veluti 3 ad 2, sesquialterum igitur poterit* A B *dimetiens rectæ* A Z. *Recta itaque* A Z *latus erit pyramidis huic sphæræ inscriptæ, per 13 huius: quia autem æquales sunt* A B E B *bases, per quartam primi: sed eas potest* A B *dimetiens, qualibet earum* A E *vel* E B *latus erit octahedri, nam dimetiens sphæra* A B *duplum potest lateris octahedri, per 14 huius. quoniam rursus* Z B *(ad segmentum* D B*) media est inter* A B *& idem segmentum* D B, *per corollarium octaua sexti, erit* A B *ad* B D, *sicut quadratum* A B, *ad quod ex* B Z *media, per corollarium vigesimæ sexti, tripla est* A B *ipsius* B D, *triplum igitur poterit* A B *ipsius* B Z, *quare* B Z *latus erit cubi, per 15 huius. Cæterùm sumatur latus decagoni, circulo cuius quæ ex centro est* B M *descripti, per corollarium decimæ sextæ quarti, cui lateri æqualis secetur* M C *à maiore* A M, *coniuncta* C B: *quia verò quæ ex centro* B M *æquatur lateri exagoni, eiusdem circuli, per corollarium 15 quarti, Manifestum erit (ex decima huius)* B C *rectam esse latus pentagoni eidem circulo inscripti: nam ipsa* B C *binas potest* B M M C *per 47 primi, exagoni & decagoni latera. quia verò quintupla est* A B *ipsius* B L, *ex hypothesi,*

si, eadem A B quintuplum poterit rectæ B M, quæ ad segmentum B L, vt iam patuit. Recta itaque B erit ea quæ ex cētro circuli quinque latera icosahedri continentis & angulos, per corollar. um 16 huius. Sed circulus cuius ex centro oritur B M, quinquies continet rectam B C, vt ostensum fuit. Recta igitur B C latus erit icosahedri huic sphæræ super dimetiente B A constructæ descripti, per 16 huius. Præterea cùm ostensum sit rectam Z B esse cubi latus ipsam Z B secantes extrema & media ratione, per trigesimam sexti, in F efficiemus F B maius segmentum latus decacohedri eidem sphæræ inscripti per primum corollarium præfatæ.

Qua verò ratione conferātur horū solidorū latera, adinuicē excutiamus. Cùm (ex 13 huius) dimetiens A B sesquialterū poßit lateris pyramidis A Z, ex 14 verò duplum potest lateris octahedri A E, ex 15 autem triplum lateris cubi Z B. Qualium igitur sphæræ dimetiens erit potentia 36. pyramidis latus erit 24, octahedri 18, cubi verò 12 earum partium. pyramidis verò perpēdicularis A D earūdem erit 16. nam fuit duo tertia rectæ A B longitudine, potentia igitur erit dupla sesquiquarta. Eorum igitur trium latera (potentia) rationem numerorum inter se & ad propositam sphæræ dimetientem A B obseruant: quare certæ dicentur ipsæ magnitudines, per sextam diffinitionem decimi. nam adinuicem & propositæ commensurabiles existunt, per sextam decimi, quia vero Icosahedri & dodecahedri latera naturam incertarum magnitudinum nanciscurtur, cùm hoc apotome illud verò minor esse 16 & 17 huius ostensa sint. Ea latera ad propositam A B dimetientem, seu ad trium priorum latera, propositæ dimetienti commensurabilia, nulla certa seu determinata rationis quantitate cōferri poterunt, per octauam decimi, eo quod numerorum ratione priuentur sed nec adinuicem, per corollarium 111 decimi. Nam si inter se commensurarentur eiusdem essent denominationis, per centesimamtertiam & centesimamquintam decimi, cuius patuit oppositum. Superest autem demonstrandum maius esse C B icosahedri latus dodecahedri latere F B. Primo æquū non erit, nam commensurabile esset, quod fieri non potest, cùm dodecaheri apotome, icosahedri vero latus minor iam fuisse ostensa sint, decimasexta & decimaseptima huius. Sit igitur, si fieri poßit F B maior ipsa B C, quoniam A B quintuplum potest rectæ B M, perproximè ostēsa, qualium A B potest 60, earum B M potest 12. quia vero C M decagoni excedit dimidium ipsius B M exagoni, vt patuit decimasexta huius, recta C M plus quàm 3 poterit, & proinde recta B C (ipsas B M M C potens) earū partium poterit plus quàm 15, qualium A B potuit 60: sed earum potuit Z B 20, per decimamquintam huius, nempe tertiam ipsius A B partem, qualium itaque Z B erit 20, earum B C erit plus quàm 15 quia vero F B est maior, ex hypothesi recta B C, qualium B Z potest 20, earum F B poterit multo plus quàm quindecim. Cùm autem B Z B F F Z, sint proportionales, per tertiam diffinitionem sexti, earum quadrata (per vigesimamsecundam sexti) erunt sicut quod ex B Z (scilicet 20) ad quod ex B F (scilicet plus quam 15) sic plus quàm 15 ad F Z reliquum ipsius 20, scilicet minus quàm 5. Sed 20 ad plus quàm 15 rationem habet sesquitertia minorem, per octauam quinti, cum sesquitertiā habeat ad 15. Plus 15 vero ad minus quinque rationem habet tripla maiorem, & ideo sesquitertia maiorem multò, non itaque essent B Z B F & F Z proportionales potētiæ contra 22 sexti, cū rectæ lineæ B Z B F, & F Z sint proportionales, quod esset absurdū. non igitur erit F B maior recta B C, nec ei æqualis, quare minor eadem necessario erit.

Corollarium primum.

Hinc manifestum assequimur naturam nullam pati figuram, sub æqualibus æquilateris, & æquiangulis planis comprehensam præter has quinque. Cum enim (per vigesimamprimam vndecimi) omnis angulus solidus ex minus quàm quatuor rectis planis componatur, & (per nonam diffinitionem eiusdem) plures duobus planis exoptet, necesse erit eos planos (plures numero duobus, & quemlibet solidum angulum componentes) minus quatuor rectis æquiualere. Cum autem trianguli æquilateri sex anguli quatuor rectis æquipolleant, per demonstratū decimæquintæ quarti, Sequetur sex eorum triangulorum angulos planos, solidum angulum non componere, per eandem vigesimamprimam vndecimi. Is nāque angulus solidus minus quatuor rectis exoptat, nec igitur plures quam sex eorum triangulorum anguli solidū cōficiēt angulum cum tanto plus quatuor excedāt rectos, sed quinq, horū triāgulorum anguli icosahedri angulū, quatuor vero octahedri, tres antē pyramidis cōposuerunt angulos, vt ostendimus 16, 14, & 13 huius. Duo verò solidum angulum nō efficiunt per 9 diffini. vndecimi. Ex triangulorum æquiangulorum igitur angulis, soli fiūt icosahedri, octahedri, & pyramidis trilatere anguli ex quadratis vero solus fit cubi angulus, qui tribus angulis planis rectis constat per 15 huius. Nam quatuor recti solidum angulum excedunt, per vigesiman primā vndecimi, duo verò recti solidum non componunt (vt diximus) ex pentagonis autem tribus, genitus fuit dodecahedri angulus vnicus. Cum duo anguli pentagoni nullum componant solidum, quatuor vero aut plures, rectos excedunt quatuor, eò quod sint rectis maiores singuli singulis. Exagoni autem an-

gulum solido conficiendo indecētem esse patet. Cum enim sex eius anguli octo rectis (per corollarium trigesimæsecundæ primi) æquipolleant, sequetur tres quatuor rectis æquales esse, & proinde tres exagoni angulos, solidum non componere, per 21 vndecimi, duo vero nullum, quatuor autem aut plures, cum sint obtusi, quatuor rectis maiores erunt, & ideo solidum angulum non component, nec proinde Eptagoni vel aliorum poligonorum aliqui anguli, solidum angulum component. Duo etenim eorum solidi componendi sunt incapaces, tres vero quatuor rectos excedunt, cum tres eorum exagoni excedant tres angulos quatuor rectis æquales. Nullius itaque poligoni æquilateri & æquiāguli anguli, solidum angulum præter harum quinque figurarum angulso, quemquam constituent. Nec proinde figuram solidam (quæ absque angulis planis solidos angulos componentibus constitui non potest) aliam præter has quinque præfatas, sub planis æqualibus, æquilateris, & æquiangulis comprehendere licebit.

Corollarium secundum.

Vt autem ea quinque regularia solida, similes singulas suarum basium inclinationes habere doceamus, *Pyramidem priorem sumemus, cuius vnum latus bifariam secetur, & a binis ipsi lateri oppositis angulis perpendiculares mittantur, ipsæ in sectionem cadent, per corollarium duodecimæ decimitertij, ipsæ itaque angulum inclinationis planorum comprehendent, per quartam diffinitionē vndecimi, subtensum à pyramidis opposito latere, cùm igitur reliqui pyramidis anguli inclinationis planorum, sub binis triangulorum perpendicularibus comprehendantur, & pyramidis latere subtendantur, ipsi ex octaua primi erunt æquales. Pyramidis igitur plana ad se similiter inclinari dicetur, per quintam diffinitionem vndecimi.*

Cubi vero binæ perpendiculares à bifaria vnius lateris sectione, per bina plana ducta, parallelæ & æquales erunt lateribus quadrati angulum rectum continentibus, cùm omnes basium cubi anguli sint recti, quare ipsæ in sectionem communis lateris cadentes, rectum angulum adinuicem comprehendent, per decimam vndecimi, qui quidem est inclinationis angulus, per quartam diffinitionem vndecimi, à basis cubi dimetiente subtensus. Reliqui igitur eodem argumento recti ostensi, inclinationes basium cubi ad se inuicem æquales efficient, per quintam diffinitionem vndecimi.

Octahedri autem sumatur dimetiens binos oppositos connectens angulos, ab his angulis in idem octahedri latus, per binas eius bases perpendiculares mittantur, ipsæ latus illud bifariam secabunt & ad rectos, vt sepius patuit, & ideo angulum inclinationis basium continebunt, per quartam diffinitionem vndecimi, subtensum ab octahedri dimetiente quare reliqui eadem lege in reliquis basibus descripti, æquis lateribus comprehensi ac subtensi, inuicem æquales erunt, per octauam primi, & proinde inclinationes planorum æquales erunt (per quintam diffinitionem vndecimi) in octahedro.

Icosahedri verò ab angulis duarum basium, in commune earum latus perpendiculares mittantur, ipsæ angulum inclinationis basium comprehendent, per quartam diffinitionem vndecimi, subtensum autem à recta subtendente angulum pentagoni, quinque icosahedri latera suscipientis, per decimamsextam huius, nam ea coniungit binos oppositos coniunctorum triangulorum angulos. Reliqui igitur inclinationis basium anguli, pari methodo deprehensi, æquis lateribus concepti, æquisque basibus subtensi, ex octaua primi æquales erunt, & hac de causa qualibet basium icosahedri inclinationes ad se, æquales erunt, per quintam diffinitionem vndecimi.

Dodecahedri demum à binis proximorum pētagonorum oppositis angulis, in commune latus perpendiculares, per centra demittantur, ipsæ in bifariam lateris sectionem cadent, per tertiam tertij, nam circulo continentur dodecahedri bases, & earum basium inclinationem denotabit ab ipsis perpendicularibus comprehensus angulus, per quartam diffinitionem vndecimi, oppositos autem præfatos angulos copulat recta æqualis recta oppositas dodecahedri bifarias sectiones laterum coniungenti, per trigesimamtertiam primi. Nam ipsa coniungunt dimidia dodecahedri latera, parallela & æqualia per corollarium tertium decimæseptimæ decimitertij, quæquidem coniungentes sunt æquales, per idem corollarium, anguli igitur æquis perpendicularibus comprehensi, & æquis coniungentibus subtensi (per octauam primi) æquales erunt, fuerúntque inclinationū anguli. Dodecahedri itaque bases ad se inuicem similiter inclinari dicentur, per quintam diffinitionem vndecimi.

MONITVM.

Cogimur quinque regularium solidorum 13 & quatuor eam sequentibus descriptorum demonstrationes variare. Diffiniens enim Theon libro vndecimo sphærā, descriptionē potius quàm sphæræ

diffini-

diffinitionem naturæ pretulit, describendam namque per semicirculi ductum sphæram edocet, non autem quæ sit sua naturæ vera essentia, quæ per æqualitatem rectarum ab vnico signo intrinseco ortarum, in superficie eius desinentium præcisius exprimi videtur, cum autem ipsi sphæræ includenda sunt regularia hæc solida, quarum angulos ab vnico signo interiori æquè distare necessum est, huius signi locus ita inquirendus est, vt cum ab eo singulæ rectæ in solidi describendi angulos ductæ, æquales repertæ sint, sphæra superficiem per eius solidi angulos extensam solidum verè amplecti testentur, cuius quidem sphæræ descriptionem, super dupla eius quæ ex solidi cētro semicirculum constituentes, illúmque manēte dimetiente circunferentes, quo ad vnde cœpit redeat absoluemus, vt huic solido non tantùm sphæræ descriptionem, sed veram eius essentiam adhærere concipiamus. ad vltimæ autem propositionis postremam demonstrationis partem, qua icosahedri latus dodecahedri latere maius ostendendum est, dicemus Theonem ac Campanum illud non recta methodo demonstrasse. Nam id probare conantur per similem sectionem extrema & media ratione factam duarum inæqualium linearum, supponentes sectas quascūque rectas extrema ac media ratione, similiter seu in easdem secari rationes, quod non hactenus ostendimus, sed secūda proximi libri ostensuri sumus. Theon igitur illud tanquam notum quadam comminentia præterit, Campanus verò sæpius geometricæ mentis sequax, cùm in illud cadit, à futura decimiquarti secunda auxilium implorat, quod vt illi condonetur, eam secundam à nulla hanc subsequente demonstrandam esse profitetur, sed tantùm per eas quæ iam elapsæ sunt, eandem secundam facilè demonstrari posse. Nos itaque aliam demonstrandi speciem protulimus, arguentes ab absurdo per numeros illustratam, ne præcedentia per sequutura demonstremus, contra veram disciplinæ ingenuitatem.

Ypsicles quinta decimiquinti planorum solida quinque regularia concludentium inclinationes, ab Isidoro se suscepisse profitetur, quas postmodum clariores proferre volens, angulos inclinationis singulorum datos esse, ac acutos vel obtusos iuxta solidi naturam ostendere conatus est, licet huc vsque quid sit datum, his quindecim libris tacuerit Euclides. Datum igitur Ypsiclem sentire noscimus non certam tantùm aut determinatam quantitatem, sed eámque geometricis argumentis demonstrari potest. Nam eorum solidorum latera angulos inclinationis suscipientia, certa quādoque, quandoque verò incerta demonstrantur. Cùm autem hæc huic decimotertio solida componenti sanius conueniant, vt compositorum solidorum inclinationes basium, hunc decimumtertium concludentes discutiamus, hinc inde hæc transtulimus, vt in pyramide, angulus inclinationis sub binis triangulorum perpendicularibus continetur, latere verò pyramidis subtensus quod quidem perpendicularis sesquitertium potest, per coroll. 12 huius, & ideo triangulum ex ipsis constans, latera certa ac inuicem potentia commensurabilia habent.

Cubi verò cum bina latera vnius basium dimetiente subtensa (aut eis æquales rectæ) angulum inclinationis componant, dimetiénsque cubi sesquialtera dimetientis basis, quæ lateris potentia dupla (ex 47 primi) subsistat, sequetur certas ac potentia commensurabiles has dici lineas.

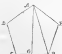
Octahedri verò, cuius binæ basium perpendiculares angulum inclinationis continent octahedri dimetiente subtensum, Dicemus dimetientem duplum posse lateris octahedri, latus verò sesquitertium perpendicularis, per coroll. 12 huius. Et proinde dimetientem ipsius perpendicularis duplum tertias bipartiens posse concludemus. Et hac de causa certas ac commensurabiles esse dimetientem perpendiculari, per sextam decimi.

Icosahedri autem ostendimus latus esse minorem, cùm certa fuerit dimetiens sphæræ, per 16 huius. Cùm autem inclinationis suarum basium angulus sub triangulorum perpendicularibus, & subtendente angulum pentagoni quinque latera Icosahedri suscipientis constet, perpendicularibus autem commēnsurabile sit latus, nempe sesquitertium potentia, per coroll. 12 huius. Sequetur perpendiculares angulum continentes. Incertas siue minores dici, per 105 decimi. Quia verò dimetiens potest, & latus Icosahedri, & eam quæ præfatum subtendit angulum, manifestum erit à certa dimetientis potentia, ablatam incertam lateris Icosahedri potentiam, incertam relinquere ipsius subtendentis potentiam. Nam si certa esset, metiens numerus totam dimetientis & ablatam subtendentis, metiretur & reliquam lateris, scilicet incertam, per secundam communem sentent. septimi. Quod esset absurdum, cùm sit minor. Incertas itaque esse ostendimus angulum inclinationis basium Icosahedri rectas componentes, subtendens enim ad comprehendentem, maiorem quam tota ad maius segmentum habet rationem.

Dodecahedri demùm inclinationis basium angulus, sub binis perpendicularibus basium dodecahedri continetur, subtensus ea recta cuius latus cubi dodecahedro inscripti est maius segmentum, quæ æquatur copulanti binas appositorum dodecahedri laterum bifarias sectiones. Quam quidem incertam esse dicemus, cùm dimetiens sphæræ certa binas possit, & copulantem & d. decahedri latus,

atque dodecahedri latus incerta est, nempe apotome, per 17 huius. Reliqua igitur copulans incerta erit, ut proxime praecedenti diximus. Comprehendentes verò angulum inclinationis perpendiculares, incertas esse doceamus.

Sit pentagoni A B C D E *perpendicularis* A G, *subtendens verò angulum pentagoni, esto* A C. *Quoniam* A C *recta latus est cubi, dodecahedri verò latus est* C D *eadem sphaera descriptorum, per coroll. secundum decimaeseptimae decimitertij. Sed* A C *dimetienti sphaera est commensurabilis, per 15 decimitertij, & ideo certa, per sextam diffinitionem decimi. Recta verò* C D *(dodecadri latus) incerta est, per 17 decimitertij. Quare* C G *eius dimidia incerta erit, per 103 decimi. Binas autem* A G G C *potest* A C, *per 47 primi. Si itaque à potentia rectae* A C *certae, potentia ipsius* C G *incertae tollatur, quae supererit (potentia quidem rectae* A G*) incerta erit necessariò. Nam si* A G *ablata certa esset, & tota* A C *certa, reliqua* C G *certa esset, nempe iisdem numeris mensa, per secundam communem sententiam septimi. Sed incerta ostensa fuit* C G, *dimidia nanque totius* C D *apotome, per 17 decimitertij, quod fieri non potest, incerta igitur erit &* A G *perpendicularis, per undecimam diffinitionem decimi. Angulus igitur inclinationis dodecahedri, sub binis pentagoni perpendicularibus comprehensus, quē insuper subtendit recta coniungens bifariàs oppositorum dodecahedri laterum sectiones, per secundum coroll. 18 decimitertij, quam incertam esse docuimus, cùm fuerit aequalis binis* A C C D, *per coroll. quartum decimaeseptimae decimitertij, sub incertis dicetur contineri lineis rectis.*



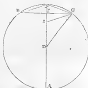
Praestabat igitur angulorum intelligentiam à linearum natura intelligentia deprehendere quam eos simpliciter aut acutos, aut obtusos dari, ut se ab Isidoro suscepisse fatetur Ypsicles. Nam per subtendentes ad comprehendentem rationem, reperitur anguli obliquitas. Si enim subtendens duplum comprehendentis possit, rectus erit angulus, per 48 primi. Siquidem minus duplo acutus erit, per 13 secundi. Si autem plus duplo possit, aut maiorem habeat rationem quam tota ad maius segmentum, angulus tum obtusus erit, per 12 secundi & 4 decimitertij. In qua quod ex tota plus potest duplo maioris segmenti.

Euclid

EVCLIDIS DEMONSTRATIONUM restitutarum Liber decimusquartus.

Propositio prima.

QVÆ ex cētro circuli in pentagoni latus eidē circulo descripti perpēdicularis acta, dimidia est binarū, quæ exagoni & decagoni eidem circulo inscripti.



Proponatur circulus A B G, *cui inscribatur latus pentagoni* B G, *suscepto circuli centro* D, *à quo in latus* B G *perpendicularis agatur* D E, *producta in* Z, *ipsi verò* E Z *æqualis fiat* E I, *coniunctis* G I G D *&* G Z: *Dico rectam* D E *(quæ ex centro in latus pentagoni* B G*) dimidiam esse laterum decagoni & exagoni simul sumptorum, quoniam perpendicularis est* D E *ad* B G, *æquales erunt* B E E G *sectiones, per tertiam tertij, communis verò* E Z, *& anguli* Z E G Z E B *recti, ex hypothesi, bases itaque* B Z Z G *æquales erunt. Pentagoni autem est* B G, *ex cōstructione, decagoni igitur erit* Z G, *dimidium pentagoni subtendens, ipsi porrò* Z G *æqualis erit* G I, *subtendunt enim rectos angulos* G E I G E Z *æquis lateribus comprehensos, per quartam primi, & proinde* G I E G Z E *anguli, trianguli* G Z I *erunt æquales, per quintam primi. Cùm autem* Z G *arcus sit decagoni, ipsius* Z G *quadruplus erit arcus* G A, *& ideo angulus* G D A *anguli* G D Z *quadruplus erit, per trigesimamtertiam sexti. Quia verò idem* G D A *angulus qui ad centrum, duplus est anguli* G Z A *ad circunferentiam, per vigesimam tertij, sequetur angulum* G Z A *vel* G Z D *duplum esse anguli* G D Z, *nempe quadrupli dimidium, sed angulo* G Z D *vel* G Z I *æqualis fuit* G I Z, *erit igitur* G I Z *exterior duplus anguli* G D Z, *æquales itaque erunt* G D I D G I *anguli. Nam binis ipse* G I Z *fuit æqualis, per trigesimamsecundam primi, quare latera* I D I G *æqualia erunt, per sextam primi, & proinde* I D *ipsi* Z G *decagoni æqualis erit, per primam communem sententiam, rectæ verò* Z E *æqualis est* E I, *per constructionem tota igitur* D E *binis* G Z Z E *æqualis erit, quæ ideo simul sumpta (scilicet* D Z Z G*) ipsius* D E *dupla erunt, quare dimidia erit* D E *(quæ ex centro in latus pentagoni) vtriusque simul, scilicet lateris exagoni* D Z, *& decagoni* G Z: *nam quæ ex centro* D Z *lateri exagoni æqualis est, per corollarium decimaquinta quarti. Quæ igitur ex centro circuli in pentagoni latus eidem circulo descripti, &c.*

Corollarium.

Recta perpendicularis à centro ad latus pentagoni extrema & media ratione secta, efficit maius segmentum eam quæ ab eodem centro in latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti. *Nam ea (per corollarium duodecimæ decimitertij) est dimidia eius quæ à centro sine exagoni, reliqua igitur erit dimidia decagoni nam tota est binarum decagoni & exagoni dimidia, sed decagoni & exagoni simul sumptarum, maius segmentum est exagoni, per nonam decimitertij. Dimidiæ igitur earum maius segmentum erit dimidia exagoni, per decimamquintam quinti, quæ est à centro in trianguli latus demissa.*

Propositio secunda.

Si binæ rectæ lineæ extrema & media ratione secentur, ipsæ in easdem rationes secantur.

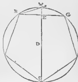
Binæ inquam rectæ A B D E *extrema & media secentur ratione in* G *&* Z. *Dico eas in easdem secari rationes, seu similiter rectam* A B *in* G *ut* D E *in* Z, *quod si non similes credãtur sectæ, secetur altera earum quæuis, scilicet* D E *similiter ipsi* A B *in* C. *Esto igitur* D E *ad* D C *maius, ut* D C *ad* C E *minus, per tertiam diffinitionem sexti, sed est ex hypothesi* D E *ad* D Z *ut* D Z *ad* Z E, *recta igitur* D E *extrema & media ratione secabitur in duobus signis* C *&* Z, *maior autem est ratio* D E *ad* D C *minorem, quàm eiusdem* D E *ad* D Z *maiorem, per secũdam partem octauæ quinti. Est autem ut* D E *ad* D C *sic* D C *ad* C E, *maior igitur erit ratio* D C *ad* C E *ratione* D Z *ad* Z E, *quia verò* D Z *maior est ipsa* D C, *maior erit ratio* D Z *ad* C E *ratione* D C *ad* C E, *per octauam quinti, Multò itaque maior erit* D Z *ad* C E *ratione* D Z *ad* Z E, *eadem igitur* D Z *ad* C E *maiorem, maiorem haberet rationem quam ad* Z E *minorem, contra secundam partem octauæ quinti, quod fieri non potest. Non itaque dissimiliter secantur rectæ* A B D E, *sed ideo similiter ac in easdem rationes, haud secus ostendemus si signum* C *alibi cadat, nam semper earum aliqua maior erit. Si igitur binæ rectæ lineæ extrema & media ratione secentur, ipsæ in easdem rationes secantur.*

MONITVM.

Nunc demum desinunt hoc decimoquarto Theonis scripta, quæ his duobus postremis elementorũ libris suscepit Ypsicles in Euclidem, eo ordine quo processerat Theon peragẽda. Quæ quidẽ cum cõsque mutilata iacent ut hoc tantùm libro 4 theoremata, proximo verò quinque ad nos peruenerint, Ypsiclem insuper à Campano & numero, & theorematum ordine dissentientẽ reperimus, quare quæ ex eorum scriptis utiliora perspexerimus, colligere non dedignabimur, ut si qua complendis his præter hæc optari cernamus, illius clementis auxilio quæ pro viribus exiguis consequemur, eo ordine quo geometrica principia facilius percipi posse credamus, singula præparare nitemur, & prolixitates compendio, & nubilosæ elucidatione, quam facilius licebit, legentibus exposita proferemus.

Propositio tertia.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quæ ex latere pentagoni & ea quę pẽtagoni bina subtendit latera simul sumpta quadrata, quintuplum possunt eius quæ ex centro circuli.



Sit in circulo B C G *latus pentagoni* B G, *subtendens verò bina latera eius esto* B C. *Secet autem bifariam rectam* B G *aliqua per centrum* D *ducta, dimetiens* C D E, *producta in* Z, *iungatúrque* B Z. *Dico rectas* B C B G *quintuplum posse rectæ* D Z, *quæ ex centro. Quoniam (per quadragesimamseptimam primi) quæ ex* C B B Z *æqualia sunt quadrato* C Z *dimetientis, & proinde quadruplum efficiunt eius, quod ex* D Z, *per vigesimam sexti. Nam* C Z *dupla est ipsius* D Z. *Rectæ igitur* C B B Z *&* Z D *quintuplum possunt ipsius* Z D, *binas autem* B Z Z D *potest recta* B G, *per decimã decimi tertij, cùm* D Z *sit exagoni,* B Z *verò decagoni. Coniunctæ itaque* B C *&* B G *quintuplum possunt ipsius* D Z. *hoc est idẽ quod potuerunt rectæ* C B B Z *&* Z D. *Si itaque in circulo pẽtagonum æquilaterum describatur, &c.*

Corollarium.

Si cubus & dodecahedrum eadem sphæra comprehendantur, latus cubi & latus dodecahedri, quintuplum possunt eius quæ ex centro circuli pentagonum dodecahedri continentis. *Ostensum est enim decimaseptima decimitertij, latus cubi bina pentagoni dodecahedri subtẽdere latera, cùm eadem capiuntur sphæra. Cubi igitur latus bina pentagoni subtendens latera, & eiusdẽ pentagoni latus eodem circulo capiũtur quare (ex hoc theoremate) quintuplum possunt eius quæ ex centro eiusdem circuli pentagonum dodecahedri capientis.*

Prop

Propositio quarta.

Idem circulus comprehendit, & Dodecahedri quinquangulum, & Icosahedri triangulum in eadem Sphæra descriptorum.

Sit proposita sphæræ dimetiens A B, *in ea verò descriptorum icosahedri & dodecahedri bases sint, triangulum* M N R *& pẽtagonum* F K H, *circa ipsas autem circuli describantur, per 5 & 14 quarti, quorũ quæ ex cẽtro sint* L N O K: *Dico rectas* L N O K, *quæ ex centro æquales esse. & ideo eundem circulum vtrasque comprehẽdere figuras. Poßit recta* A B *quintuplum alicuius rectæ quæ sit* C G, *per corollarium 6 decimi, interuallo autem* C G *centro* C, *circulus describatur* D Z G. *Cui quidem circulo latus pentagoni inscripti sit* Z G, *per vndecimã quarti. Decagoni verò* E G *latus, nempe subtendens dimidium arcus* Z G *secetur autem per trigesimam sexti,* C G *extrema & media ratione per* I *quoniam ostensum fuit (16 decimiterty) hãc* C G *(cuius quintuplum potest diameter sphæræ* A B*) esse eam quæ ex centro circuli quinque icosahedri angles continentis, latúsque pentagoni in eo* D Z G *circulo descripti, scilicet* Z G, *esse latus icosahedri in sphæra dimetientis* A B *descripti. Aequalis itaque erit* Z G *recta ipsi* M N, *quæ posita fuit icosahedri seu triangularis suæ basis latus. Patuit insuper 17 decimiterty, rectam* F H *(quæ subtẽdit angulũ pentagoni dodecahedri sphæra præfata inscripti) esse latus cubi eidem sphæræ inscripti. Nam super cubi angulis dodecahedri angulos construximus. Triplum igitur potest* A B *dimetiens, ipsius* F H *lateris cubi, per decimamquintam decimiterty, quintuplum autem (ex hypothesi) potest idem* A B *rectæ* C G *Quinque itaque ex* C G *tribus ex* F H *æqualia erunt, nempe eidem quod ex* A B, *quoniam autem latus* E G *decagoni, secat rectam* C G *extrema & media ratione, per corollarium nona decimiterty. Similiter &* H K *secat ipsam* F H *cubi latus, per corollarium 17 decimiterty. Ipsa itaque* C G *&* F H *in easdẽ rationes secantur, per secundam huius, æquales igitur erunt* C I *&* E G, *eiusdem* C G *maiora segmenta Cùm autem quinque ex* C G *tribus ex* F H *æquipolleant, eadem ratione quinque ex* G E *tribus ex* H K *(maioribus earũ* C G *&* F H *segmentis) æqualia erũt. Quinque itaque ex* C G G E, *tribus ex* F H H K *æqualia erũt, per duodecimam quinti, ipsis autem ex* C G G E *æquum est quod ex* Z G, *per decimã decimiterty rectæ autem* Z G *æqualis fuit* M N, *quinque igitur ex* M N *tribus ex* F H H K, *æqualia erũt. quæ autem ex* F H H K *quintuplum sunt ipsius* O K, *quæ ex centro per tertiam huius. Tria igitur ex* F H H K *quindecim efficiunt eorum quæ ex* O K *quia verò* M N *triplum potest ipsius* L N *quæ ex centro, per 12 decimiterty, quinque ex* M N *quindecim efficient quæ ex* L N: *atqui tribus ex* F H H K *fuerunt æqualia quinque ex* M N. *Eorum itaque æqualium æquemultiplicia decrementa (scilicet vtriusque pars quindecima) æqualia erũt per 15 quinti, quæquidem sunt* L N O K *quæ ex centris. Quare ab eis circuli* N R M *&* F K H *descripti æquales erunt, dodecahedri quidem & icosahedri bases (ex hypothesi) continentes, eadem sphæra comprehensorum. Idem igitur circulus comprehendit, &c.*

Propositio quinta.

Si in circulo dodecahedri quinquangulum & Icosahedri triangulum descripta fuerint, A centro autem in eorum aliquod latus perpendicularis agatur, Quod trigesies sub latere & perpendiculari sibi demissa, æquum erit superficiei eius solidi cuius lateri perpendicularis acta est.

Sit in circulo A G E *dodecahedri quinquangulum* A B G D E, *& Icosahedri triangulum* A F H, *centrum autem* C, *A quo perpendiculares ducantur* C I *in latus pentagoni,* C L *verò in latus trigoni: Dico rectangulum trigesies sumptum sub* C I G D *rectis, æquum esse superficiei dodecahedri. Quod verò trigesies sub* C L A F *æquum esse superficiei Icosahedri, eidem sphæræ inscriptorum, Ducantur* C A C F C G C D *rectæ. Cum autem trianguli* G C D *duplū sit quod sub* G D *basi, &* I C *vertice, per 41 primi, Quinque verò similia & æqualia ipsi* G C D *pentagonum dodecahedri constituunt* A B G D E. *Quinquies itaque sub* G D I C, *duobus quinquangulis æquum erit. Quare & trigesies sub* G D I C *duodecim quinquangulis superficiem dodecahedri concludentibus, æquum erit. Rursus quod sub* C L A F *duplum est trianguli* A C F. *Quod igitur ter sub* C L A F *binis triangulis* A F H *Icosahedri basibus æquum erit. Et proinde quod trigesies sub* C L A F, *viginti huiusmodi triangulis* A F H *Icosahedri superficiem complentibus æquum erit. Cum autem huius pentagoni dodecahedrum & trianguli Icosahedrum eadem sphæra suscipiat, per quartam huius,* C L *verò in latus icosahedri,* C I *autem in latus dodecahedri cadant. Quod trigesies sub latere & perpendiculari sibi demissa, æquum erit superficiei eius solidi cuius lateri perpendicularis acta est. Si itaque in circulo dodecahedri, &c.*

Corollarium.

Dodecahedri & Icosahedri superficies in eadem sphæra descriptorū ad se sunt, sicut quod sub latere eius & perpendiculari à centro basis suæ acta, ad id quod sub reliqui latere & perpendiculari in ipsum à centro suæ basis acta. *Nam sicut trigesies ad trigesies sic (per 15 quinti) semel ad semel se habent.*

Propositio sexta.

Superficies dodecahedri ad Icosahedri superficiē eidē sphæræ inscriptorum se habet, vt cubi latus ad Icosahedri latus eadem sphæra comprehensi.

Esto circulus A B G, *cui (per 4 huius) inscribantur latera dodecahedri* A G, *& Icosahedri* D G, *eadem sphæra comprehensorum, centrum verò sit* E, *à quo in ipsa latera perpendiculares demittantur* E I E Z. *Producta verò* E I *in* B *iungatur* B G, *latus autem cubi eadem sphæra contenti sit* G C *Dico esse dodecahedri ad icosahedri superficiem, sicut* C G *ad* G D, *cum recta* E I *extrema & media ratione secta, efficiat maius segmentum rectam* E Z, *per coroll. primæ huius. Ipsius verò* C G *maius segmentum est* A G, *per coroll. 17 decimitertij. Rectæ itaque* E I *&* C G *proportionaliter sectæ sunt, per secundam huius. Sicut igitur* C G *ad* A G, *sic erit* E I *ad* E Z. *Quod itaque sub* C G E Z *extremis, æquum est ei quod sub* A G *&* E I *mediis continetur, per 16 sexti. Sicut autem quod sub* C G E Z *ad id quod sub* D G E Z, *sic per primam sexti,* C G *ad* D G, *sub eodem vertice* E Z. *Erit itaque sicut quod sub* E I A G *(æquum ei quod sub* C G E Z *ostensum) ad id quod sub* D G E Z, *sic* C G *ad* D G. *Sicut autem quod sub* E I A G *ad quod sub* D G E Z, *sic fuit (per coroll præcedentis) dodecahedri superficies ad icosahedri superficiem. Sicut igitur dodecahedri superficies ad icosahedri superficiem, sic* C G *cubi latus ad* G D *icosahedri latus. Superficies itaque dodecahedri ad icosahedri superficiem, &c.*

Lemma.

Pentagonum dodecahedri ęquum est ei quod sub perpendiculari in basim trianguli Icosahedri, & quinque sextis lateris cubi eidem sphæræ descriptorum continetur.

Sint

Sint in circulo A B E G *latera* A B A G *pentagoni dodecahedri* A B C I G, *subtensa recta* B G, *Triangulum verò icosahedri eidem sphæræ inscripti, per quartam huius, esto* A F H, *circuli autem centrum* D: *Dimetiens verò sit* A D E, *secans latus trianguli* F H *in* Z, *rectam verò* B G *in* K, *coniuncta* B D. *A recta verò* K G *tertia pars tollatur* T G, *per nonam sexti. Erit igitur* B G *latus cubi, bina subtendens dodecahedri latera, eidem sphæra inscriptorum, per* 17 *decimitertij, triangulum vero icosahedri eiusdem sphæra erit* A F H, *per quartam huius. In latus autem trianguli perpendicularis erit* A Z, *quæ per centrum* D. *Quoniam enim æquales sunt anguli* G A E B A E *sub æquis circunferentiis, per vigesimamseptimam tertij, bases* B K K G *(per quartam primi) æquales erunt. Quinque igitur sextas ipsius* B G *continet* B T *recta: Dico quod sub* A Z B T *æquum esse pentagono* A B C I G. *Cùm sesqualtera sit* A Z *ipsius* A D. *Nam secatur* D E *bifariam in* Z, *per coroll.* 12 *decimitertij. Similiter sesquialtera* K G *rectæ* K T, *erit* A Z *ad* A D *sicut* K G *ad* K T. *Quod igitur sub extremis* A Z K T *æquum erit ei quod sub* A D *&* K G, *per* 16 *sexti. Ipsi autem* K G *æqualis fuit* B K. *Quod itaque sub* A Z K T *æquum erit ei quod sub* A D *&* B K. *Quod quidem sub* A D B K *duplum est (per* 41 *primi) trianguli* A B D. *Quod igitur sub* A Z *&* K T *duplum erit eiusdem trianguli* A B D. *Cùm autem pentagonum* A B C I G *quinque suscipiat æqualia ipsi* A B D *triangula. Quod sub* A Z *&* K T *verò bina, Duplum sesquialterum erit* A B C I G *quinquangulum, eius quod sub* A Z *&* K T *rectanguli. Quia verò dupla sesquialtera est,* B T *rectæ* K T, *ex constructione. Est autem (per primam sexti) quod sub* A Z B T *ad id quod sub* A Z K T *sicut* B T *ad* K T *bases. Sequetur quod sub* A Z B T *eius quod sub* A Z K T *duplum sesquialterum esse. Eiusdem autem sub* A Z K T *duplum sesquialterum fuit* A B C I G *quinquangulum. Pentagonum itaque* A B C I G *dodecahedri æquum est ei quod sub* A Z *perpendiculari, &* B T *quinque sextis lateru cubi comprehenditur.*

Propositio septima.

Recta linea secta extrema & media ratione, quam rationem habet potens totam & maius segmentum, ad potentem totam & minus segmentum, eam habet cubi latus ad Icosahedri latus, eadem sphæra contenti.

Proponatur circulus A B E, *cui (per* 11 *quarti) pentagonum æquilaterum inscribatur* B Z E C H, *& (per secundam eiusdem) triangulum æquilaterum* A B I, *cuius centrum esto* G. *Quæ ex centro verò* G B *extrema & media ratione secetur in* D, *per trigesimam sexti. Possit autem totam* G B *& minus eius segmẽtum* B D, *recta* M L, *per coroll.* 15 *decimi. Coniungantur autem* B E *subtẽdens pentagoni angulum, ea namque erit cubi latus, per coroll.* 17 *decimitertij,* B I *verò icosahedri, &* B Z *dodecahedri, per quartam huius. Dico* B E *latus cubi sic esse ad* B I *latus icosahedri, sicut potens rectas* B G G D, *ad potentem rectas* G B B D. *Quoniam (per duodecimam decimitertij)* B I *triplum potest recta* B G, *quæ ex* G B B D *verò tripla sunt eius quod ex* G D, *per quartam eiusdem. Erunt itaque (per decimamquintam quinti) quod ex* B I *ad quæ ex* G B B D *(tripla) sic quod ex* B G *ad quod ex* G D *(simplicia.) Sicut autem quod ex* B G *ad quod ex* G D, *sic est quod ex* B E *ad quod ex* B Z. *Nam recta* B G G D *&* B E B Z *sunt (per secundam huius) in eadem ratione. Cùm maximè* B Z *sit maius segmentum recta* B E, *per coroll.* 17 *decimitertij. Sicut itaque quod ex* B E *ad quod ex* B Z, *sic est quod ex* B I *ad quæ ex* B G B D. *Et vicissim quod ex* B E *ad quod ex* B I, *sic quod ex* B Z *ad quæ ex* G B B D. *Quod autẽ ex* B Z *æquum est eis quæ ex* B G G D, *per* 10 *decimitertij. Nam* B G *lateri exagoni,* G D *verò decagoni, per coroll.* 9 *eiusdem, æquantur. Erunt igitur quæ ex* B G G D *ad quæ ex* G B B D, *sic quod ex* B E *ad quod ex* B I. *Est ergo potens* B G G D *rectas recta* Z B. *Potens verò* G B B D *recta* M L. *Sicut itaque* Z B *(potens totam* B G *& maius segmentum* G D*) ad* M L, *potentem totam*

G E & minus segmentum E D, sic est E E cubi latus, ad E I icosahedri latus, per vigesimamsecundam sexti. Recta itaque linea secta extrema & media ratione, quam, &c.

Propositio octaua.

Dodecahedri solidum ad Icosahedri solidum est, sicut cubi latus ad Icosahedri latus, eidem sphæræ descriptorum.

Quoniam ostensum est quarta huius eundem circulum comprehendere & icosahedri triangulum, & dodecahedri quinquangulum eadem sphæra conceptorum, Sequetur, cùm æquales sint circuli eas bases capientes, in ipsos perpendiculares à centro æquales duci, per corollar. lemmatis decimasextæ duodecimi, & proinde pyramides super eorum solidorum basibus eiusdem esse verticis: Nam earum pyramidum vertices in centro concurrunt. Quare ad se erunt vt bases, per quintam & sextam duodecimi. Et hac de re pyramides dodecahedrum componētes, ad pyramides icosahedrum componentes, ad se erunt vt bases, quæ quidem sunt eorum solidorum superficies. Eorum itaque solida ad se erunt vt superficies. Sed superficies dodecahedri ad superficiem icosahedri fuit vt cubi latus, ad icosahedri latus, per sextam huius. Sicut itaque dodecahedri solidum ad icosahedri solidum, sic cubi latus ad icosahedri latus, eidem sphæræ inscriptorum, per vndecimam quinti. Dodecahedri igitur solidum ad icosahedri solidum est sicut, &c.

Corollarium.

Dodecahedri solidū ad Icosahedri solidū, ad se sunt vt suæ superficies in eadē Sphæra descriptæ scilicet vt cubi latus ad Icosahedri latus. *vt patuit, nā resoluūtur in pyramides eiusdē verticis.*

Propositio nona.

Si trianguli æquilateri latus certa fuerit superficies incerta erit, quæ vocatur Medium.



Sit triangulum æquilaterum A B G, à signo A in latus B G perpendicularis agatur A D: certa autem esto A B: Dico superficiem A B G mediam esse, quoniam A B sesquitertium potest recta A D, per corollarium duodecimæ decimitertij, qualia A B potest duodecim, talia A D potest nouē. Reliqua igitur B D eorum 3 poterit, cùm A B vtrasque A D & D B possit. Certæ itaque erunt A D D B, propositæ A B commensurabiles, per sextam decimi. Sed quia A D ad D B rationē potentia habet quam 9 quadratus ad 3 non quadratum. Ipsa nō sunt in quadratorum ratione, per corollarium 25 octaui, Nec ideo longitudine commensurabiles, per nonam decimi. Quod igitur sub A D D B certis potentia tantum commensurabilibus rectis, medium est, per vigesimamprimam decimi. Sed quod sub A D D B duplum est trianguli A B D, per 41 primi, quod sub A D D B itaque æquum est toti A B G, ipsius A B D duplo, per primā sexti, quare medium erit trianglum A B G. Si igitur trianguli æquilateri latus certa fuerit, &c.

Corollarium.

Si Octahedrum & trilatera æquilatera Pyramis, sphæræ cuius dimetiens certa est inscribantur, eorum superficies mediæ erunt. *Nam superficies illæ constant triangulis æquilateris, quorum latera dimetienti certæ sunt commēsurabilia, per decimamtertiam & decimamquartam decimitertij, & ideo certa sunt, sed potentia tantum ad perpendicularem commensurabiles, & igitur medium comprehendunt triangulum, vt patuit.*

Propositio decima.

Si Pyramis trilatera, æquilatera, & Octahedrum eidem Sphęrę inscribātur, basis pyramidis sesquitertia erit basi Octahedri, Octahedri verò superficies ad Pyramidis superficiem, sesquialtera erit.

Quoniam

Quoniam dimetiens sphæræ sesquialter est potentia lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij, octahedri vero lateris dupla est eadem dimetiens potentia, per 14 eiusdem. Qualia igitur dimetiens potest sex, eorum pyramidis latus poterit 4; octahedri vero latus eorundē 3 poterit. Pyramidis igitur ad octahedri latus rationem quam potētia 4 ad 3 seruabit, quæquidem sesquitertia nominatur. Eandem item habebunt rationem ex ipsis lateribus similia triangula (solidorū bases) quā habuerunt ex ipsis quadrata. Nam singulæ duplæ sunt rationis laterum, per vigesimā sexti, & proinde qualium basis pyramidis fuit 4, eorum quatuor eius bases erunt 16, similiter qualiū basis octahedri fuit eorundem 3, octo eius bases erūt 24. Octahedri igitur bases ad pyramidis bases rationem habent quam 24 ad 16, quæquidem est sesquialtera. Si itaque pyramis trilatera, æquilatera, & octahedrum eidem sphæræ inscribantur, &c.

Propositio vndecima.

Pyramis trilatera ęquilatera ad Octahedrum eidem Sphęrę inscriptum se habet, sicut rectangulum sub linea potente vigintiseptem sexagesimas quartas lateris Pyramidis, & sub linea octopartiente nonas eiusdem lateris comprehensum ad quadratum diametri Sphęrę.

Supponamus sphæram cuius dimetiens sit A B, *centrum verò* H. *Illi autem inscriptam esse pyramidē* A D C, *simulac octahedrum* A E K B G, *linea autem* N L *possit* $\frac{27}{64}$ *lateris* A C *pyramidis linea verò* L M *sit eiusdem lateris lōgitudine octopartiens nonas. Dico pyramidem* A C D *ad octahedrum* A E B *se habere, vt quod sub* N L, L M *ad quod ex* A B *quadratū. Quoniam quæ ab angulo* A *per centrum* H *ducitur perpendicularis basi pyramidis, in centrum* F *circuli basim continentis cadit, & rectam* H F *sextam ipsius* A B *partem efficit, per corollariū decimætertiæ decimitertij, tripla erit* H A *(quæ ex cētro) rectæ* H F, *& proinde tota* A F *ad* A H *erit vt 4 ad 3. Secetur pyramis* A D C *plano* K H G, *per centrum* H, *parallelo ipsi* D F C *basi, per corollariū decimæquintæ vndecimi. Eius itaque pyramidis triangulum* A D C *secabitur recta* K G *parallela ipsi* D C, *per 16 vndecimi. Sicut igitur* A F *ad* A H, *sic erit* A C *ad* A G, *per secundam sexti, sesquitertia itaq. erit* A C *ipsi* A G. *Quia verò similia sunt triangula* A D C *&* A K G, *& reliqua (plano* H K G*) secta inter se, per quintam sexti similes erunt pyramides* A D C *&* A K G *adinuicem, per septimam diffinitionem vndecimi. Ipsæ itaque erunt in tripla ratione laterum* A C *ad* A G, *per octauam duodecimi sed laterum* A C *ad* A G *fuit, vt 4 ad 3 ratio. Inuentis itaque (ex secunda octaui) quatuor numeris, in ea ratione cōtinuis & minimis, quiquidem erunt 64, 48, 36, 27. Perspicuum erit (ex decima diffinitione quinti) extremos 64 ad 27 triplicē habere rationē propositæ 4 ad 3 rationis, vel his in se ducta (1 &* $\frac{1}{3}$*) huius rationis quantitate ea consurget ratio 64 ad 27. Pyramis igitur* A D C *ad pyramidem* A K G *erit vt 64 ad 27, quæ est tripla ipsorum 4 ad 3. quia vero* A C *recta ipsius* A G *sesquitertia est longitudine, qualium* A C *potest 64, eorum* A G *potest 36. Nam dupla est ratio potentiarum rationis laterum 64 ad 48, per vigesimam sexti.*

Sit igitur triangulum æquilaterum Q R S, *super* R S *æquali posita ipsi* A G *constitutū, per primam primi, demissa in basim* R S *perpendiculari* Q T. *Extēdatur autem* R S *in* X, *fiatque (per corollarium sextæ decimi) sicut 27 ad 64 sic* R S *ad* R X, *secetur autem bifariam* R X *in* V *ducta* Q V, *quoniā* R S *æqualis est ipsi* A G, *qualium* A C *potest 64, eorum* R S *potest 36. nam* A G *ea posse ostensa fuit, qualium vero* R S *potest 36, eorum* Q T *potest 27, per corollarium 12*

[illegible] Qualium igitur A C [illegible] 64 eorum Q T potest 27, recta itaque Q [illegible] hypothesi. Rursus cũ posita [illegible] ipsi A G æqualis, fuit autem R X eorũ long[illegible] corundem vero erit A C (quia ipsius A G vel R S fuit sesquitertia) 3[illegible] erit 64 [illegible] R V (ipsius R X dimidia) corandẽ erit 32, qualiũ A C fuit 36, recta itaq[illegible] A C erit octopartiens nonas, & proinde ipsi L M quæ eiusdẽ A C fuit octopartiens nonas æqu[illegible] erit R V, cũ autẽ N L ipsi Q T & L M ipsi R V æquales ostensæ sint, rectangulũ sub Q T R V æquum erit rectãgula sub N L patente $\frac{27}{64}$ lateris A C, & sub L M octopartiente nonas eiusdem lateris A C, sed quod sub Q T R V duplum est trianguli Q V R, per 41 primi, eiusdem vero Q V R duplum est Q X R, per primam sexti totum igitur Q X R et quod sub Q T R V æquum erit, & proinde rectãgulo N M. Quia R X fuit posita 64 qualium R S fuit 27, triangula Q R X & Q R S per primã sexti in basium ratione erũt, vt 64 ad 27, sicut verò 64 ad 27 sic fuit pyramis A D C ad pyramidem A K G, sicut itaque N M vel Q R X ad Q R S, sic pyramis A D C ad pyramidem A K G, quia vero A H semidiameter est vertex pyramidis A K G, nec non binarum pyramidum octahedri communem basim in quadrato octahedri habentium æquari m & similium, per corollarium decimæquartæ decimitertij, erit sicut basis pyramidis A K G (quæ fuit Q R S) ad bina quadrata octahedri, hoc est ad quadratum diametri A B, ipsis quadratis (per quadragesimamseptimam primi) æquum, sic pyramis A K G ad actahedrum A E B, per sextam duodecimi. Cũ autem fuerit N M rectangulum ad Q R S basim, vt pyramis A D C ad pyramidẽ A K G basis vero Q R S ad quadratum B E fuit vt pyramis A K G ad octahedrum A E B sequetur æqua ratione sublatis medijs (per vigesimamsecundam quinti) esse, vt rectangulum N M ad quadratum B E, sic pyramidem A D C ad octahedrum A E B eidem sphæra inscripta, sed N M continetur sub N L potente $\frac{27}{64}$ lateris A C pyramidis A D C, & sub L M octopartiẽte nonas eiusdem A C, ex hypothesi. Pyramis itaque trilatera æquilatera ad octahedrum eidem sphæra inscriptum, se habet, &c.

Propositio duodecima.

Si Cubus Sphæra comprehendatur, duplum eius quod ex dimetiente æquum est omnibus Cubi superficiebus simul sumptis, perpendicularis autem à centro Sphærę in aliquam Cubi basim demissa, dimidio Cubi lateris æqualis erit.

Cùm enim (per decimamquintam decimitertij) dimetiens possit triplum lateris cubi, sequetur dimetientis duplum posse sextuplum eiusdem cubi lateris, atqui sextuplum potentiæ vnius lateris totam cubi superficiem complet, nam sex superficiebus quadratis componitur cubus, per vigesimamprimam diffinitionem vndecimi, æquis igitur lateribus comprehensis, dupla itaque dimetientis potentia, cubi toti superficiei erit æqualis, quia verò dimetiens cubi & ea quæ in bases eius oppositas fit perpendicularis, bifariam se in centro sphæræ cubum continentis secant, per corollarium secundum decimæquintæ decimitertij, totáque recta centra basium oppositarum coniungens, lateri cubi est æqualis, per trigesimamtertiam primi, cùm coniungat semidimetientes basium æquas & parallelas. Dimidia itaque dimidio cubi lateri æqualis erit, per decimamquintam quinti. Si itaque cubus sphæra, &c.

Corollarium.

Si potentię dimetientis duo tertia, in perpendicularem dimidio cubi lateri æqualem ducẽtes, solidum fecerimus, illud cubi solido æquum erit. *Nam duo tertia potentiæ dimetientis sphæra cubum ambientis, binis cubi basibus æqua esse patuit. Si itaque illis dimidia cubi altitudo conferatur, singula dimidio cubi solida efficient æqualia, per trigesimamprimam vndecimi. nam æquas habent bases. Bina igitur toti solido cubi æqualia erunt.*

MONITVM.

Priorum proximorum librorum theoremata absoluentes, quæ ab eis oriri videbantur corollaria eisdem contulimus, quorum plura huic decimaquarto Campanum tribuisse (cùm huc ventum fuit) reperimus, quæ iam duodecimi ac decimitertij theorematis à quibus oriuntur, coniunximus, reliquorum verò quæ scripsit Campanus singula suis locis contulimus. Horum autem aliqua 4 propositionibus & quinque corollarijs explicauit Ypsicles, satis tamen confusè. nos autem vt quæque sua forte discutiemus, quæ hoc libro à Campano omisimus, eo ordine quo ea enumerabimus, disponuntur vt quæque sua distribuantur serie, ac quæ à theorematis oriuntur corollaria eisdem associentur.

Quo

Quo ordine conueniant nostra Campani theorematis hoc decimoquarto.

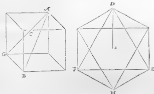
Campani ordo	1	2	3	4	5	6	7	*corol.7*	8	9	*corol.9*	10	11
Huius ordo	1	2	*corol.9. dec.tertij*	3	4	5	5	*corol.5*	6	7	*lemm.16 duodecimi*	*cor.8*	*cor.12 dec.ter.*

Campani ordo	13	13	14	15	16	17	*coroll.17*	*coroll.17*	18 *cũ coroll.*
Huius ordo	9	*corol.9*	10	*cor.13 dec.ter.*	*corol.14 dec.ter.*	11	*coroll.13. dec.ter.*	*coro.12. dec.ter.*	12 *cũ coroll.*

Expliciunt quæ partim à maioribus suscepimus hoc decimoquarto. Quæ autem eidem nostris deerant temporibus conferendis solidis mox subeunt.

Propositio decimatertia.

Idem circulus comprehendit & Cubi quadratum & octahedri triangulum eadem Sphęra descriptorum.



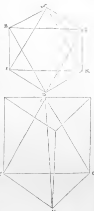
Esto cubus A B G, *octahedrũ esto* D E F, *eadem sphæra cuius dimetiens sit* A B *vel* D H *cõprehensa, quæ verò ex centris circulorum bases cõtinentium sint* C A *&* I D: *Dico eas esse æquales, quoniam dimetiens* A B *sphæræ cubum continentis potest triplũ lateris cubi* B G, *ex quintadecima decimitertij, cuius quidem lateris duplum potest (ex quadragesimaseptima primi)* A G *dimetiens basis cubi, quæ & circuli basim continentis, per nonam quarti, sphæræ dimetiens* A B *sesquialterum rectæ* A G *poterit, scilicet quarum partium* A B *potest* 12, *earum* A G *poterit* 8, *ac proinde recta* A C *quæ ex centro circuli erit duarum potentia. Sextuplum itaque potest sphæræ dimetiens, eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis, sphæra verò eiusdem octahedrum continentis dimetiens, eadem est scilicet* D H *ipsi* A B, *quæ & dimetiens quadrati quod ex lateribus fit octahedri. Et proinde duplum potest lateris eiusdem octahedri, per decimamquartam decimitertij, latus autem* D F, *eius quæ ex centro circuli triangulum octahedri continentis (scilicet* I D*) triplum potest, ex duodecima decimitertij, sextuplum igitur poterit rectæ* I D *(quæ ex centro) eadem dimetiens* A B *vel* D H, *quæ sextuplum potuit eius quæ ex centro circuli quadratum cubi continentis, rectæ ideo ex centris circulorum bases cubi & octahedri cõtinentium, sunt æquales, & ideo circuli, ex prima tertij. Idem itaque circulus comprehendit & cubi, &c.*

Corollarium.

Sequitur perpendiculares in sphæra coniungentes centra circulorum oppositas bases cubi & octahedri continentium, esse æquales. *Cùm circuli sint æquales, per secundum corollarium lemmatis 16 duodecimi, ac per centrum sphæræ centra basium coniungere, per primum corollarium eiusdem. Perpendicularis itaque octahedri oppositas bases copulans, lateri cubi æqualis erit: nam eorum habetur vtraque pro vertice recta.*

Propositio decimaquarta.

Octahedrum ad triplum Pyramidis eadem Sphæra comprehensæ rationem habet quam latera.



Esto octahedrum A B C D, *pyramis vero* E F G H, *super cuius basi* F G H *erectis perpendicularibus vertici pyramidis æqualibus constituatur prisma, illud triplum erit pyramidis* E F G H, *per primum coroll. 7 duodecimi. Dico octahedrum* A B C D *sic esse ad prisma triplum pyramidis* E F G H, *vt* E C *latus ad* F G *latus. Cum octahedri latera basium oppositarum sint recta sese tangentes. & parallela ad alias sese tãgentes, sunt enim opposita latera quadratorũ ex lateribus octahedri cõpositorum. Parallela erũt triangula plana octahedri opposita, scilicet* A B C *ipsi* K I D, *ac reliqua, per 15 vndecimi. Esto octahedri dimetiens* A D, *totum octahedrum secatur in quatuor pyramides æquas & similes super basibus octahedri & vertice constitutas, ac circa dimetientem* A D, *scilicet quæ super basi* B I D *vertice* A, *& basi* B C D *vertice* A, *super basi* I K D *vertice* A, *& super basi* C K D *vertice* A *cõstituuntur, quæ æquales erunt (nam singulæ binis octahedri basibus, ac binis triangulis sub dimetiente* A D *& binis octahedri lateribus comprehensis constant) per octauam diffinitionem vndecimi. Prisma igitur quod super octahedri basi & vertice constituitur, hoc est quod sub vertice parallelarum basium, vt ex præcedente patuit, æquum est tribus illarum octahedri pyramidum, per primum corollar. 7 duodecimi. Illud ideo prisma ad aliud prisma compositum sub eodem vertice ex totius octahedri quatuor pyramidibus, habebit rationem basium trigonarum, per tertium corollarium eiusdem quia igitur 4 pyramides ad 3 rationem habent sesquitertiam, sequetur prismatis quatuor pyramides cõtinentis trigonam basim, rationem habere sesquitertiam, ad basim prismatis tres eiusdem octahedri pyramides super eius basi ac vertice continentis, hoc est ad basim octahedri: sed eiusdem octahedri basis sesquitertia fuit basis pyramidis, per decimam huius. Aequales itaque erunt trigonæ bases, scilicet prismatis quatuor octahedri pyramides sub eius vertice continentis, basibus trigonis prismatis treis pyramides sub pyramidis* E F G H *vertice continentis, sed æquũ est prisma octahedri octahedro. Prisma verò pyramidis* E F G H, *eiusdem fuit triplum, quæ quidem super æquis basibus prismata ad se sunt vt vertices, per corollarium vigesimæquintæ vndecimi, nempe vt earũ dupla parallelepipeda, per corollarium trigesimæprimæ vndecimi. Vertex autẽ octahedri, lateri eadem sphæra contẽti cubi fuit æqualis, per corollarium decimætertiæ huius latus autem cubi ad pyramidis verticem, rationem habuit potentia quam 12 ad 16, per 18 decimitertij. Latus verò octahedri ad pyramidis latus eam habet quam 18 ad 24, per eandem quæ eadem est rationi 12 ad 16 verticum. Prisma igitur æquale octahedro, ad prisma triplum pyramidis eam habet quã vertices siue quam latera rationẽ. Octahedrum itaque triplum pyramidis eadem sphæra comprehensæ, rationẽ habet quam latera.*

Corollarium.

Pyramidis & Octahedri, proportionalia sunt latera verticibus. *Nam latera ac vertices sesquitertia fuêre potentia, insuper dimetiens sphæra ad pyramidis latus, vt octahedri latus ad cubi latus, nempe sesquialtera (ex 18 decimitertij) fuerunt potentia.*

Propositio decimaquinta.

Si certa proposita binas potens, totam & maius segmentum, rutsúsque binas, totam & minus segmentum fecerit, latus Icosahedri maius erit segmentum, latus autem Dodecahedri minus eadem Sphæra cõprehensorum.

Esto

Esto proposita recta A G *dimetiens sphæræ Icosahedrum* A B G C *continentis, cuius latus sit* A B. *Esto item recta* B G *subtendens angulum pẽtagoni ex icosahedri lateribus (per 16 decimiterty) descripti. Sit insuper ad eãdem* A G *vel* D F *sibi æqualem dodecahedrum* D E F H, *per decimamseptimã decimiterty, cuius opposita latera* E D F H *bifariam secentur in* I *&* K *iuncta* I K: *sit autem recta* E F *binos con iũctarum basium oppositos nectẽs angulos. Dico latus icosahedri* A B *esse maius segmentum, quod dimetiens* A G *potest simul cum tota, latus vero dodecahedri* E D *esse minus, quod eadem dimetiens* A G *vel* D F *simul cũ tota potest: quoniam icosahedri latera opposita* A B G C *dimetientibus* A G B C *iuncta, sunt parallela, per corol. secũdũ 16 decimiterty, recta* B G *&* A C *eas coniungentes æquales & parallelæ sunt, per 33 primi, insuper anguli* B A C A B G *æquis dimetientibus subtensi æquales (per octauã primi) erunt recti, per 29 primi. Recta ideo* A G *binas* A B B G *potest, per 47 primi: cùm autem* B G *subtendat angulum pentagoni ex lateribus icosahedri compositi, rectæ* B G *maius segmentum erit* A B *per octauã decimiterty, quodquidem potuit* A G *cum tota* B G. *Caterùm quia recta* I K *iungens opposita* E D F H *dodecahedri latera & parallela rectos efficit ad ea angulos, per corol. 3 decimaseptima decimiterty. Recta* E F *æquas & parallelas* E I F K *iungens, eidem* I K *æqualis erit, per 33 primi. Rectus ideo erit* D E F *angulus, per 29 primi: quare* D F *dimetiens binas* E D E F *potest, atqui rectæ* I K *minus segmentum est* E D *latus dodecahedri, per 4 corollarium 17 decimiterty. reliqua itaque* E F *(ipsi* I K *æqualis) minus idem segmentũ erit* E D. *Dimetiens igitur* D F *binas* E D E F *potens, per 47 primi, potest* E D *latus dodecahedri minus segmentum simul cum tota* E F. *Si ergo certa proposita* A G *vel* D F *binas* A B B G *potens totam & maius segmentum, rursúsque binas* E F E D *totam & minus segmentum fecerit, latus icosahedri* A B *erit maius segmentum, latus verò dodecahedri* E D *minus, eadem sphæra comprehensorum.*

Propositio decimasexta.

Si lateris Octahedri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus Icosahedri eadem sphæra comprehensi duplum potest minoris earum.

Esto octahedri A B G *latus* A B, *potens binas* C *&* H *rationẽ habentes quam tota ad maius segmentum, per coroll. 34 sexti. Sit autem icosahedrum* D E F *cuius latus* D E, *recta verò subtendens angulos pentagoni ex lateribus icosahedri facti esto* E F. *Dico rectam* E D *latus, duplum posse rectæ* H *minoris earum. Quoniam patuit ex demonstratis decimaquinta huius latus* E D *icosahedri maius segmentum esse rectæ* E F, *ac dimetientem* D F *binas* E D E F *posse, vt totam scilicet & maius segmentum. Potest autem (ex hypothesi) latus* A B *binas* C *&* H *eadem ratione coniunctas. Erit igitur* E F *ad* E D *vt* C *ad* H, *per secundam decimiquarti. Ac vicissim* E F *ad* C *vt* E D *ad* H, *per decimamsextam quinti, & quia* D F *binas* E D E F *potest,* A B *autem binas* C *&* H *erunt quæ ex* E F E D *ad quod ex* D F, *vt quæ ex* C *&* H *ad quod ex* A B. *Et vicissim quæ ex* E F E D *ad quæ ex* C *&* H, *sic quod ex* D F *ad quod ex* A B. *Atqui duplum potest* D F *dimetiens lateris* A B *octahedri eidem sphæra (ex hypothesi)*

inscripti, per decimamquartam decimitertij. Dupla itaque erunt quæ ex E F *&* E D *eorum quæ ex* C *&* H. *Ac ideo vna* E D *vnius* H *potentia, per duodecimam quinti. Duplum igitur potest* E D *latus icosahedri rectæ* H *minoris. Si ideo lateris octahedri potentia per binas rectas extrema & media ratione coniunctas exprimatur, latus, &c.*

Propositio decimaseptima.

Si latus Dodecahedri & recta cuius, id est, minus segmentum, ad angulum rectum constituantur, ea quę dimidium potest rectę subtendentis angulum, est latus octahedri eadem sphæra comprehensi.



Esto latus dodecahedri A B. *Recta verò cuius id latus est minus segmentum sit* A G, *scilicet iungens opposita dodecahedri latera, per quartum coroll. decimaseptimæ decimitertij, angulum rectum qui ad* A *componentes, iuncta* B G. *Possit autem dimidium rectæ* B G *recta* D, *per trigesimamquartam sexti: Dico rectam* D *latus esse octahedri eadem sphæra comprehensi. Quoniam recta* A G *efficit maius segmentum* G C *latus cubi eadem sphæra comprehensi, per idem quartū corol. decimæseptimæ decimitertij. Quæ verò ex tota* A G *& minori segmento* A B *tripla sunt potentiæ maioris segmenti* G C, *per quartam decimitertij. Insuper eiusdem quod ex* G C *latere cubi triplum potest sphæra dimetiens, per decimamquintam decimitertij. Recta igitur* B G *dimetienti erit æqualis. Nam ea binas* A B *&* A G *(per 47 primi) potest, siue ideo triplum rectæ* G C. *Atqui dimetientis dimidium potest latus octahedri eadem sphæra conclusi, per 14 decimitertij. Rectæ autem* B G *dimidium potuit recta* D, *ex hypothesi. Recta igitur* D *(dimidium eiusdem dimetientis potens) erit latus octahedri. Si itaque latus dodecahedri & recta cuius, id est, minus segmentum ad angulum rectum, &c.*

Corollarium.

Cuius rectæ latus octahedri sesquialterum potest, eiusdem latus dodecahedri eidem sphæræ inscripti est maius segmentum. *Nam latus dodecahedri est maius segmentum segmenti* C G, *cuius* D *latus octahedri potuit sesquialterum, hoc est, dimidium potentiæ* B G, *quæ fuit ipsius* G C *tripla.*

Propositio decimaoctaua.

Si latus Pyramidis possit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus Icosahedri eadem sphæra descripti sesquialterum potest minoris rectæ.





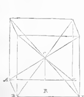
Esto pyramis A B C, *latus autem* A B, *cuius potentia secetur in rectas* A G *&* G B *extrema & media ratione coniunctas, scilicet in* A G *totam, &* G B *maius segmentum, per coroll. 34 sexti. Sit item* E D *latus icosahedri* E D F *eadem sphæra contenti. Recta verò subtendens angulum pentagoni ex lateribus icosahedri descripti esto* E F: *Dico* E D *latus icosahedri sesquialterum posse minoris rectæ* G B. *Quoniam (per ea quæ demonstrata sunt decimaquinta huius) latus* E D *maius segmentum est rectæ* E F *angulum pentagoni subtendentis. Est autem sicut* E F *tota ad* E D *maius, sic idem maius ad minus, per 30 sexti, & (per hypothesim) recta* A G *fuit tota,* G B *verò maius segmentum. Erit ideo sicut* E F *ad* E D *sic* A G *ad* G B, *per secundam decimiquarti. Et*

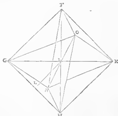
vicißim

[illegible] L F ad A G & F E D ad G B. Cùm autem A B binæ A G G B possit, ex hyp[illegible] erit, ex 48 primi. Rectus autem est D E F, per demonstrata 15 huius. [illegible] A G B F E D triangula, per sextam sexti. Eorum itaque proportionalia erunt la[illegible] ad A B, per quartam sexti. Est autem (ex eisdem demonstratis) F D dimetien[illegible] bientis. Quæ sesquialterum potest lateris A B pyramidis eidem sphæræ inscriptæ per 12 [illegible], sesquialterum igitur poterit E G latus octahedri, recta G B maioris segmenti, siue minor [illegible] Si itaque latus pyramidis possit duas rectas extrema & media ratione coniunctas, latus icosahedri eadem, &c.

Propositio decimanona.

Cubi superficies ad Octahedri superficiem eidem Sphęræ inscripti, se habent vt solida.





Esto cubus A B C D E, cuius quatuor dimetiëtes sint A C B C D C E C vtrinque producti. Sit item octahedrum eidem sphæra inscriptum F G H K. Cuius tres sint dimetientes F H G K O N: Dico esse cubum A B D ad octahedrum F G H, vt cubi superficies ad octahedri superficiem. A centro cubi in basim A B E D sit perpendicularis C R. A centro verò octahedri in basim G N H perpendicularis I L. Quoniam tres cubi dimetientes per centrum C transeunt, ex secundo coroll. decimæquintæ decimitertij, fient ex cubo sex pyramides vt hæc A B D E C toti cubo æquales, cùm sint cubi sex bases in quas æquales à centro perpendiculares cadent, per coroll. lemmatis decimæsextæ duodecimi, cum æqualibus in sphæra circulis insistant bases. Caterùm in octahedro tres dimetientes super octo basibus, octo constituunt pyramides verticem in centro habentes, per tertium coroll. decimæquartæ decimitertij. Bases autem cubi & octahedri æqualibus in sphæra continentur circulis, per 13 huius. Qui itaque æquè distant à centro, ac perpendiculares C R I L æquales erunt, per coroll. lemmatis decimæsextæ duodecimi. Erunt itaque pyramides cubi sub eodem vertice cum octahedri pyramidibus, nempe sub perpendiculari a centro in bases. Pyramides igitur sex cubi, ad octo pyramides octahedri sub eodem vertice existentes, ad se erunt vt bases, per sextam duodecimi, hoc est, vnica pyramis super sex cubi basibus vertice autem perpendiculari, quæ ipsis sex æquatur, per eandem, ad vnicam super octo octahedri basibus, ipsi octahedro æqualem, ac sub eodem vertice, rationem habebit quam habent sex cubi bases, quæ totam implent cubi superficiem, ad octo actahedri bases totam octahedri superficiem complentes. Earum etenim solida ad se sunt vt bases, ex eadem sexta duodecimi. Cubi igitur superficies ad octahedri superficiem eidem sphæræ inscripti, se habet vt solida.

Propositio vigesima.

Si Cubus & Octahedrum eadem Spbæra comprehendantur, erit eorum ratio quæ lateris cubi ad semidimetientem Sphęræ.

Esto octahedrum A E C D B sphæræ A B C D inscriptum, cubus verò eidem sphæræ inscriptus esto F G H I M cuius dimetiens sit H I quæ quidem æquatur dimetienti A C, per decimamquint[illegible] decimitertij, dimetientis dimidia sit A E Dico esse cubum F G H I M ad octahedrum A B C D E sicut [illegible] us M G ad

A E semidimetientem. Cùm dimetiens A C possit duplum lateris B K octahedri, per decimãquartam decimitertij, triplum vero lateris cubi M G per 15 eiusdem, sesquialterum erit B K D L quadratum quadrati ipsius cubi F M. A recta A E secetur pars tertia A N, a recta M G similiter tertia G O, per nonam sexti. Duo igitur tertia recta A E erit E N, necnon M O recta M G, parallelepipedum igitur quod super basi B K D L vertice vero E A, triplum est eius quod super eadem basi, vertice autẽ A N, per coroll. trigesimæprima vndecimi, sed & triplũ pyramidis A B K D L, quæ super iisdem basi & vertice, per corollariũ secũdum septimæ duodecimi, pyramis itaque A B K D L æqualis est parallelepipedo quod super basi sua B K D L, vertice vero A N constituitur, per septimam communem sententiam. Eius porrò parallelepipedi duplum est quod super eadem basi B K D L duplo vero vertice E N, per corollarium trigesimæ primæ vndecimi, pyramidis verò duplum est octahedrum A B K D L C, per corollarium secundum decimæquartæ decimitertij. Octahedrũ igitur A B K D L C æquũ est parallelepipedo super basi B K L D, vertice autem E N constituto, per decimamquintam quinti, sed parallelepipedum quod super basi B K D L, sesquialtera basi F M, vertice verò duobus tertiis M O lateris cubi M G continetur, æquum est cubo F G, per secũdam partem trigesimæquartæ vndecimi, ipsi autem F M sesquialtera fuit B K D L basis. Bina itaque parallelepipeda quod scilicet super basi B K D L, sesquialtera basi ipsius cubi, vertice verò M O duobus tertiis lateris M G cubi, quod cubo fuit æquum, ac quod super eadem basi B K D L vertice autem E N, quod octahedro fuit æquum, ad se erunt vt vertices M O ad E N, per corollarium trigesimæprima vndecimi, ac proinde sicut vertices M O ad E N sic erit cubus F G H I M ad octahedrum A B K D L C, per septimam quinti, sicut autem M O ad E N sic tota M G ad totam E A, per decimamoctauam quinti, sicut igitur M G latus cubi ad E A semidimetiẽtem, sic cubus F G H I M ad octahedrum A B K D L C eidem sphæræ inscripta. Si itaque cubus & octahedrum eadem sphæra comprehendantur, &c.

Corollarium.

Quinque solidorum laterum potentias à dimetientis potentia distinguere.

Pyramidis & cubi latera secant potentiam dimetientis sphæræ in binas rationem potentia duplam habentes, Octahedrũ in binas æquales, Icosahedrum in binas duplam extremæ & mediæ rationem habentes, quarum minor est latus, Dodecahedrum vero in binas quadruplã extremæ & mediæ rationem habentes potentias, quarum minor latus est. Nam dimetiẽs sphæræ A D potest latus pyramidis A E & cubi E D, eiusdem dimidium potentia, hoc est dimetientem, & latus basis cubi, Octahedri vero bina potest A C C D æqualia sphæræ dimetiens latera, Icosahedri autem potest totam A C & eius maius segmentum E D latus, ex decimaquinta huius. Quare earũ potentiæ duplam rationem habentes quam latera, per primum corollarium vigesimæ sexti, duplam habent extremæ & mediæ rationem, dodecahedri autem potest dimetiens totam A F & eius minus segmentum F D latus, per eandem decimamquintam. Quare tota ad minus habens duplam extremæ & mediæ rationem, scilicet totius ad maius, per decimam diffinitionem quinti, efficit potentiarum rationem duplæ duplam, per idem primum corollarium vigesimæ sexti, quæ est extremæ & mediæ quadrupla, per quintam diffinitionem sexti.

MONITVM.

Hac itaque lege, data dimetiente sphæræ dabitur cuiusuis corporum inscriptorum latus, eorum autem corporum cùm tria habeant latera proposita dimetienti potentia tantum commensurabilia, longitudine

*gitudine vero nequaquam. Nam eorum potentiæ sunt in ratione quadrati ad non quadratum, qua-
re quadratorum rationem non habent, per corollarium vigesimæquintæ octaui, nec ideo latera lon-
gitudine commensurabilia, per nonam decimi. Hac de causa suffecit potentias illorum laterum inter
se conferre non autem longitudines, quæ quidem potentiæ repeririuntur in dimetientis potentia scili-
cet a potentia dimetientis auferatur potentia cubi superest pyramidis potentia, sublata vero pyra-
midis relinquitur cubi, sublata autem dimidia relinquitur octahedri lateris potentia, sed quia dode-
cahedri latera ac icosahedri ex se incerta (nam hoc minor ex decimasexta, illud vero apotome, ex
decimaseptima decimitertij) probata sunt, dimetienti propositæ certa aquè longitudine & potentia
sunt incommensurabilia quare eorum affinitas nulla ratione numeris expressa diffiniri potest (per
octauam decimi) nec inter se nam sunt incertarum diuersæ species adinuicem incommensurabiles,
eo quod si commensurabiles essent, eiusdem essent speciei, per centesimamtertiam & centesimāquin-
tam decimi, quod abest. Nos itaque potentiæ dimetientis ea conferre volentes, nec aptius quàm per
rationes potentiam illam certam ac propositam per eorum latera secantes, exprimere visum est, scili-
cet diuisa dimetientis potentia per lineas rationem maioris ad minus segmentum habentes, illud mi-
nus latus esse icosahedri, per rationem vero totius ad minus habentes, latus dodecahedri satis super-
que expressum haberi, vt inter incommensurabilia fieri licet.*

*Cæterùm qui, vt sæpius diximus, Euclidis restitutionem in priorē sui ortus (aut pro viribus proxi-
mū) statum reducere nitimur, id vnū his decimoquarto & decimoquinto vltimis elemētorum libris
animaduersione dignum arbitrati, cùm ad hos vētum est, comperimus Theonis cœptam operam sub-
iisse (vt fertur) Ypsiclem, Campanum autem in omnes sua dilatasse exposita. Ypsiclis attamē parcitas
Campani luxum comitans, verisimilis ab Euclide cœpti, videntur intelligētia caruisse. Nimirum vt
verior elementorum ordo expostulat, post eidem sphæræ inscripta decimotertio quinque corpora, con
sequens erat Euclidem decimoquarto affinitates seu eorum respectus per latera, bases, aut angulos
depromere, vt testari cœperant 4 & corollar. 3 & 4 Ypsiclis, Campani autem 8 9 10 14 17, quibus
quatuor corporum conferētias, scilicet icosahedri ad dodecahedrum, & cubum, octahedri verò ad cu
bum & pyramidē tantum designantes, per latera circunferentias vel solida, sex reliquarū obliti quæ
optatum denarium conferentiarum complerent numerum, haud secus quam decimoquinto optantes
20 inscriptiones, Ypsicles 5, Campanus 12 tātum ab Euclide se recepisse dixerunt hic 8, ille verò 15
posteris relinquens demonstrandas. Nos idcirco geometrici cultus auidi, quæ decimoquarto compe-
tunt adijcientes, reliquas sex conferentiarum demonstrationes perfecimus quarum tres tantùm de-
cimoquarto apponendas rati, reliquas totidem nostro decimosexto aptiores distulimus, scilicet dode
cahedri ad cubum & pyramidem cubique ad pyramidem. Hæc nanque licet eadem capiantur sphæra,
vt decimotertio patuit, quia nihilominus eadem sibipsis inscribuntur, vt proximo decimoquinto di-
cemus, inuariata eorum quantitate aut ratione. Nempe cubus & pyramis dodecahedro, pyramisque
rursus cubo, duplicem eorum conferentiam vitantes, soli decimosexto illas competere visum est, mu-
tuas inscriptionum cōferentias exponenti. Nam sicuti decimoquarto corpora eadem sphæra decimo-
tertio concepta cōtulimus, non secus decimoquinto inscripta, inter se conferēda decimosexto venīut,
ne Euclidis tam fauste cœptus elegans elementorum ordo, nostra deperiret incuria.*

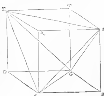
LIBRI DECIMIQVARTI FINIS.

EVCLIDIS DEMONSTRATIO-
num restitutarum Liber decimusquintus.

Propositio prima. *Problema primum.*

IN dato cubo, trilateram æquilateram Pyramidem describere.

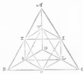
Exponatur cubus A B G D Z I T E, *& ducantur ab vno eius angulo basium dimetientes* E A E G E I *coniunctis* A G A I G I, *Perspicuum est quatuor triangula* A E G A E I A G I *&* G E I *æquilatera esse, cùm ex æqualium quadratorum dimetientibus fiant. Ab vno igitur triangulo* A G I *a tribus cubi angulis ducto, tria cõstituũtur triangula* A E G A E I, *&* G E I *ad vnũ signũ* E *(angulũ scilicet cubi) æquilatera. Pyramis itaq; trilatera & æquilatera erit* A G I E *solidum, per decimam diffinitionem vndecimi, cubo* A B G D Z I T E *inscripta, per vigesimamsextam diffinitionem eiusdem. In dato igitur cubo, &c.*



Propositio secunda. *Problema 2.*

In data trilatera æquilatera Pyramide, Octahedrum describere.

Esto pyramis trilatera æquilatera A B G D, *cuius latera secentur bifariam in* E Z I K L T, *cõiunctis* E Z Z I I E K L L T T K E K K Z Z L L I I T T E, *rectis duodecim: quæ quidem (per quartam primi) sunt æquales. Nam subtendunt pyramidis basium planos æquales angulos, æquis lateribus (nempe laterum pyramidis dimidiis) comprehensos. Triãgula igitur æquilatera erunt* T K L T L I T I E T E K, *&* Z K L Z L I Z I E Z E K, *solidum* T K L E T I *concludentia. Quod igitur octahedrum erit, per vigesimamsecundam diffinitionem vndecimi, cuius quidem anguli tangunt pyramidis* A B G D *latera in signis* E Z I T K L, *ipsi igitur pyramidi inscriptum erit octahedrum. In data itaque trilatera, &c.*



Corollarium.

Hinc subest Pyramidem secari bifariam, tribus quadratis æqualibus Octahedrum bifariam secantibus, & sese ad rectos dispescentibus. *Nam tres eorum dimetientes, in centro bifariam sese ad rectos secant, per tertium corollarium decimæquartæ decimitertii. Quæquidem quadrata vt* E K L I *discernunt pyramides & prismata, scilicet* K L T D *pyramidem &* K L T E I A *prisma, ab* E K Z B *pyramide, &* E K Z I L G *prismate, quæ sibi sunt æqualia, per tertiam duodecimi, haud secus efficiũt reliqua* K Z I T *ac* Z L T E *quadrata, octahedrum bifariã secantia, ex corollario secundo decimæquartæ decimitertii.*

Propositio tertia. *Problema 3.*

In dato cubo, Octahedrum describere.

Sumatur

Sumatur cubus A B C D E F G H, *cuius secentur singula latera bifariam, ductis rectis sectiones coniungentibus, vt* P Q R S, *quæ æquales erunt lateri cubi, per 33 primi, ac sese bifariam secabunt in medio dimetiente* A G *in signo* I, *per corollarium 34 primi. Quod igitur erit cētrum basis cubi, sint aliarum basium centra eadem lege comperta* K L O N M, *coniunctis* L I I M M O O L K I K L K M K O *&* N I N L N M N O, *quoniam rectus est angulus* I P L, *cum parallelæ sint* I P P L *ipsis* R A A B, *per decimam vndecimi quem subtendit* I L *recta, dimidia scilicet cubi latera angulum* I P L *rectum continentia, similiter* I M *angulū subtendens* I Q M *eidem* I P L *æquum & æqualibus rectis cōprehensum, non aliter & reliquæ* M O O L K I K L K M K O N I N L N M N O *eidem angulo* I P L *æquales, & æquis lateribus comprehensos subtendent, quæ ideo (per quartam primi) æquales rectæ erunt. Triangula itaque* K L I K L O K M I K M O *&* N L I N L O N M I N M O *æquilatera & æqualia erūt, solidū* I K L O N M *concludentia, quod igitur octahedrum erit, per vigesimamsecundam diffinitionem vndecimi. Cùm autem eius anguli simul bases in signis* I K L O N M *ipsum cōtinentis cubi tangant, sequetur octahedrum ipsi cubo inscriptum esse, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque cubo octahedrum descripsimus.*

Corollarium.

Rectæ basium oppositarum cubi centra coniungentes, bifariam & ad rectos in centro cubi (siue Sphæræ eum continentis) sese secant. *Cum enim angulos octahedri cubo inscripti rectæ* L M I O *centra coniungētes nectant, sequetur (ex corollario tertio decimaquarta decimitertii) ipsas in signo sese bifariam secare, sed & dimetientes cubi bifariam secant, per 39 vndecimi: illud igitur signum centrum erit sphæra cubum continentis. Nam centro signo, interuallo verò aliqua ex semidimetientibus, sphæra ducetur per cubi angulos, interuallo autem dimidia* L M *sphæra, haud secus per octahedri angulos ducetur.*

Propositio quarta. Problema 4.

In dato octahedro, cubum describere.

Sit octahedrum A B G D E Z. *Sintq́ bina eius pyramides* A B G D E *&* Z B G D E. *Ipsius vero pyramidis* A B G D E. *Sumantur centra triangulorum, hoc est, circulorum triangula continentium, quæ sint* T I K L. *Per ea centra parallelæ ducantur lateribus quadrati* B G D E, *rectæ* M T N N L X X K O *&* O I M, *quæ cum secent proportionaliter rectas æquales* A B A G A D A E, *per secundam sexti, ipsæ concurrent in signis* M N X O. *Æquales igitur erūt (per quartam primi) rectæ* M N N X X O O M, *angulos qui ad* A *æquales & æquis lateribus contentos subtendentes. Et insuper cum sint parallelæ ipsis* B G G D D E E B *quadratum efficientibus, & ipsæ quadratum efficient* M N X O, *per decimam vndecimi, & ipsi* B G D E *parallelum, per 15 eiusdem. Nam omnes sunt tangentes sese in segmentis. A centris autem* T I K L *ducantur rectæ* T I I K K L L T. *Coniungatur verò* A I C *recta. Cùm trianguli æquilateri* A B E *centrum sit* I, *recta* A I *bifariam secat* B E *rectam, per coroll. duodecimæ decimitertij. Quia vero parallela* M O *ipsi* B E *aufert triangulum* A I O *simile toti* A C E, *per coroll. secundæ sexti. Recta* M O *bifariam secta erit in* I, *per quartam sexti, similiter bifariam sectas esse* M N N X X O *ostendemus, in* T L K. *Quare & similiter rursus bases* T I I K K L L T, *æquos angulos rectos, & æquis lateribus comprehensos, qui ad* M O X N

subtende[illegible] [illegible]s erunt. Cæterum quia isosceles T I M *trianguli, qui ad basim* [illegible] *sunt æquales a* [illegible] *ntam primi, rectus autem fuit qui ad* M *dimidium recti igitur efficient singu-* [illegible] *per coroll 32 tertij. Haud secus æquales erunt* O I K O K I. *Et igitur reliquus* T I K *rectus e* [illegible] *er 13 primi. Rectæ enim* T I *&* K I *super ipsam* M O *consistunt, eodem argumento* [illegible] *stendentur* I K L *ALT LTI reliqui anguli, & in eodem ipsius* [illegible] X O *plano consistunt, per* [illegible] *sistimam undecimi. Planorum igitur triangulorum angulum solidum qui ad* A *constituentium centra coniungentes rectæ, quadratum* I T K L *efficiunt. Similiter ostenditur reliquorum quinque octahedri solidorum angulorum qui ad* B G Z D *&* E *plana triangula, in suarum basium centris quadrata suscipere, quæ quidem numero sex erunt, cum sint sex solidi octahedri anguli, & æqualia: nam eorum latera æquales inclinationum angulos æquis lateribus comprehensos, nempe eis quæ a centro in latus triangulorum æqualium comprehendunt, per coroll secundum decimæoctaua decimitertij. Erit* I T K L R P V S *itaque cubus, per vigesimamprimam diffinitionem vndecimi, angulos in octo basium octahedri centris habens, ideóque in eo descriptus. In dato itaque octahedro cubum descripsimus, &c.*

Propositio quinta. *Problema 5.*

In dato Icosahedro, Dodecahedrum inscribere.

Proponatur icosahedrum, cuius aliquis solidorum eius angulorum sit Z. *Quoniam (per ea quæ 16 decimitertij ostensa sunt) triangulorum angulum icosahedri efficientium bases, pentagonum circulo inscriptum efficiunt, sit illud* A B G D E, *ex quinque triangulorum basibus, quorum reliqui plani anguli angulum* Z *solidum componunt descriptum. Suscipiantur autem centra circulorum triangula quinque prælibata continentium, quæ sint* I T K M L, *coniunctis* I T T K K M M L L I. *A signo autem* Z *in planum pentagoni* A B G D E *demissa perpendicularis, in centrum circuli ipsum* A B G D E *capientis cadit, per demonstrata eadem decimasexta decimitertij. Ab ipso verò centro perpendiculares in latera pentagoni* A B G D E *demissæ in* C N *&* O, *bifariam secant rectas* A B B G G D, *per tertiam tertij. Iungantur rectæ* C N N O, *quæ cùm subtendant pentagoni angulos* C B N N G O *æquis lateribus contentos, æquales erunt, per quartam primi. Itidem à signo* Z *perpendiculares in easdem* A B G D E *bases fiant, ipsis similiter bifariam secabunt, per tertiam tertij. Nam perpendiculares per centrum transeunt, per coroll. duodecimæ decimitertij. Ipsæ itaque in signa* C N O *cadent. Cum autem æquales sint* Z I I C *rectis* Z T T N *&* Z K K O, *ex similitudine æqualium triangulorum parallelæ erunt* I T *&* C N, *per secundam sexti, necnon* T K N O, *anguli itaque* I T K C N O *æquales erunt, per decimam vndecimi. Quia rursus isoscelia sint triangula* C B N N G O. *Anguli* B C N B N C *æquales erunt, ac eisdem* G N O G O N, *æqualium & similium triangulorum anguli, per quintam primi. Sed tres* B N C C N O O N G *anguli, binis rectis sunt æquales, cùm super rectam* B G *consistant, per 13 primi. Trianguli verò tres* B N C B C N *(vel* G N O*) &* N B C *binis item rectis sunt æquales, per 32 primi. Ipsis* B N C *&* G N O *ablatis, reliquus* C N O *reliquo* C B N *æquus erit, & proinde eidem* C B N *æquus erit reliquus* I T K, *qui igitur pentagoni angulus erit, similiter ostendentur reliqui* T I L I L M L M K M K T *reliquis* B A E A E D E D G D G B *æquales esse. Quinquangulum igitur erit* I T K M L *æquilaterum & æquiangulum, per quartam primi Subtendunt enim bases pentagoni* I T K M L *æquales, angulos æquos qui ad* Z *æquis lateribus comprehensos. Præterea in eodem plano esse quinquangulum* I T K M L *patet. Cùm anguli* O N C N C P *in eodem sint plano* A B G D E. *Eidem verò plano parallela sint angulorum* L T I T I L *plana, per 15 vndecimi. Concurrunt autem* L T I *&* T I L *triangula. Ipsa igitur in eodem sunt plano, per coroll. 16 vndecimi. Similiter ostendemus* I L M L M K M K T *in eodem reliquorum* L T I *&* T I L *plano esse. Angulum igitur icosahedri qui ad* Z *solidum subtendit pentagonum æquilaterum & æquiangulum planum, & in centris triangulorum angulum* Z *constituentium habens angulos planos. Similiter igi-*

tur

[illegible] reliquos vndecim icosahedri solidos angulos, æquos & similes ipsi [illegible] subtensos esse similibus & æquis pentagonis, & simil[illegible] [illegible] cum communia latera sint rectæ centra basium icosahedri co[illegible] tur duodecim [illegible] pentagona solidum concludere, quod ideo dodecahedrum erit per [illegible] decimi. Icosahedro [illegible] quinque latera pentagono A B G D E concipiuntur descr[illegible] que icosahedro [illegible] [illegible]hedrum inscripsimus.

MONITVM.

H[illegible] quæ ab Euclide tradidit Ypsicles diximus, quinque scilicet problemata eousque succin[illegible] obscuriora [illegible] fuerint, quorum ideo demonstrationes variare cogimur, maxime huius quintæ præcipuam partem a Campano relictam, ab Ypsicle verò nō plenè ostensam, scilicet constructum pentagonum in eodem degere plano, præcipuum inquam solidis construendis probandum, eorum facies planas esse. Præterea quæ demonstrat Ypsicles ea sæpius arte tradit qua effectum proponens causam [illegible] ac si ab quodam auditum receperit effectum qui causam ignoraret, non tamen ideo Ypsiclem [illegible] id ignorasse dicemus, sed forsan quadam incuria aut temporum iniuria velut [illegible] ad vos peruenisse. Quæ vt clarius resonemus in prolixitatis quandam nos perduxerunt speciem.

Propositio sexta. *Problema [illegible].*

In dato Octahedro, Pyramidem trilateram æquilateram figurare.

Esto propositum octahedrum A B G D E I, cui inscribenda sit pyramis, sumantur octahedri quatuor bases, hoc est tres infimā E G D ambientes, hæ quidem A E G B E D & I G D, quarta insuper infimè opposita A I B, earum autem centra H C N L, super triangulo H C N construatur pyramis H C N L, quoniam bases octahedri A G E A B I concidunt in rectas E G B I, quæ opponuntur in quadrato G E B I octahedri, mittantur a signo A per basium centra H L perpendiculares A H F A L K eas secantes in F & K bifariam, per corollarium duodecimæ decimiertij. Recta igitur F K sectiones iungens parallela erit & æqualis octahedri lateribus E B G I, per trigesimamtertiam primi, rectáque H L secans latera A F A K æqualia proportione (namque A H & A L ex centris circulorum æqualium prodeunt) parallela erit rectæ F K per secūdam sexti, necnō octahedri E B G I lateribus, per nonam vndecimi. Erit ideo A F ad A H vt F K ad H L, per quartam sexti, sunt enim similia A F K & A H L triangula, per corollarium secundæ sexti sed A F sesquialtera est rectæ A H, nam latus E G efficit H F dimidiam rectæ A H, per corollarium duodecimæ decimiertij, rectæ igitur H L sesquialterum erit F K vel G I latus octahedri. Hac arte reliquarum H N N C C L L N C H rectarum pyramidem H N C L componentium, latera octahedri sesquialtera esse docebimus, & proinde rectas æquales esse, ac ideo ex ipsis descripta triangula H C N H N L N C L & C H L pyramidem H N C L componentia, æqualia & æquilatera esse, quæ cum angulos H C N L in centris basium octahedri terminet, eidem octahedro inscripta erit per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque octahedro pyramidem trilateram, &c.

Corollarium.

Pyramidis octahedro inscriptæ bases, basibus octahedri sunt parallelæ. *Cùm enim latera basis pyramidis sese tangentia, lateribus octahedri sese tangentibus sint parallela, vt fuit H L lateri G I, parallela sunt per ipsis plana, per decimamquintam vndecimi.*

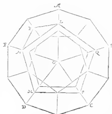
Corollarium secundum.

Recta coniungens centra oppositarum octahedri basium, sesquialtera est perpendicularis ab angulo inscriptæ pyramidis in basim. *Cum enim pyramis & eam continens cubus ad eadem signa terminent angulos, ex prima huius, vtraque eodem claudentur octahedro per quartam huius.*

At cubi dimetiens centra basium oppositarum octahedri iungit,& proinde est dimetiens sphæra cubum & cubo inscriptam pyramidem continentis, per decimamtertiam & decimamquartam decimiterty, quæ dimetiens sesquialtera fuit eius quæ ab angulo in basim perpendicularis in pyramide missa est nam quæ a centro in basim sexta fuit dimetientis, per corollarium tertium decimætertia decimiterty. Qualium igitur dimetiens fuit sex earum perpendicularis erit quatuor.

Propositio septima. *Problema 7.*

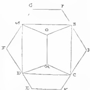
In dato Dodecahedro, Icosahedrum constituere.



Esto dodecahedrum A B C D E, *circulorum vero sex eius bases continentium, sint centra* L M N P Q O *quæ coniungantur rectis* O L O M O N O P O Q, *& reliquis* L M N P Q, *cum pentagona æqualia & æquilatera circulis contineantur æqualibus, à centro eorum in latera demissæ perpendiculares æquales erũt, per decimamquartam terty, & bifariam secabunt dodecahedri latera, per tertiam eiusdem. Concurrent itaque præfatæ perpendiculares in signo bifariæ sectionis, vt* L F M F, *sed & angulos æquos suscipiunt, nempe inclinationem basium dodecahedri, per secundum corollarium decimæoctauæ decimiterty, subtensæ igitur* L M M N N P P Q Q L *& reliqua bina basiũ centra coniungentes æquales erunt, per quartã primi. Triãgula igitur* O L M O M N O N P O P Q O Q L *& reliqua, similiter à centris pentagonorũ orta, erunt æquilatera & æqualia. quia verò dodecahedri duodecim pentagonorũ sexaginta sunt anguli plani, quorum terni quique singulos dodecahedri solidos efficiunt angulos. Sumemus hinc viginti dodecahedri solidos esse angulos, sed eorum singulos subtendunt singula icosahedri triangula, quæ scilicet pentagonorum (angulum solidum componentium) centra coniungũt, vt patuit, viginti igitur triangula æqualia & æquilatera, viginti solidis dodecahedri angulis subtensa, communia inter se latera a centris pentagonorum ducentia, icosahedrum component, per vigesimãquartam diffinitionem vndecimi, proposito dodecahedro inscriptum, per vigesimamsextam diffinitionẽ eiusdem, cum anguli simul bases dodecahedri simul tangant. In dato itaque dodecahedro icosahedrum constituimus.*

Propositio octaua. *Problema 8.*

In dato dodecahedro, cubum includere.



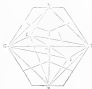
Describatur (ex decimaseptima decimiterty) dodecahedrum, & ex eadem sumantur duodecim cubi latera, quæ singula subtendant duodecim dodecahedri basium singulos angulos nam cubi latus angulum huius pentagoni subtendit, per corollarium secundum decimæseptima decimiterty. Si igitur dato (ex eadẽ decimaseptima) dodecahedro duocim duxerimus subtensas, octo dodecahedri angulis terminatas, similiq; situ cohærentes, vt ibidem patuit, manifestum erit huic dato dodecahedro ab eisdem eius angulis ductas rectas præfatum cubum designare, qui ideo in dodecahedro inclusus erit, cum cubi latera in basibus, & anguli in dodecahedri sedeant angulis, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi, sumptis nanque quatuor dodecahedri pẽtagonis A G I B O B H C N O C K E D N *&* D F A O N, *iungantur rectæ* A B B C C D D A, *quæ ideo quadrilaterum æquilaterum efficient, cũ singulæ rectæ æquos*

æqualium

æqualium pentagonorum subtendunt angulos, recto vero vt ostendimus dodecahedrum præfata decimæseptima construentes. Sex itaque bases quadratæ cubum (ex vigesimaprima diffinitione vndecimi) constituunt, cuius octo anguli in octo dodecahedri angulis cohærentes cubum dodecahedro inscriptum (ex vigesimasexta diffinitione vndecimi) perhibent. In dato itaque dodecahedro cubum inclusimus.

Propositio nona. *Problema 9.*

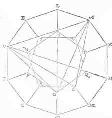
In dato Dodecahedro, Octahedrum concludere.



Esto propositum dodecahedrum A B G D E, *cuius sumantur (ex tertio corollario decimæseptimæ decimitertij) sex latera inter se opposita, quorum bifarias sectiones, iungunt tres rectæ se ad centrum sphæræ dodecahedrum ambientis bifariam & ad rectos secantes, quæ sint* A B G D C I *centrum verò* E. *Cum ideo (per præfatum corollarium) tres illæ rectæ sint æquales, sequetur (ex quarta primi) subtendentes illarum dimidias angulos rectos continentes, quæ sunt* A G G B B D D A C A C G C B C D *&* I A I G I B I D *æquales esse. Ac proinde octo triangula* C A G C G B C B D C D A I A G I G B I B D *&* I D A *æqualia & æquilatera esse, & ideo octahedrum esse* A G B D C I, *per vigesimamsecundam diffinitionem vndecimi. Quod eade de causa dodecahedro inscriptū erit, quod eius anguli simul latera dodecahedri simul tangant, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In dato itaque dodecahedro octahedrum conclusimus.*

Propositio decima. *Problema 10.*

In dato Dodecahedro, Pyramidem trilateram æquilateram inscribere.



Esto dodecahedrum A B C D, *cuius sumātur tres bases ad signum* S *concurrentes,* A L S I K D N S L E *&* S I E R N, *ex quibus sumantur tres anguli qui ad* A B D, *coniunctis* A B B D D A, *dimetiens autem sit* S O, *coniunctis* A O B O D O *rectis quoniam dodecahedri anguli in sphæræ circunscribentis superficie consistunt, per decimamseptimam decimitertij, super dimetiente* S O *per signum* A *semicirculus ductus, efficit angulum* S A O *rectum, per trigesimāprimā tertij, similiter per signa* D B *ductus semicirculus efficit angulos* S B O S D O *rectos, ex eadē, dimetiēs itaque* S O *vtrasque* S A A O *vel* S B B O *aut* S D D O *potest, per quadragesimamseptimam primi, æquales autem sunt* S A S D S B, *angulum æqualium pētagonorum subtendentes. Reliquæ igitur* A O B O D O *erunt æquales, haud secus patebit dimetientem* H D *binas posse* H A *subtendentem & A D rectam, necnon binas* H B *subtendentem &* B D *rectam, dimetientem demū* A C *binas subtendētem* C B *& reliquam* B A, *quare ablatis subtendentibus reliquæ* A B B D D A A O B O D O *æquales erunt rectæ. Ac ideo ex ipsis triangula* A B D A O B A O D *&* B O D *æqualia & æquilatera, pyramidem* A B D O *component, a basi* A B D *ad signum* O *constitutam, cuius singuli qui ad* A B D O *anguli, singulos dodecahedri ad eadem signa constitutos tangunt angulos, quare dodecahedro inscripta dicetur pyramis, ex vigesimasexta diffinitione vndecimi. In dato igitur dodecahedro pyramidem trilateram æquilateram inscripsimus.*

Propositio undecima. *Problema 11.*

In dato Icosahedro, cubum designare.

Patuit septima huius dodecahedri angulos, basium icosahedri centra possidere: atqui octaua huius ostensum est cubi angulos in dodecahedri angulis quiescere. Iidem itaque cubi anguli in centris basium icosahedri necessario collocãtur. Cubus itaque icosahedro hac de causa inscriptus erit, ex 26 diffinitione undecimi. In dato igitur icosahedro cubum designauimus.

Propositio duodecima. *Problema 12.*

In dato icosahedro, pyramidem trilateram æquilateram collocare.

Simili via qua proximè diximus. Nam proxima patuit cubum suispsius angulos in cẽtris basium icosahedri collocare, in cubi verò quatuor angulis, quatuor pyramidis angulos sedere diximus prima huius. Perspicuum itaque relinquitur, pyramidem à rectis hæc quatuor basium icosahedri centra coniungẽtibus descriptam, eidem icosaheddro inscriptam esse, ex vigesimasexta diffinitione undecimi. In dato igitur icosahedro pyramidem trilateram æquilateram collocauimus.

HACTENVS QVÆ PARTIM A MAioribus ex decimoquinto Elementorum recepimus,

Subsequuntur autem quæ relicta erant perficienda.

Propositio decimatertia. *Problema 13.*

Proposito cubo, dodecahedrum inscribere.

Proponatur cubus A D F L *cuius secentur singula latera bifariam in signis* T H K P G L M F P K Q S, *cõiunctis* T K G F P Q H K P S L M *rectis, quæ rursus bifariam secentur in signis* N V Y I Z X, *cõiunctis* N Y V X *&* I Z *rectis. quoniam tres* N Y V X *&* I Z *rectæ sese cum dimetiente bifariam secant in centro, per trigesimamnonam undecimi, sit illud* O. *Ne diutius autẽ demõstranda protrahamus, sciãtur omnes hæ rectæ lateribus cubi æquales & parallelæ, seséque ad rectos cõnexas esse, per vigesimamnonam primi. Secentur dimidiæ earum scilicet* F V G V H I K I, *& similes extrema & media ratione, quarum maiora segmenta sint* F S G B H C K E, *per 30 sexti, iunctis* G I G E B C B E *rectis. Quoniam* G I *est æqualis toti* G V *dimidio cubi lateri. Recta vero* I E *rectæ* B V *minori segmento æqualis est, quadrata ex* G I I E *tripla sunt quadrati quod ex* G B, *per quartam decimi tertij, eis verò quæ ex* G I I E *æquum est quod ex* G E *per 47 primi, rectus quippe est* G I E *angulus. Quod igitur ex* G E *triplum est eius quod ex* G B, *quia vero recta est* E G *ad planum* A G K L, *per quartam undecimi, cùm sit recta ad binas* A G G I, *angulus* B G E *rectus erit: nam* G E *est in plano* A G K L. *Recta itaque* B E *binas* B G G E *potens per 47 primi, quadruplum rectæ* B G *poterit, eiusdem enim* G B *triplum potuit* G E, *dupla igitur lõgitudine erit* B E *recta* G B, *per vigesimam sexti. Dupla autem fuit (ex constructione)* C E *rectæ* I E *erunt igitur sicut* G B *ad* I E *dimidia, sic* B E *ad* C E *dupla, per decimã quintam quinti. recta igitur* C E *erit maius segmentum rectæ* B E *extrema & media ratione sectæ. Cùm autem idem ostendi posit in recta* B C *binæ* B E B C *sunt æquales, isosceles triangulum* B E C *constituen-*

stituentes. Ostendamus pentagoni dodecahedri tres angulos esse B C E, Reliquos verò inter B C & B E constitus.

Quoniam circulus continens triangulum B C E circunscribit pentagonum, cuius latus est C E, per vndecimam quarti, extendatur planum trianguli B C E per parallelas D B Q E, secans dimetientem basis cubi A F in I, dimetientem verò cubi A H in K, fiat autē lateri A D parallela per I recta I L. Quoniam triangulum A L I tollitur à triangulo A M F parallela L I simile toti, per coroll. secundæ sexti, æquales erunt A L L I rectæ, sicut autem Q A ad A D sic Q L ad L I, per secundam sexti, vel ad L A æqualem illi. Sed dimidij lateris scilicet Q A maius segmentum fuit A D, hoc est, G B ipsi A D æqualis, per 33 primi. Rectæ igitur Q L maius segmentum erit L A, Sicut autem tota Q L ad maius, sic erit maius idem Q L ad minus L A, per 5 decimiterty. Recta igitur Q A secta est in L. In triangulo vero A Q N, recta N A qua ex centro basis A F similiter ipsi A Q secatur in I, per parallelam L I, ex eadem secunda sexti: nam Q N M F sunt parallela, per constructionem. Recta igitur N A extrema & media ratione secta est in I, per planum D B E Q. Cæterùm quoniam parallela est F O N centra basium oppositarum cubi iungens, rectæ Q E. Per eam F O N ductum planum parallelum plano D B E Q, bina plana secabunt rectas A O A N in K & I, in easdem rationes, per 17 vndecimi, secta est autem A N in I extrema & media. Secta erit igitur semidimetiens cubi in K extrema & media ratione plano trianguli B C E. Cùm autem reliqua in cubo descripta simili situ triangula, iisdem legibus ostendantur esse in plano semidimetientem cubi eadem ratione secante. Conuenient itaque tria sub quolibet cubi angulo dodecahedri plana, ad idem signum semidimetientis extrema & media ratione secti. Superest demonstrandum rectas id signum dimetientis cum trianguli B E C angulis coniungentes æquales esse, vt pentagona sint æquilatera, æquiangula, & plana.

Sint bina cubi bases triangulum B C R suscipientes, dimetiens cubi verò sit A H, latus autem quod ad dimetientem esto C K vel B K, centrum cubi fuit O. Extendatur recta C K vsque ad rectam D B in L. Quoniam planum quod per rectam Q C E & centrum O (secans cubum bifariam) parallelum est basi cubi A D B R, per constructionem. Supponatur per signum K planum eisdem parallelum, quod secabit rectas O A C L in K proportionales, per 17 vndecimi. Nam illæ extrema plana quæ per Q E O & A B R contingūt. Atqui extrema & media secta fuit O A in K, Extrema itaque & media ratione secta erit C L in K. Rursus quoniam isosceles est triangulum B C E, Rectáque B I bifariam basim C E secuit, recti erunt B I C & B I E anguli, fiat planum per I O B (secans cubum bifariam) parallelum basi A F. Eisdem per signum K aliud parallelum supponamus K P. Illud rectas O A semidimetientem, & I Q dimidium latus, similiter secat, per 17 vndecimi, in K & P. Secta est igitur I Q in P extrema & media ratione. Recta ideo Q P recta C I vel I E est æqualis, nempe minora segmenta: quia verò est I P ad I C sicut tota ad maius. A tota I P auferatur maius I C, Supererit minus C P, per quintam decimiterty, secta est ideo I P in C extrema & media ratione. Rursus aliud excitetur planum per signum L eisdem parallelum sitq́ L T. Rectæ C L & C T similiter secantur (ex eadem 17 vndecimi) in K & P, secta fuit autem C L

ius K, secta erit igitur C T in P, fuit autem I C ad C P vt maius ad minus segmentum, erit ideo C P ma-
ius ad P T minus,& igitur earum ratio vt tota I C ad C P maius, & C P maius ad P T minus. Tota
staque C P T maius & minus efficiens, toti I C vel I E æqualis erit. Quia vero bina plana paralle-
la (scilicet quod per I O B & quod per L T) plano trianguli B C E, quod per L T I E secantur, com-
munes ipsorum sectiones L T B I parallelæ erunt, ex decimasexta vndecimi. Rectus autem fuit
B I E vel B I C angulus rectus, itaque erit L T C (per vigesimamnonam primi) angulus. Sed æquis la-
teribus contenti, scilicet T C ipsi C I, vt patuit, L T vero rectæ B I, per trigesimamtertiam primi Ba-
ses igitur C L & C B æquales erunt, ex quarta primi. Sed rectæ C B maius segmentum fuit C E. Re-
cta igitur C L eadem C E maius erit segmentum, sed & C K eiusdem C L maius fuit. Recta itaque C E,
latus dodecahedri recta C K quæ ad dimetientem æqualis erit. Eadem arte reliqua latera quæ ad
dimetientem rectis ipsi C E æqualibus æqualia ostendentur. Quæ ideo pentagonum circulo trian-
gulum B C E continenti inscriptum constituunt, per vndecimam quarti, æquiangulum & æquilate-
rum. Quia verò dodecahedrum constituunt bina pentagona cuilibet basium cubi innixa, sex au-
tem bases duodecim dodecahedri angulos suscipiunt, octo vero semidimetientes extrema & media
ratione secti reliquos. Sunt itaque duodecim bases pentagonæ 20 solidis angulis terminata dodeca-
hedrum cubo inscribentes, per vigesimamtertiam diffinitionem vndecimi. Proposito igitur cubo do-
decahedrum inscripsimus.

Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ dodecahedrum ambientis bina potest latera, scilicet dodecahedri & dodecahedrum ambientis cubi. *Nam in priori figura ducta ab O centro recta O B ad angulum dodecahedri, binas potest O B dimidium cubi latus, & V B dimidium dodecahedri, per 47 primi. Dupla itaque recta O B dimetiens quidem sphæræ dodecahedrum ambientis, duplas reliquarum O V V B poterit, per decimamquintam quinti, quæ sunt cubi & dodecahedri latera proposita.*

Corollarium secundum.

Cubi latus extrema & media ratione sectum efficit minus segmentum latus dodecahedri sibi inscripti. Maius vero segmentum latus cubi eidem dodecahedro inscripti. *nam patuit latus dodecahedri esse maius segmentum lateris trianguli B E, latus verò B E (binis G B S F æquum) maius fuisse lateris G F cubi segmentũ, quæ quidem B E (subtendens angulum pentagoni) fuit (octaua huius) latus cubi dodecahedro inscripti.*

Corollarium tertium.

Cubi latus, dodecahedri inscripti & circunscripti lateribus est æquale. *Patuit enim hoc theoremate latus cubi efficere minus segmentum dodecahedri inscripti latus, nempe vt prima figura G F ad S B, idem verò cubi latus patuit (decimaseptima decimi tertij) angulum pentagoni dodecahedri circũscripti subtendere, ac proinde efficere dodecahedri siue pentagoni latus maius segmentum, per primum corollarium eiusdem, binis igitur est æquale.*

Propositio decimaquarta. *Problema 14.*

In dato cubo, Icosahedrum describere.

Esto propositus cubus A B C, cuius basiũ centra sunt D E G H I K, per quæ in basibus ducãtur reliquis lateribus parallelæ non se tangentes. Quæ vero à centris V T D T, extrema & media ratione secentur in A F L M N B P Q R S C O, per trigesimam sexti, maiora verò segmenta sint circa centra, coniunctis A L A G A M T G, quoniam productæ sectæ parallelæ sunt cubi lateribus, angulos adinuicem rectos efficient, per vigesimamnonam primi. quia verò sunt æquales, earum sectiones æquales erunt, cùm sint similes, per secundam decimiquarti. Aequalis itaque erit T G ipsi D T, dimidia nempe cubi latera, Quod igitur ex tota T G & minori segmento T A, triplum est eius quod ex maiori A D, per quartam

decimi-

decimiterty, sed rectas A T T G *potest* A G, *cum rectus sit angulus* A T G. *Recta igitur* A G *triplum potest quadrati* A D, *quia vero recta est* M G L *ad planum* A T G, *parallelum cubi basibus, per corollarium decimæquartæ undecimi, rectus erit angulus* A G L. *æqualis autem est* L G *ipsi* A D, *nam sunt æqualium maiora segmenta. Recta igitur* A G *(triplum potens ipsius* A D*) triplum poterit rectæ* L G. *Addito itaque eidem quadrato* L G, *recta* A L *binas* A G G L *(per quadragesimamseptimam primi) potēs, quadruplum poterit rectæ* A D *vel* L G. *Recta igitur* A L *rectæ* A D *(per vigesimam sexti) dupla erit, & igitur ipsi* A F *æqualis vel ipsi* L M. *Haud secus æquales ostendentur qualibet aliæ, proximas sectarum sectiones coniungentes, vt* A M A P F F P M M Q, *& reliquæ. Triangula igitur* A L M A P F A M P F M Q, *& cætera huiusmodi æqualia, æquiangula, & æquilatera erunt, per quartam & octauam primi. Cùm autem circa singulas cubi rectas sectas, bina conueniant triangula, scilicet* A L M B L M *fient duodecim triangula quia vero sub singulis cubi angulis octo, reliqua octo subtenduntur triangula, vt* A M P *prodeunt ex duodecim & octo triangulis, viginti triangula, æqualia, & æquilatera solidum icosahedrum componentia, per vigesimamquartā diffinitionem vndecimi, quod cubo* A B C *inscriptum erit, per vigesimam sextam diffinitionem eiusdem, huius demonstrandæ inuentio à præcedētis dependet origine. In dato igitur cubo icosahedrum descripsimus.*

Corollarium primum.

Dimetiens Sphæræ Icosahedrum ambientis, bina potest, & Icosadri & ipsum continentis cubi latera. *Nam ducta* A B, *rectos efficiet ad* A F *angulos, cùm sit cubi lateribus parallela quæ igitur binos* F *&* B *oppositos icosahedri coniunget angulos, ipsas* A B *(latus cubi) &* A F *(latus Icosahedri, per 47 primi) potest quæ dimetienti sphæræ icosahedrum ambientis æqualis est per demōstrationem decimæ sextæ decimiterty.*

Corollarium secundum.

Sex oppositorum Icosahedri laterū bifarias sectiones, cōiungunt tres rectæ æquales in centro Sphæræ Icosahedrum continentis, sese bifariam secantes & ad rectos. *Sunt etenim tres ipsæ centra basium cubi* G H D E I K *iungentes, quæ sese hac lege secant, per corollarium tertiæ huius, & ideo lateribus cubi sunt æquales. Ab eo autem cubi centro ductæ rectæ ad angulos icosahedri, singulæ dimidium cubi latus & dimidium icosahedri (angulum rectum comprehendentes) subtendunt, quare æquales sunt. Et proinde centrum præfatum sphæræ centrum esse demonstrant icosahedrum ambientis.*

Corollarium tertium.

Cubi latus extrema & media ratione sectum, efficit maius segmentum latus icosahedri sibi inscripti. *Nam dimidium cubi latus, dimidium icosahedri lateris maius segmentum efficit. Totum igitur cubi, totum icosahedri maius segmentum efficiet, per decimamquintam quinti, cum sint similes sectiones, per secundam decimiquarti.*

Corollarium quartum.

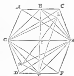
Icosahedri latera & bases quæ ex opposito, parallela adinuicem erunt. *Cùm opposita icosahedri latera quæuis, in cubi rectis parallelis esse possint, nempe oppositis in cubo, quæ vero ex parallelis*

rectis triangula, parallela sint, per decimamquintam undecimi sequetur triangula icosahedri opposita, veluti & latera adinuicem parallela esse.

Propositio decimaquinta. *Problema 15.*

In dato Icosahedro, Octahedrum componere.

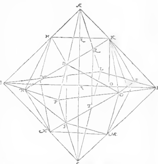
Esto icosahedrum A C D F, *cuius (per precedens secundum corollarium) sumantur tres rectæ sese bifariam ad rectos secantes, & bifarias icosahedri laterum sectiones coniungẽtes,* B E G H *&* K L *sese secantes in* I *signo, coniunctis* B G G E E H H B: *quoniam recti sunt anguli qui ad* I, *ex constructione, & æqualibus rectis comprehensi, bases* G B H E *quadratum constituent, per quartam primi. Similiter ipsis basibus æquales erunt quæ à signis* K *&* L *in singula signa* B G E H *ducentur, Et proinde triangula pyramidem* B G E H K *constituentia, æqualia & æquilatera erũt, ac eodem argumento, eisdem reliqua reliquam pyramidem* B G E H L *super eadem basi* B G E H *constituentia, octahedrum itaq. erit* B G E H K L, *per vigesimamsecundam diffinitionem undecimi, icosahedro inscriptum, per vigesimamsextam diffinitionem eiusdem. In dato igitur icosahedro octahedrum composuimus.*



Propositio decimasexta. *Problema 16.*

In dato Octahedro, Icosahedrum collocare.

Proponatur octahedrum, cuius sex anguli sint A B C F P L, *coniunctis rectis* A C B F P L *sese bifariam & ad rectos secãtibus in signo* R, *per corollarium secundum decimæquartæ decimitertij: secentur verò extrema et media ratione duodecim octahedri singula latera, in signis* H X M K D S N G V E Q T. *Maiora autem earum segmenta sint* B H B X F M F K A D A Q C S C T P N P G L V L E, *coniunctis* H K X M G B N V D S Q T, *quoniam triãguli* A R F *secta sunt proportionaliter latera* B H *ad* H A *ut* F K *ad* K A, *per secundam decimiquarti, parallela erit* H K *ipsi* B F, *per secũdam sexti quia verò recta* A C *secat* H K *in* Z, *recta autẽ* Z K *parallela est ipsi* R F, *recta* R A *secta erit extrema & media ratione in* Z, *per secundam sexti, nempe similiter ipsi* F A, *maiúsque eius segmentum erit* Z R. *Ipsi* Z K *æqualis secetur* R O, *ducta* K O, *æqualis igitur erit* K O *rectæ* Z R, *per trigesimamtertiam primi, ducantur* K G K E K I, *quoniam æquiangula sunt triangula* A R F A Z K, *per sextam sexti, æqualia sunt* A Z Z K *latera adinuicem, per quartam sexti, cùm æqualia sint* A R R F *latera: recta itaque* R A *minus segmentum erit* Z K, *si autem maius segmentum* R Z *extrema & media ratione secetur, efficiet ipsius maius rursus segmentum, rectam* Z K, *quæ fuit minus totius* R A, *per quintam decimitertij. Quia verò binis* A H A K *æquales sunt binæ* F E F G, *minora segmenta æ-*



qualium

qualium octahedri laterum, & anguli æquales, H A K ipsi E F G, nempe recti per decimamquartã decimitertij, bases H K G E æquales erunt, per quartam primi, similiter eisdem æquales patebunt rectæ X M N V D S Q T, quia item rectæ A C B F & P L bifariam & ad rectos sese secant, ex constructione, rectæ H K & G E (similia ipsis triangula subtendentes) bifariam sectæ erunt in Z & I, per quartam sexti, necnon & reliquæ N V X M D S Q T (ipsis æquales) similiter sectæ erũt, & similiter ipsas A C B F P L secabunt recta itaque K O (ipsi R Z æqualis) efficiet maius segmentum rectam R O, rectæ Z K æqualẽ, nam R Z fecit Z K, & igitur minus erit O I, cũ tota R I rectæ R Z sit æqualis, quæ itaque ex tota K O & minori segmẽto O I, tripla sunt eius quod ex maiori R O, per quartã decimitertij, recta ideo K I binas K O O I potens, triplum ipsius R O poterit, per quadragesimamseptimam primi, cum rectus sit K O I angulus. Cùm autem æquales sint F E F G, minora laterum octahedri segmẽta, communis verò F K, & anguli K F G K F E (triangulorum octahedri) æquales, bases K G K E erunt (per quartam primi) æquales, quæ ideo angulos K I E K I G æquos subtendent, per octauã primi, qui igitur recti erũt, per decimamtertiam primi recta itaque K E (binas K I I E potens) quadruplum poterit ipsius R O (vel I E) nam K I triplum eiusdem R O potuit cuius quidem I E quadruplum potest G E dupla, per vigesimam sexti, Binæ itaque K E G E erũt æquales. Eodem argumento eisdem æquales ostendẽtur reliquæ H K H N N V V X X S, & reliquæ sectiones laterum octahedri coniungentes. Ex ipsis igitur descripta triangula G E K G K D G D S G S M G M E, æqualia & æquilatera erunt, per octauam primi, angulum solidum qui ad G componentia, qui itaque icosahedri erit angulus, per decimamsextam decimitertij, in sectione G lateris P F constitutus. Haud secus ostendentur reliqui vndecim icosahedri solidi anguli, in sectionibus singulorum octahedri laterum cõstituti esse, scilicet E N V H K M X D S Q T: duodecim igitur erunt icosahedri anguli. Cùm insuper singulæ octahedri bases singula suscipiant icosahedri triangula, vt in pyramide dimidij octahedri A B C F P, triangulum F C P in suorum laterum sectionibus suscipit triangulum G M S, & C F B ipsum N X S, at B A P suscipit H D N & A P F ipsum K D G, idẽ ostendi poterit in opposita pyramide A B C F L, erũt igitur octo triãgula. Cæterũ quia singulis octahedri solidis angulis bin a supponuntur præter hæc triangula, vt K E G M E G angulo qui ad F, et verò qui ad B, X N V H N V, et qui ad P, N D S G D S, et qui ad A, D H K Q H K, et qui ad L, E Q T V Q T, et qui ad C, S X M T X M. Hæc duodecim octo præostensis addita producent viginti numero triangula, sibi coniuncta æqualia & æquilatera, quæ (ex vigesimaquarta diffinitione vndecimi) icosahedrum component, quod octahedro proposito A B C F P L inscriptum erit, ex vigesimasexta diffinitione vndecimi nam duodecim eius anguli, duodecim laterum octahedri sectiones similes possident. In dato igitur octahedro icosahedrum collocauimus.

Corollarium primum.

Latere trianguli æquilateri extrema & media ratione secto. Recta subtendens trianguli angulum, maiori & minori segmentis comprehensum, duplum potest minoris eiusdem lateris segmenti. *Nam recta K E angulum K F E trianguli A F L subtendens, binis K F F E segmentis comprehensum, æqualis fuit rectæ H K bina H A A K minora segmenta potenti, per 47 primi, cùm rectus fuerit H A K angulus. Duplum igitur potest K E vel H K rectæ A K.*

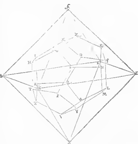
Corollarium secundum.

Icosahedri bases octahedri id continentis basibus sunt concentricæ.

Nam si proponatur A B G octahedri basis continens E C D icosahedri basim, erit centrum basis A B G signum F. Iungentur rectæ F A F B F C F E. Æquales erunt binæ F A A E binis F B B C, sunt enim quæ ex centro & minora segmenta, Sed & angulos æqualium dimidios subtendunt. Bases igitur (ex quarta primi) F C F E sunt æquales, sicq; illis reliqua F D æqualis erit, centro igitur F interuallo F A circulus triangulo C E D circunscriptus, signum idem F centrum efficiet basis C E D icosahedri.

Propositio decimaseptima. *Problema 17*

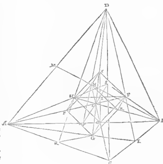
In dato Octahedro, Dodecahedrum collocare.



Esto propositũ octahedrũ ABGDEC *cuius secetur duodecim latera extrema et media ratione instar præcedẽtis. Patuit ex rectis has sectiones iungentibus fieri viginti triangula, quorum fuerunt octo basibus octahedri concentrica, ex proximo coroll. præfate. Si igitur singulis viginti triangulorum centris, singuli dodecahedri inscribantur (iuxta quintam huius) anguli, comperiemus octo dodecahedri angulos in octo basium octahedri centris, hos nempe* I V & O M A P *et* X. *Reliquorum autem duodecim, binos in centris binorum triangulorum latus commune sub singulis octahedri solidis angulis habentium, puta sub angulo qui ad* A *binos* K Z, *sub* E *binos* H T, *sub* G *binos* V Y, *sub* D *binos* F L, *sub* B *binos* S N, *sub* C *verò binos* Q R *degentes, qui solidi anguli cum sint sex, duodecim fouent dodecahedri angulos, ac fiunt viginti duodecim pentagonis æqualibus æquiangulis & æquilateris planis (vt quinta huius patuit) compositi, Dodecahedrum autem (ex 23 diffinitione vndecimi) restituentes: Octahedro verò inscriptum eò quòd singulæ octohedri bases singulos eius suscipiunt angulos, per 26 diffinitionem vndecimi. In dato igitur octahedro dodecahedrum collocauimus.*

Propositio decimaoctaua. *Problema* 18

In data trilatera & æquilatera Pyramide, cubum construere.



Esto trilatera æquilatera pyramis, cuius basis sit A B C, *vertex autem* D, *Ipsa sphæra comprehendetur, ex decimatertia decimitertij. Sit eius sphæra centrum* E, *Ab angulis autem solidis* A B C D, *per centrum* E *singula rectæ in bases oppositas missæ, basibus perpendiculares erunt, & in centra circulorum bases continentium cadent, per coroll. 13 decimitertij. Sint itaque ea cẽtra trianguli quidem* A B C *signum* G, *trianguli* A D C *sit* H, *ipsius verò* A D B *sit* N, *Reliqui autem* D B C *esto* F, *Rectæ demissæ sint* D E G E E H C E N & A E F. *Per ea verò* G H N F *centra, ab angulis ducantur in latera opposita rectæ* A G L D H K E N M & D F L, *quæ perpendiculares erunt*

lateribus

lateribus B C C A A D *&* C B, *per coroll. 12 decimitertij. Et ideo eas secabunt bifariam in* K L M *signis per tertiam tertij. Rursus quæ à solidis angulis missæ sunt in bases oppositas, bifariam secentur, scilicet* D G in T, C N in O, A P in P, *&* B H in R, *coniunctis* H T F T H O F O. *Quoniam* G K G L *quæ à centro eiusdem trianguli* A B C *in latera sunt æquales, æqualium & similium triangulorum perpendiculares. Communis autem* D C, *anguli* K D G L D G *(per octauam primi) æquales erunt. Sed & æquis lateribus* F D D T *ipsis* H D D T *continentur. Nam* H D D F *sunt ex centro æqualium circulorum triangula* A D C D B C *continentium, bases igitur* H T F T *æquales erunt, per quartam primi. Haud secus ductis* C F C H *rectis, reliquæ* H O F O *eisdem* H T F T *& inter se æquales esse patebunt, Atque igitur eodem argumento reliqua centra triangulorum & bifarias perpendicularium sectiones iungentes, vt* N P G R G P R N N T P H G O *&* R F *æquales esse ostendentur. Cum autem à quolibet centro basium tres oriantur rectæ in bifarias perpendicularium sectiones ducendæ, centra autem sint quatuor, sequetur ductas rectas æquales, duodecim esse, quarum ternæ & ternæ angulum solidum in quatuor centris basium ac perpendicularium medijs sectionibus quatuor constituunt, eius itaque solidi octo erunt anguli, duodecim æquis lateribus conscripti, quæ sex quadrangula figurabunt, scilicet* H O F T P G R N P H O G G O F R F R N T *&* T N P H. *Eæ quippe rectangula esse doceamus.*

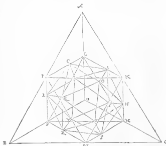
Quoniam in D C *communem triangulorum* A D C B D C *basim perpendiculares cadunt* A S B S *per centræ* H *&* F *ductæ. Singula ipsarum* H S S F *tertiam partem singularum* A S S B *efficiunt. Nam* A H *dupla est rectæ* H S *& basim* D C *bifariam secat, per coroll. duodecimæ decimitertij. Triangulis igitur* A B S *lateræ* A S B S *proportionalia secta in* H *&* F, *efficiunt rectam* H F *parallelam reliquo* A B *lateri, per secundam sexti. AEquiangula igitur erunt* A S B *&* H S F *triangula, per sextam sexti. Basis igitur* H F *reliquæ* A B *tertia pars erit, per quartam sexti. Ostendamus insuper* T O *tertiam esse rectæ* D C, *cum æquales sint* E C E D *rectæ, quæ ex centro sphæræ pyramidem continentis,* E N *verò (quæ à centro in basim) tertia pars est* E C *rectæ, sicq;* G E *rectæ* E D, *per coroll. decimætertiæ decimitertij, est enim sexta pars dimetientis. Sed* O N *fuit dimidia totius* N C. *Reliqua itaque* E O *tertia pars erit ipsius* E C *necnon* E T *tertia rectæ* E D. *Quare recta* T O *in triangulo* D E C *parallela erit rectæ* D C, *eiusdémque pars tertia, ex præscriptis secunda & quartæ sexti, veluti* H F *fuit tertia pars rectæ* A B. *Atqui* A B *&* D C *pyramidis lateræ sunt æqualia. Rectæ igitur* H F *&* T O *æqualium tertiæ partes æquales erunt, per decimamquintam quinti. AEquales igitur erunt anguli* H T F *&* T F O, *similiter eis oppositi* F O H O H T *(per octauam primi) ipsis ac inter se æquales erunt. Sed hi quatuor rectis æquipollent, per coroll. trigesimæsecundæ primi. Recti itaque erunt quadranguli* H O F T *anguli. Necnon reliquorum quinque quadrangulorum, eadem lege recti ostendentur anguli. Superest ostendendum quadrangula præfata in vno plano singula esse. Suscipiamus itaque* H O F T. *Quoniam in triangulo* A S B *recta* H F *lateri* A B *parallela ostensa est, ea secat proportione rectas* S V S B *in* I *&* F, *per 2 sexti. Quia ideo tertia pars fuit* S F *rectæ* S B, *tertia erit* S I *rectæ* S V. *Quia præter hæc,* V S *medias sectiones oppositorum pyramidis laterum iungens, horum nempe* A B D C, *bifariam per centrum* E *secatur, ex coroll. secundæ huius, cùm sit dimetiens octahedri pyramidi inscripti, recta* S I *duo tertia erit dimidiæ* S E. *Haud secus, cum in triangulo* D E C *recta* T O *parallela fuerit rectæ* D C *latori. Illa secabit proportione in eodem triangulo rectas* C E S E *in* O *&* I, *per eandem. Atqui tertia fuit* E O *rectæ* E C *tertia igitur erit* E I *rectæ* E S. *Reliqua igitur* I S *totius* E S *duo tertia erit. Quare signum* I *vtræsque* T O H F *secuit. Binæ itaque* H I F T I O *rectæ sese secantes in vno sunt plano, per secundam vndecimi. Ac proinde signæ* H T F O *in eodem erunt plano. Rectangulum igitur* H O F T *quadrilaterum & æquilaterum in plano existens quadratum erit, per trigesimam diffinitionem primi. Eadem causa reliquæ quinque solidi bases quadratæ, ostendentur æquales & planæ, duodecim lateribus octóque angulis æqualibus solidis coniunctæ, quorum quatuor in quatuor pyramidis basium centris, quatuor verò in quatuor perpendicularium medijs sectionibus degunt. Solidum igitur illud* H O F T P G R N *cubum dicemus, per vigesimamprimam diffinitionem vndecimi, pyramidi inscriptum, per 26 diffinitionem eiusdem. In data itaque trilatera & æquilatera pyramide cubum constituimus.*

Corollarium.

Quæ bifariam secat opposita Pyramidis latera, tripla est lateris inscripti cubi & per cętrum transit. *Nam* S E V *recta cuius tertia pars fuit* S I, *ea latera secat at* E I *(quæ ex centro cubi in basim) fuit tertia rectæ* E S. *Latus igitur cubi duplum rectæ* E I *tertium erit totius* N S *quæ fuit dupla rectæ* E S.

Propositio decimanona. *Problema* 19.

In data trilatera æquilatera Pyramide, Icosahedrum describere.



Esto proposita pyramis A B G D, *cuius singula bifariam secetur latera signis* F M K L P N, *descriptis triangulis* L F P P M N N K L *et* F M K *in singulis eius pyramidis basibus, quæ quidem triangula æqualitateræ erũt, per quartã primi: nã latera subtendunt æquos basium pyramidis angulos dimidiis eius lateribus comprehensos, quæ ideo sunt æqualia. Secentur ea latera extrema & media ratione (per trigesimam sexti) in signis* C E Q R S T H I O N T X. *Ipsa latera in easdẽ rationes secantur, per secundam decimæ quarti, & ideo æquales efficiũt similes sectiones, per secũdam partẽ nonæ quinti: Dico præfata signa angulos suscipere icosahedri pyramidi* A B G D *inscripti, siant in præfatis triangulis alia rursus triangula iunctis sectionibus, Sint autem hæc* T R S I O H C E Q *&* V X Y, *ipsa æquilatera erunt. Singula nanque eorum latera æquales angulos triangulorum æquilaterorum subtendunt, & æquis lateribus (maiori scilicet & minori segmẽto) comprehensos, qui ideo (per quartam primi) erunt æqualia. Ostendamus igitur ad aliquod præfatorum signorum (scilicet* T) *constitui angulum solidum icosahedri. Cùm triangula* T R S *&* T Q O *sint æquilatera & æqualia æquales erunt quatuor rectæ* T R T S T Q T O *& quia quadratum est* F P N K, *bifariam secans pyramidem* A B G D *per corollarium secundæ huius. Recta* T H *duplum potest rectæ* T N *vel* N H, *per quadragesimamseptimam primi, minoris quidem segmenti ex constructione. Quod idem duplum potest recta* R T *vel* T S, *angulum trianguli subtendens binis segmentis comprehensum, per corollarium decimæ sextæ huius. Rectæ igitur* T H T S T R T Q T O *æquales erunt, necnõ* H S S R R Q Q O O H, *angulos qui ad* T *subtendentes. nam* Q R *bina potest* P Q P R *minora segmenta, quæ potuit* T H. *Reliquæ verò angulos triãgulorũ æquilaterorũ maiori & minori sectione comprehensos subtendunt. Quinque itaque triãgula* T R S T S H T H O T O Q T Q R *æquilatera & æqualia, angulum solidũ icosahedri ad signum* T *constituunt, per 16 decimitertij, in latere* P N *trianguli* P N M. *Eadem methodo in reliquis quatuor triãgulorũ* P N M N K L F M K *&* L F P *basibus pyramidis inscriptorũ lateribus, quæ latera duodecim sunt numero, duodecim icosahedri constituentur anguli, viginti triangulis æqualibus & æquilateris compositi, quorum quatuor in quatuor pyramidis basibus,* T R S H O I C E Q V X Y, *quatuor sub quatuor pyramidis angulis* C I X T S H E R V *&* T Q O, *& bini sub singulis sex pyramidis lateribus, scilicet sub latere* D G, T H S T H O, *sub* D B, R Q E R Q T, *sub* D A, C O Q C O I, *sub* A B, E X C E X V, *sub* B G, S V R S V Y, *sub* A G, I Y H I Y X. *Viginti itaque æquilateris & æqualibus triangulis comprehensum, solidum icosahedrum erit, per vigesimamquartam diffinitionem undecimi, pyramidi* A B G D *inscriptum cùm eius simul anguli pyramidis simul bases tangunt, per vigesimamsextam diffinitionem undecimi. In data itaque trilatera pyramide icosahedrum descripsimus.*

Propositio vigesima. *Problema* 20.

In data trilatera æquilatera Pyramide, Dodecahedrum componere.

Esto

Esto pyramis ABGD, *cuius singula latera bifariam secẽtur, ductis rectis sectiones iungẽtibus, quæ rectæ extrema & media ratione secta, suscipiẽt ductis per sectiones rectis, viginti triangula icosahedrum componentia, vt proxima patuit, si eorum triangulorũ centra susceperimus, ibidẽ viginti dodecahedri inscripti angulos cõperiemus, per quintam huius, quia verò præfati icosahedri quatuor bases sunt basibus pyramidis concentricæ, vt ostensum fuit corollario secundo decimæsextæ huius, quatuor angulos scilicet* E F H D *dodecahedri, in quatuor basiũ centris collocabimus, reliquorum vero sedecim angulorum bini singulis sex pyramidis lateribus subiiciuntur, nempe lateri* A D *anguli* C K, *lateri* B D L *&* I, *rectæ* G D M *&* N, *rectæ* A B T *&* S, *lateri* B G P *&* O, *lateri* A G R *&* Q *supersunt quatuor, quorum verum locum designemus cum cubus eadem sphæra cum dodecahedro septus, eidẽ dodecahedro inscribatur, vt patuit decimaseptima decimiterty, & octaua huius, sequetur cubum dodecahedrúmque circunscriptum iisdem contineri corporibus, eò quod eorum anguli ad eadem signa coëant. Ostensum est autem (18 huius) quatuor angulos cubi pyramidi inscripti perpendicularium quæ ab angulis in bases oppositas pyramidis sunt missæ, medias obtinere sectiones, Dicemus itaque quatuor reliquos dodecahedri angulos medias illas perpendicularium cum angulis cubi poßidere sectiones. Has quidem* V *dimidiam perpendicularis* A H, *dimidiam verò* B F *angulum* Y, *dimidiam autem* G E *signum* X, *reliquam demum, medium signũ perpendicularis* D *anguli, in basim oppositam. Quare quatuor illi dodecahedri angulis, solidis pyramidis quatuor angulis directi, siue ad perpendiculum suppositi dicentur dodecahedrum itaque hac lege constitutum propositæ pyramidi inscriptum dicetur, eò quòd singulis pyramidis basibus singuli adhæreant dodecahedri inscripti anguli, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. In data igitur trilatera æquilatera pyramide dodecahedrum composuimus.*

Propositio vigesimaprima. *Problema 21.*

Cuilibet regularium solidorum, Sphæram inscribere.

Iam ostensum fuit decimatertia & quatuor sequentibus decimiterty, solida quinque regularia hac lege sphæra contineri, vt à cẽtro sphæræ siue solidi ad singulos inscriptæ angulos rectæ sint æquales. Quæ quidem rectæ ea de causa pyramides componunt, quarum vertices centrum sphæræ siue solidi poßident, bases autem pyramidum singulæ sunt eorum solidorum bases, quæ cùm in quolibet solido sint inter se æquales, similes & æqualibus circulis descriptæ, hi circuli sphæram secabũt nam anguli circuaferentiam circuli tangentes sphæræ superficiem attingunt. quare a centro sphæræ in bases siue circulorum æqualium plana demissæ perpendiculares, sunt æquales, ex corollario lemmatis decimisexti duodecimi. Centro igitur sphæræ solidum continentis, interuallo verò aliqua perpendicularium æqualium descripta sphæra, ipsa singulas eius solidi bases sua superficie tanget, nec excedet superficies sphæra cùm perpendiculares sint minimæ quæ à centro in bases mittuntur, per tertium co-

rollarium eiusdem lemmatis. cuilibet igitur regularium solidorum sphæram inscripsimus, quæ quidem sunt tantum numero quinque, per corollarium decimæoctauæ decimitertij.

Corollarium.

Inscriptæ ac eis circunscriptæ regulares figuræ siue eas comprehendentes sphæræ, idem centrum possident. *Nempe earum pyramides quarum anguli basium sphæræ superficiem tangunt, ab his angulis ad idem signum æquales perducunt rectas, conos pyramidum ibidem constituentes, ac proinde centrum spherarum in eisdem conis collocātes, cum ab his ad curuam superficiem, in basium pyramidis angulis existentem, ductæ rectæ fuerint æquales.*

MONITVM.

Horum solidorum unicum octahedrum reliqua mutuo sibi inuicem inscripta suscipit solida: nam octahedrum capit icosahedrum sibi inscriptum illud idem icosahedrum concipit dodecahedrum eidem octahedro inscriptum: Dodecahedrum verò idem, suscipit cubum ipso octahedro conceptum cubus ille demùm Pyramidem proposito octahedro inscriptam circunscribit. Hæc reliquis denegantur solidis.

LIBRI DECIMIQVINTI FINIS.

FRAN-

FRANCISCI FLVSSATIS Candallæ Elementorum geometricorum

Liber decimussextus.

Propositio prima.

DOdecahedrum sibíque inscriptus cubus ac eidem cubo inscripta Pyramis, eadem capiuntur Sphæra.

Quoniam pyramis angulos cubi in quo describitur possidet, per primam decimiquinti, cubus verò omnes angulos in dodecahedri sibi circunscripti angulis collocat, per octauam decimiquinti. Dodecahedrum vero suos angulos in sphæra superficie constituit, per 17 decimitertij, Sequetur itaque illa tria solida sibinuicem inscripta, eadem capi sphæra, per vigesimamsextam diffinitionem vndecimi. Dodecahedrum igitur sibique inscriptus, &c.

Corollarium.

Tria hæc solida similiter eidem insident Icosahedro, Octahedro, & Pyramidi. *Nam icosahedro, per quintam, vndecimam, & duodecimam decimiquinti ac eidem octahedro, per quartam, sextam, & decimamsextam eiusdem demum eidem pyramidi, per primam, decimamoctauam, & decimamnonam eiusdem. Nam omnium horum anguli centra basium circunscriptorum icosahedri, aut octahedri, aut certa pyramidis, obtinent.*

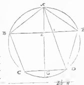
Propositio secunda.

Dodecahedri circunscripti ad dodecahedrum cubo inscriptum ratio, tripla est extremæ & mediæ rationis.

Quoniam ostendimus (decimætertiæ decimiquinti corollario 2) latus dodecahedri cubo inscripti esse minus segmentum lateris ipsius cubi extrema & media ratione secti. Latus verò dodecahedri eidem cubo circunscripti, eiusdem cubi lateris maius segmentũ esse, eadem 13 decimiquinti, documus: erit latus dodecahedri circunscripti, ad latus inscripti, vt maius segmẽtum recta extrema & media ratione secta, ad minus eiusdẽ, quæ (ex trigesima sexti) dicitur extrema & media ratio, per tertiam diffinitionem eiusdem. Sed similium polyhedrorum solidorum ratio, tripla est rationis laterum similium, per corollarium 17 duodecimi. Dodecahedri igitur circunscripti ad dodecahedrũ cubo inscriptum ratio, tripla erit rationis laterum, extrema & media ratione coniunctorum. Dodecahedri itaque circunscripti ad dodecahedrum, &c.

Propositio tertia.

Omnis quinquãguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab vno angulorum in basim perpendicularis, extrema & media ratione secatur, per rectam angulum eundem subtendentem.



Sit quinquangulum, æquiangulum, & æquilaterum A B C D F, *ab vno autem angulorum qui ad* A *perpendicularis demittatur* A G *in basim* C D, *& angulum* B A F *subtendat* B F, *quam secet* A D *in* I: *Dico rectam* B F *secare rectam* A G *extrema & media ratione, quoniã anguli* G A F G A B *sunt æquales, per vigesimam septimam tertij, &* A B F A F B *æquales, per quintam primi. Reliqui itaque qui ad* E *triangulorum* A E B A E F *æquales erunt, nempe reliqui duorum rectorum, per corollarium trigesimæsecundæ primi. Rectus autem est (ex constructione)* E G C *angulus, parallela igitur sunt* B F C D *rectæ, per vigesimãoctauam primi: sicut igitur-*

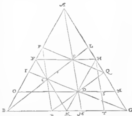
DI ad IA, sic erit GE ad EA, per secundam sexti. Atqui DA secta est in I extrema & media ratione, per octauam decimitertij, GA igitur in E secta erit extrema & media ratione, per secundam decimiquarti. Omnis itaque quinquanguli, æquianguli, & æquilateri, quæ ab, &c.

Corollarium.

Quæ angulum pentagoni subtendit opposito lateri fit parallela. *Vt patuit in* BF & CD.

Propositio quarta.

Quæ ab angulis basis Pyramidis latera opposita secāt extrema & media ratione rectæ, ipsæ comprehendunt basim Icosahedri Pyramidi inscripti, triangulo æquilatero inscriptam, cuius anguli latera basis Pyramidis extrema & media ratione secant.



Esto basis pyramidis ABG, *cui inscribatur triangulum æquilaterum* FKH, *sectis bifariam lateribus, huic autem triangulo inscribatur basis icosahedri pyramidi inscripti (sectis extrema & media ratione lateribus)* FK KH HF *in* CDE, *per decimamnonam decimiquinti. secentur rursus pyramidis latera* AB BG GA *extrema & media ratione in* IML, *per trigesimam sexti, coniunctis* AM BL GI *rectis: Dico ipsas rectas triangulum icosahedri* CDE *describere: quoniam* BG & FH *sunt parallelæ, per secūdam sexti, per signum* D *vtrique parallela fiat* ODN. *Simile erit* HDN *triangulum ipsi* HKG, *per corollarium secundæ sexti, æquales igitur erūt singulæ* DN NH *ipsi* DH, *maiori segmento rectæ* KH *vel* FH: *quia verò* FO *parallela est rectæ* HK, & OD *ipsi* FH, *æqualis erit* OD *rectæ* FH *toti, in parallelogrammo* FODH, *per 34 primi. Sicut itaque tota* FH *ad* FE *maius segmentum, sic erunt, ipsis æquales* OD *ad* DN, *per septimā quinti. Recta igitur* ON *extrema & media ratione secta erit in* D, *per secundam decimiquarti. Sed similia sunt inter se triangula* AOD AFE & ABM, *necnon inter se* ADN AEH & AMG, *per corollarium secūda sexti. Sicut ideo* FE *ad* EH, *sic est* OD *ad* DN, & BM *ad* MG. *Recta igitur* AM *similiter secās rectas* FH ON *ipsi* BG *in* EDM, *efficit* ED *latus trianguli icosahedri* ECD, *in sectionibus* ECD *ex hypothesi descripti. Haud secus* BL GI *reliqua latera* EC CD *eiusdē trianguli describent, per signū* E *rectæ* GI *parallela fiat* PEQ. *Cum parallelæ sint* BM FE *recta* AM *in* E *similiter ipsi* AB *in* P *secatur, per secundam sexti. Aequalis igitur erit* AE *ipsi* EM, *ac ipsi æquales erunt* GD DI, *similiter posita: quia rursus parallela sunt* DI EP *in triangulo* ADI, *erit* DI *ad* EP, *vt* AD *ad* AE: *sed vt* AD *ad* AE, *sic* DG *ad* EQ, *per 2 sexti. Sicut igitur* DI *ad* EP, *sic erit* DG *ad* EQ: & *vicißim* DI *ad* DG, *vt* EP *ad* EQ: *æquales autem sunt* DI DG, *æquales igitur erunt* EP EQ: *quia verò æqualis est recta* AH *rectæ* FH, *cuius maius segmentum fuit recta* HN. *Tota* AN *extrema & media ratione secatur in* H, *per quintam decimitertij. Sicut autem* AN *ad* AH, *sic* AD *ad* AE, *per secundam sexti, quia parallelæ fuerunt* FH ON: *sicut rursus* AD *ad* AE, *sic (per eandem)* AG *ad* AQ & AI *ad* AP, *quia parallelæ fuerunt* PQ GI. *Recta itaque* AG & AI *extrema & media ratione in* Q & P *sectæ sunt, rectáque* AQ *maius erit recta* AG *vel* AB *segmentum. Quia vero fuit tota* AG *ad maius* AQ *vt maius* AI *ad reliquam* AP, *ipsa* AP *erit minus segmentū totius* AB *vel* AG. *Recta igitur* PEQ *(parallela per* E *rectæ* GI*) extrema & media ratione secuit rectas* AG BA *in* Q & P. *Haud secus recta* PR *(rectæ* AM *parallela per* C*) in sectiones* PR *cadet, necnon* RQ *per signū* D *(parallela rectæ* BL*) in sectiones* RQ *cadet vtraque igitur* PE EQ *rectæ* CD *æqualis erit, in parallelogrammis* PD QC, *per 34 primi. Cùm autem æquales fuerint rectæ* PE EQ, *æquales erūt similiter* PC CR & RD DQ. *Triangulum itaque* PRQ *æquilaterum erit secans extrema & media ratione latera pyramidis in* P Q & R,

Q & R, cui inscripta est basis icosahedri E C D *præfata pyramide comprehensi. Quæ igitur ab angulis basis pyramidis, &c.*

Corollarium.

Latus icosahedri octahedro inscripti, maius segmentum est eius quæ ab angulo basis octahedri secat latus oppositum extrema & media ratione. *Quoniam (ex decimasexta decimiquinti)* F K H *est basis octahedri, icosahedrum basis* C D E *continentis. Cui* F K H *æquatur* H K G, *ut patuit. Excitetur recta* M E *per signum* H *parallela* H T, *secans* D N *in* S, *parallelogramma erunt* E S D T E T, *æquales inde erunt* E H M T, *& æqualiter secta* E M H T *in* D *&* S, *per 34 primi. Recta igitur* H T *maius segmentum est* H S *recta, æqualis lateri* E D *icosahedri. Sed* T K *similiter secatur ipsi* H K *(ex secunda sexti) per parallelam* D N. *Et ideo extrema & media ratione, per secundam decimiquarti. Est autem* T M *æqualis rectæ* E H, *& igitur* T K *ipsi* E F *vel* D H. *Reliquæ igitur* E H *&* T G *sunt æquales: nam* F H *&* K G *sunt æquales. Latus itaque* K G *trianguli* H K G *secatur in* T *extrema & media ratione, à recta* H T *cuius maius segmentum fuit* E D, *latus quidem icosahedri octahedro, cuius basis fuit* H K G *(vel* F K H *sibi æqualis,) per 16 decimiquinti, inscripti.*

Propositio quinta.

Latus Pyramidis extrema & media ratione sectũ, efficit minus segmentum potentia duplum lateris sibi inscripti icosahedri.

Esto basis pyramidis A B G, *basis autem sibi inscripti icosahedri* C D E, *descripta tribus rectis quæ ab angulis basis* A B G *latera opposita extrema & media ratione secant, ex præfata, his scilicet* A M B I *&* G L: *Dico* A I *minus segmentum lateris* A G, *duplum posse lateris* C E *icosahedri. Quoniam proxima patuit triangulum* C D E *inscriptum esse triangulo æquilatero, cuius anguli secant extrema & media ratione latera basis* A B G *pyramidis. Sit illud* F H K, *secans rectam* A B *in* F. *Erit itaque* F A *minus segmentum æquale segmento* A I, *per secundam decimiquinti, nempe eadem ratione sectum, latus insuper* F H *trianguli* F H K *secatur in* D *bifariam, ut proxima dictum est. Ac insuper parallelogrammum fuit* F C E D, *& proinde æquales fuerunt rectæ* C E F D, *per 33 primi. Cùm autem recta* F H *subtendat angulum* B A G *trianguli æquilateri, comprehensum maiori segmento* A H *& minori* A F, *duplum potest* F H *recta* A I, *siue* A I, *minoris segmenti, per coroll. decimæsextæ decimiquinti. Atqui eadem* F H *quadruplum potest rectæ* C E, *cum sit eius dupla, per 19 sexti. Recta igitur* A I *dimidium rectæ* F H *potens duplum poterit rectæ* C E. *Latus itaque pyramidis* A G *extrema & media ratione sectum, efficit minus segmentum* A I *potentia duplum lateris* C E *sibi inscripti icosahedri.*

Corollarium.

Latus icosahedri pyramidi inscripti est apotome. *Nam dimetiens sphæræ corpora continentis certa existens, sesqualtera fuit potentia lateris pyramidis, ex 13 decimitertij, & ideo certa fuit latus pyramidis, per sextam diffinitionem decimi. Quæ secta extrema & media ratione efficit minus segmentum apotome, per sextam decimitertij. Igitur eidem minori segmento latus icosahedri commensurabile (dimidium nanque potens fuit) apotome erit, per ea quæ monuimus centesimatertia decimi.*

Propositio sexta.

Latus cubi dimidium potest lateris sibi inscriptæ Pyramidis triangularis æquilateræ.

Cùm enim latus pyramidis cubo inscriptæ bina subtendat cubi latera angulum rectum comprehendentia, ex prima decimiquinti, patulum erit (ex 47 primi) latus pyramidis subtendens, duplum

posse lateris cubi: quare & hoc illius dimidium necessariò poterit. Latus itaque cubi dimidium potest, &c.

Propositio septima.

Latus Pyramidis duplum est lateris sibi inscripti Octahedri.

Quoniam (ex secunda decimiquinti) ostendimus octahedri latus pyramidi inscripti, bifarias laterum pyramidis coniungere sectiones, Pyramidis igitur & octahedri latera parallela sunt, ex corol. 39 primi, & ideo (ex coroll. secundæ sexti) similia subtendunt triangula. Quare (per quartam sexti) duplum erit pyramidis latus lateris octahedri, nempe in ratione reliquorum laterum. Latus itaque pyramidis, &c.

Propositio octaua.

Cubi latus duplum potest lateris sibi inscripti Octahedri.

Ostensum est (tertia decimiquinti) dimetientem octahedri cubo inscripti binarum oppositarum cubi basium centra coniungere, & ideo iam dimetientem lateri ipsius cubi æqualem esse. Sed eadem est dimetiens quadrati ex lateribus octahedri facti, scilicet sphæra ipsum continentis, per 14 decimiterty. Dimetiens igitur illa lateri cubi æqualis, duplum poterit lateris huius quadrati, siue lateris octahedri sibi inscripti, per 47 primi. Cubi igitur latus duplum potest lateris, &c.

Propositio nona.

Dodecahedri latus, maius segmentum est, eius quæ dimidium potest lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

Dodecahedri A B G D *latus esto* A B, *dodecahedro verò inscripti cubi basis sit* E C F H, *per octauam decimiquinti. Cubo verò inscriptæ pyramidis latus esto* C H, *per primam decimiquinti. Eadem igitur pyramis ipsi dodecahedro inscripta erit, per decimam decimiquinti: Dico latus dodecahedri* A B *esse maius segmentum eius quæ dimidium potest lateris* C H *sibi inscriptæ pyramidis. Quoniam* E C *latus cubi sectum extrema & media ratione efficit maius segmentum, rectam* A B *latus dodecahedri, per primum coroll. 17 decimiterty. Nam eadem sphæra capiuntur, ex prima huius, lateris verò* C H *dimidium potest* E C *latus cubi, per sextam huius. Latus igitur dodecahedri* A B *erit maius segmentum rectæ* E C, *quæ dimidium potest lateris* C H *sibi inscriptæ pyramidis. Dodecahedri itaque latus maius segmentum, &c.*

Propositio decima.

Latus Icosahedri media est proportionalis, inter latus cubi Icosahedro circunscripti, & Dodecahedri eidem cubo inscripti.

Esto cubus A B F D, *cui inscribatur icosahedrum* C L I G O R, *per 14 decimiquinti. Item dodecahedrum* E D M N P S *ex 13 eiusdem. Cùm enim icosahedri latus* C L *sit maius segmentum cubi* A B *circunscripti, per coroll. tertium decimæquartæ decimiquinti: Latus vero* E D *dodecahedri eidem cubo inscripti fuit minus segmentum lateris eiusdem* A B *cubi, per secundum coroll. 13 decimiquinti, Sequetur* A B *cubi latus extrema & media ratione sectum, efficere maius segmentum* C L *icosahedri sibi inscripti latus, minus verò segmentum* E D *latus dodecahedri sibi similiter inscripti. Sicut itaque tota* A B *cubi latus ad maius segmentum* C L *icosahedri latus, sic maius* C L *icosahedri ad minus* E D *dodecahedri latus erit, per tertiam diffinitionem sexti, Latus itaque icosahedri media est proportionalis inter latus cubi, &c.*

Propo-

Propositio vndecima.

Latus Pyramidis octodecuplum potest lateris sibi inscripti cubi.

Quoniam (per ea quæ ostensa sunt decimaoctaua decimiquinti) latus pyramidis triplum est, & ideo nocuplum potuit diametri basis sibi inscripti cubi, diameter autem, lateris cubi duplum (ex 47 primi) potest. Nocupli igitur duplum octodecuplum efficiet. Latus itaque pyramidis octodecuplum potest lateris sibi inscripti cubi.

Propositio duodecima.

Latus Pyramidis octodecupl ũ potest eius rectę cuius Dodecahedri latus Pyramidi inscripti, fit maius segmentum.

Cùm dodecahedrum & sibi inscriptus cubus eidem insideant pyramidi, per corollarium primæ huius, cubi vero inscripti lateris octodecuplum potuit latus circunscriptæ pyramidis ex proxima: at eiusdem lateris cubi maius segmentum est dodecahedri, cubum cõtinentis latus, per corollarium decimæseptimæ decimitertij. Latus igitur pyramidis octodecuplum potest, eius rectæ, scilicet lateris cubi, cuius dodecahedri latus pyramidi inscripti fit maius segmentum.

Propositio decimatertia.

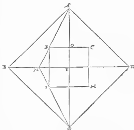
Minoris segmenti lateris Octahedri, duplum potest latus sibi inscripti Icosahedri.

Quoniam ostensum fuit (decimaseptima decimiquinti) latus icosahedri octahedro inscripti, binas laterum octahedri angulum rectum efficientium coniungere sectiones extrema & media ratione genitas, hunc autem rectum angulum minoribus ipsorum octahedri laterum segmentis continere, a latere verò icosahedri inscripti subtensum. sequetur itaque icosahedri latus subtendens, binis comprehendentibus æquale potentia, per quadragesimamseptimam primi, duplum posse singulorum comprehendentium angulum minorum lateris octahedri segmentorum. Minoris itaque segmenti lateris octahedri, &c.

Propositio decimaquarta.

Octahedri & sibi inscripti cubi latera, quadruplam sesquialteram rationem potentia habent.

Sit octahedrum A B G D E, *sibi verò inscriptus cubus esto* F C H I. *Dico esse* A B *latus octahedri, lateris* F I *cubi quadruplum sesquialterum potentia, in trianguli* A B E *basim* B E, *perpendicularis agatur* A N, *rursúsque alia* O N *ipsæ* A N G N *per centra* F *&* I *transeunt, & dupla est* A F *ipsius* F N, *per corollarium duodecimæ decimitertij. dupla igitur erit* A O *rectæ* O E, *per secundam sexti, cũ parallelæ sint* F O N E, *& proinde tripla erit* A G *dimetiẽs ipsius* F I: *qua itaque* A G *eiusdem* F I *potentia nocupla erit, sed & lateris* A B *potentia dupla est* A G, *per decimamquartã decimitertij ipsa igitur* A B *nocupli dimidium ferens, quadruplum sequalterũ potest rectæ* F I. *Octahedri itaque & sibi inscripti cubi latera quadruplã sesquialteram rationem habent potentia.*



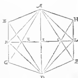
Propositio decimaquinta.

Octahedri latus quadruplum ſeſquialterum poteſt rectæ, cuius Dodecahedri ipſi Octahedro inſcripti latus erit maius ſegmentum.

Quoniam ex decimaquarta huius patuit latus octahedri, lateris ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum fuiſſe potentia atqui latus cubi ſectum, efficit maius ſegmentum ſibi circunſcripti dodecahedri latus, per corollarium tertium decimætertiæ decimiquinti ſequetur ideo octahedri latus quadruplum ſeſquialterum eſſe, eius rectæ (ſcilicet lateris cubi) cuius maius ſegmentum eſt latus dodecahedri ipſi cubo inſcripti. Dodecahedrum autem & cubus ſibi inuicem inſcripta eidem octahedro inſident, per corollarium primæ huius. Octahedri igitur latus quadruplum ſeſquialterum poteſt.

Propoſitio decimaſexta.

Icoſahedri latus eſt maius ſegmentum, eius quæ duplum poteſt lateris Octahedri ipſi Icoſahedro inſcripti.



Sit icoſahedrum A B G D F H E C, *cuius latus eſto* B G *vel* E C, *ſibi vero inſcriptum octahedrũ eſto* A K D L, *latúſque eius* A L: *Dico latus* E C *eſſe maius ſegmẽtum eius rectæ quæ duplum poteſt lateris* A L, *quoniam figurarum inſcriptarum & circũſcriptarum idem eſt centrum, per corollarium vigeſimæprimæ decimiquinti, ſit illud* I, *per quod centrum rectæ in biſariãs oppoſitorum laterum ſectiones ductæ, ſcilicet* A I D K I L *ſeſe bifariam & ad rectos in* I *ſecant, per corollarium decimæquartæ decimiquinti: quia vero biſariãs ſectiones rectarum oppoſitarũ* B G *&* H F *iungunt, ad rectos eas ſecãt, & igitur parallelæ ſunt* B G H F, *per quartum coroll. decimæquartæ decimiquinti, coniuncta igitur* B H *ipſi* K L *parallela & æqualis erit, per trigeſimamtertiam primi ſed* B H *bina pentagoni latera ex lateribus icoſahedri compoſiti ſubtendit, ſcilicet* B A A H, *ipſa itaque* B H *ſecta maius ſegmentum efficit pentagoni latus, per octauam decimitertij, quod idem eſt icoſahedri ſcilicet* E C, *ipſi autem* B H *æqualis* K L *duplum poteſt lateris* A L *octahedri: nam rectus eſt quadrati* A K D L *angulus* K A L, *per quadrageſimamſeptimam primi. Latus igitur* E C *icoſahedri, maius ſegmentum eſt eius* B H *aut* K L, *quæ quidem duplum poteſt ipſius* A L, *lateris octahedri ipſi icoſahedro inſcripti. Icoſahedri itaque latus eſt maius ſegmentum eius quæ duplum poteſt lateris, &c.*

Propoſitio decimaſeptima.

Cubi latus ad ſibi inſcripti Dodecahedri latus, rationem habet extremę & mediæ rationis duplam.

Quoniam patuit ſecundo corollario decimætertiæ decimiquinti, cubi latus extrema & media ratione ſectum, efficere minus ſegmentum dodecahedri ſibi inſcripti latus, ſed tota ad minus ſegmentum duplam rationem habet quàm ad maius, per decimam diffinitionem quinti, quum tota maius & minus ſegmenta ſint continuæ proportionales rectæ, per tertiã diffinitionẽ ſexti. Tota igitur (ſcilicet cubi latus) ad ſibi inſcripti dodecahedri latus, ſcilicet minus eius ſegmentum, rationem habet duplam extremæ & mediæ rationis, ſcilicet eius quam habet tota ad maius ſegmentum, quæ ſemper eſt eadem, ex ſecunda decimiquarti.

Propoſitio decimaoctaua.

Dodecahedri ad ſibi inſcripti cubi latus, rationem habet mediæ, ac extremę conuerſam.

Oſtenſum eſt tertio corollario decimætertiæ decimiquinti, circunſcripti cubo dodecahedri latus euſdem cubi maius eſſe ſegmentum: totum igitur inſcripti cubi latus ad maius ſegmentum ſcilicet

circun-

circumscripti dodecahedri latus, rationem habet mediam & extremam. Conuertendo [illegible] segmentum (hoc est dodecahedri latus) ad totam (nempe inscripti cubi latus) ext[illegible] conuersam habet, per decimamtertiam diffinitionem quinti.

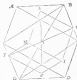
Propositio decimanona.

Latus Octahedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

Quoniam (per corollarium decimæquartæ decimitertij) octahedrum secatur in binas quadrilateras pyramides, esto altera earum A B G D F, *circulorum autem quatuor octahedri bases obeuntium centra sint* K E I C, *coniunctis* K E E I I C, C K *rectis quadratum itaque erit* K E I C, *& basis cubi ipsi octahedro inscripti, per quartam decimiquinti. Cùm enim cubi & sibi inscriptæ pyramidis anguli in centris basium octahedri cubo circunscripti habitent, per sextam decimiquinti, & pyramidis latus oppositos basis cubi angulos coniungat, per primã decimiquinti, manifestum erit rectam* E C *latus esse pyramidis octahedro* A B G D F *inscriptæ: Dico igitur latus* G D *octahedri sesquialterum esse ipsius* E C, *lateris pyramidis sibi inscriptæ, à signo* A *perpẽdiculares in bases* B G *&* F D *demittantur* A N A M, *ipsæ (ex corollario duodecimæ decimitertij) per centra* E *&* C *ducentur. Coniungantur autem* N M, *cum autem quadratum sit* B G D F *per decimamquartam decimitertij, parallelæ erunt* N G *&* M D, *& æquales: nam sectæ sunt* B G *&* F D *à perpendicularibus in* N M *bifariã, per tertiam tertij, parallelæ igitur erunt & æquales* N M G D, *per decimamtertiam primi, quia verò sectæ similiter sunt rectæ* A N A M *in* E *&* C, *similium & æqualium triangulorum perpendiculares, parallelæ erunt (per secundam sexti)* E C N M *rectæ, & proinde (ex corollario eiusdẽ) similia erunt triangula* A E C A N M, *quare erit* A N *ad* A E *sicut* N M *ad* E C, *per quartam sexti. Est autem* A N *ipsius* A E *sesquialtera, cum* A E *dupla sit ipsius* E N, *per corollariũ duodecimæ decimitertij, recta igitur* N M, *siue* G D *sibi æqualis, sesquialtera erit rectæ* E C. *Latus itaque* G D *octahedri, lateris* E C *sibi inscriptæ pyramidis, sesquialterum erit.*

Propositio vigesima.

Si ab Icosahedri dimetientis potentia, tripla auferatur lateris sibi inscripti Cubi potentia, reliqua sesquitertia erit potentiæ lateris ipsius Icosahedri.



Proponatur icosahedrum A B G D, *sibi verò inscripti cubi binæ bases coniunctæ sint* E H K L F C, *dimetiens cubi sit* F H, *latus verò* E H, *dimetiẽs autem icosahedri sit* B G, *latus verò* A B. *Dico si à potentia dimetientis* G B *auferatur tripla ipsius* E H *lateris cubi potentia, reliquam sesquitertiam esse potentiæ lateris* A B *icosahedri, cùm centra inscriptarum & circunscriptarum figurarum, idem signum possideant, per corollarium vigesimæ primæ decimiquinti, dimetientes* B G *&* F H *in eo sese bifariam secabunt: nam vertices æqualium & similium pyramidum in eo conuenire docuimus, per idem corollarium, sit illud signum* I *centrum, anguli igitur cubi qui ad* F *&* H, *centra basium icosahedri possidẽt, per vndecimam decimiquinti: recta itaque* F H *vtrisque icosahedri basibus perpendicularis erit, per corollarium lemmatis decimæsexta duodecimi: recta igitur* I B *binas* I H H B *potest, per quadragesimamseptimam primi, est autem* H B *quæ ex centro circuli basim icosahedri suscipientis, nempe angulus* B *in circunferẽtia locatur,* H *verò centrum est: tota itaque* B G *totas* F H *& dimetientem circuli (ipsius* B H *duplam) potest, per decimamquintam quinti, sed dupla recta* H B *dimetiens, sesquitertium potest lateris trianguli æquilateri eidẽ circulo inscripti, per corollarium duodecimæ decimitertij, est enim ad latus, vt latus ad perpendicula-*

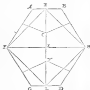
rem trianguli, per corollarium octauæ sexti. Dimetiens vero cubi F H, *triplum potest lateris* E H *eiusdem cubi, per decimamquintam decimitertij. si itaque à potentia dimetientis* B G *auferatur tripla potentia lateris* E H *inscripti cubi, hoc est potẽtia rectæ* F H, *reliqua (scilicet potentia dimetientis circuli duplæ ipsius* H B) *sesquitertia erit lateris trianguli ipsi circulo inscripti, quod idem est icosahedri latus* A B. *Si igitur ab icosahedri dimetientis potentia, &c.*

Corollarium.

Dimetiens Icosahedri binas potest, dimetientem inscripti cubi quæ basium oppositarum centra iungit, & dimetientem circuli basim icosahedri continentis. *Patuit enim dimetientem* B G *posse rectam* F H *centra iungentem & duplam rectæ* B H, *hoc est dimetientem circuli basim circa centrum* H *continentis.*

Propositio vigesimaprima.

Dodecahedri latus minus segmentum est, eius quæ duplum potest lateris Octahedri, eidem Dodecahedro inscripti.



Exponatur dodecahedrum A B G D C T, *cuius vnum latus sit* A B. *Ipsi dodecahedro inscriptum octahedrum esto* E F L K I, *cuius latus sit* E F. *Dico* A B *latus dodecahedri esse minus segmentum cuiusdam rectæ (extrema & media ratione sectæ) quæ duplum potest lateris* E F, *octahedri dodecahedro inscripti. Iungãtur octahedri dimetientes* E L F K, *ipsæ bifariàs sectiones oppositorũ dodecahedri laterũ* A B & G D *coniungunt (per nonam decimiquinti, & tertium corollarium decimæseptimæ decimitertij) singulaque earum extrema & media ratione sectæ, minus efficiunt segmentum latus dodecahedri, per quartum corollarium eiusdẽ. Recta igitur* F K *minus segmentum est* A B *latus, sed recta* F K *binas potest* E F E K *æquales, per 47 primi: nam rectus est* F E K *angulus quadrati* F E K L *octahedri. Recta itaque* F K *duplum potest rectæ* E F, *erit ideo* A B *latus minus segmentum eius* F K, *quæ duplum potest ipsius* E F, *lateris octahedri. Dodecahedri igitur latus, minus segmentum est eius quæ, &c.*

Propositio vigesimasecunda.

Dimetiens Icosahedri potest & suiipsius lateris sesquitertium, & lateris Icosahedro inscriptæ Pyramidis sesquialterum.

Cùm enim ostẽsum sit, à dimetiente icosahedri ablato triplo lateris cubi sibi inscripti, relinqui sesquitertium lateris ipsius icosahedri potentia, per vigesimam huius. Sed tripla lateris cubi potẽtia est dimetiens ipsius cubi, per decimamquintam decimitertij, cubus autem & sibi inscripta pyramis eadem sphæra concipiuntur, per primam huius, eodémque icosahedro, per corollarium eiusdem. Idem itaque diameter cubi siue sphæra cubum & pyramidem continentis, sesquialterum poterit lateris pyramidis, per decimamtertiam decimitertij. Sequetur itaque à dimetiẽte Icosahedri ablata tripla potẽtia lateris cubi, siue sesquialtera lateris pyramidis, quæ sunt eiusdẽ dimetientis potentiæ, relinqui sesquitertium lateris ipsius Icosahedri. Dimetiens igitur icosahedri potest & suiipsius lateris sesquitertium, & lateris icosahedro inscripta pyramidis sequialterum.

Propositio vigesimatertia.

Dodecahedri latus ad Icosahedri sibi inscripti latus, se habet vt minus segmentum perpendicularis pentagoni, ad eam quæ ex centro in latus eiusdem pentagoni.

Proponatur dodecahedrum A B G D F S O, *cuius latus sit* A S *vel* S O, *sibi vero inscriptũ icosahedrũ esto* K L H M N E, *cuius latus sit* K L. *Ab imis autẽ pẽtagonorũ* B A S F A S *dodecahedri angulis, in cõmunem basim* A S *perpẽdiculares mittantur* B C F C, *ipsa per centra pentagonorum* K *&* L *transeunt, per corollarium decimæ decimitertij, iungãtur* B F R O, *quoniam* R O *subtendit angulum pentagoni dodecahedri* O F R, *ipsa secat rectam* F C *extrema & media ratione per tertiã huius, secet in* I, *quia verò* K L *est latus icosahedri dodecahedro inscripti, ipsa centra* K L *coniungit, nam anguli icosahedri in centris basium dodecahedri morantur, per septimam decimiquinti: Dico dodecahedri latus* S O *sic esse ad icosahedri latus* K L, *vt minus segmentum* I F *rectæ* C F *perpẽdicularis, ad* L C *quæ ex centro* L *in latus* A S *pentagoni. Cùm trianguli* B C F *bina latera* C B C F *similiter secta sint in* L *&* K *centris, proportionaliter sectæ parallelas efficient rectas* B F K L, *per secundam sexti, æquiangula igitur erunt triangula* B C F *&* K C L, *per corollarium eiusdem: sicut itaque* C L *ad* K L, *sic erit* C F *ad* B F, *per* 4 *sexti. Sed* C F *efficit minus segmentum* I F, *per tertiam huius, &* B F *efficit minus* S O, *latus inquam dodecahedri, per corollarium secundum decimatertiæ decimiquinti. Nam* B F *iungens angulos* B *&* F *basium dodecahedri, æquatur lateri cubi dodecahedrum capientis, ex decimatertia decimiquinti. Sicut itaque tota* C F *ad totam* B F, *sic erit minus segmentum* I F *ad minus* S O (*nempe similiter sectarum, per secundam decimiquarti*), *sed sicut* C F *ad* B F, *sic fuit* C L *ad* K L. *Sicut itaque* I F *ad* S O, *sic erit* C L *ad* K L, *vicissim igitur* (*per decimamsextam quinti*) *vt* I F *minus segmentum perpendicularis pentagoni* F A S *ad* L C *eã quæ ex centro pentagoni in basim, sic erit* S O *latus dodecahedri, ad* K L *latus sibi inscripti icosahedri. Dodecahedri igitur latus ad isacohedri sibi inscripti latus se habet, vt minus segmentum, &c.*

Propositio vigesimaquarta.

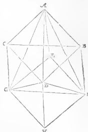
Si lateris icoſahedri dimidia extrema & media rarione ſecta fuerit, minúſque ſegmentum eius à toto larere tollatur, Reliquæ verò tertia pars rurſus auferatur, quæ ſupereſt, æqualis erit lateri Dodecahedri ipſi Icoſahedro inſcripti.

Sit quinquangulum A B G D F *quinque icosahedri latera comprehendens, per* 16 *decimitertij, circulo cuius centrum sit* E *contentum, super huius autem quinquanguli lateribus excitentur triangula angulum solidum icosahedri qui ad* I *componentia, per* 16 *decimitertij, In circulo autem* A B D *triangulum æquilaterum inscribatur* A H K. *A centro* E *in bina* H K *&* G D *latera trianguli ac pentagoni perpendicularis mittatur* E C N M *recta, ductis* E G E D I G I D *rectis. Secetur bifariam* B G *in* T *coniunctis* I N I T T N E T. *Quoniam in rectis* I T I N *sunt centra circulorum triangula æquilatera* I B G I G D *continentium, per coroll. primæ tertij. Sint hæc* S *&* O, *coniuncta* S O *recta, lateris porrò icosahedri* B G, *dimidia* T B *extrema & media ratione secetur in* R, *per trigesimam sexti, minúsque eius segmentum esto* R B. *Cum enim triangulorum* I B G I G D *centra coniungat recta* S O. *Ipsa* (*per quintam decimiquinti*) *erit latus dodecahedri, icosahedro cuius latus est* B G *inscripti. A* B G *igitur latere tollatur* B R, *minus segmentum dimidiæ. A reliquo vero* G R *tertia pars auferatur* (*per nonam sexti*) G V. *Dico reliquam* R V *æqualem esse ipsi* S O *lateri inscripti dodecahedri. Cùm autem*

perpendicularis E N *secetur in* C *extrema & media ratione, per coroll. primæ decimiquarti. Maiúsque eius segmentum sit* E C, *Ipsi vero* E C *sit æqualis* C M, *per coroll 12 decimitertij. Erit* E C *ad* C N *vt* C M *ad eandem* C N, *per septimam quinti. Sed sicut* E C *ad* C N *sic tota* E N *ad maius segmentum* E C, *per tertiam diffinit sexti. Sicut itaque (per vndecimam quinti) tota* E N *ad maius segmentum* E C, *sic* C M *ad* C N. *Recta ideo* C M *extrema & media ratione secatur in* N, *nempe similiter ipsi* E N, *per secundam decimiquarti. Recta igitur* E M *excedit rectam* E N *minori segmento dimidiæ sui ipsius, quod est* M N. *Cum insuper* E G D *sit triangulũ pentagoni æquilateri & æquiãgnuli* A B G D F. *&* E T N *sit similiter triangulum similis pentagoni ipsi* A B G D F *inscripti. Erit (ex vigesima sexti)* E T N *ipsi* E G D *simile. Sicut itaque* E G *ad* E N *sic erit (per quartam sexti)* G D *ad* N T. *Recta igitur* G D *(vel* E G *sibi æqualis) excedit rectam* N T *minori segmento dimidiæ sui ipsius* E G *nã* E G *excessit similiter ipsam* E N. *Est autem minus illud segmentum* E R, *Reliqua igitur* R G *rectæ* N T *æqualis erit. Quoniã triangulum æquilaterum est* I B G. *Perpendicularis* S T *dimidia est eius quæ à centro* S I, *per coroll. duodecimæ decimitertij. Recta itaque* I T *excedit rectam* I S *tertia sui ipsius parte. Quia vero* S O *sectiones contingens, parallela est ipsi* T N, *per secundam sexti Nam similiter secta sunt* I T I N *per* S *&* O. *Similia erunt* I T N I S O *triangula, per coroll. secundæ sexti. Sicut itaque* I T *ad* I S *sic (per quartam sexti)* T N *ad* S O. *Excedit autem* I T *rectam* I S *tertia parte. Excedet igitur* T N *rectam* S O *tertia parte. Sed ipsi* T N *æqualis fuit* R G. *Recta igitur* R G *excedet rectam* S O *tertia sui parte quæ quidem fuit* G V. *Quare reliqua* R V *rectæ* S O *erit æqualis, lateri quidem dodecahedri, icosahedro cuius latus fuit* B G *inscripti. Si itaque lateris icosahedri dimidia extrema & media ratione secta fuerit, minúsque, &c.*

Propositio vigesimaquinta. *Problema 1.*

Datum cubum sibi inscriptæ trilateræ ęquilaterę Pyramidis, triplum esse demonstrare.



Datus cubus sit A B C H, *sibi verò inscripta pyramis esto* A G D F: *Dico cubum* A B C H *pyramidis* A G D F *triplum esse. Quoniam basis* A F D *communis est pyramidibus* A F D E *&* A F D G, *pyramis* A F D E *extra pyramidem* A F D G *erit. Similiter & reliquæ inscriptæ pyramidis bases communes sunt reliquis pyramidibus extrinsecus positis, quæ sunt* A G D C *super basi* A D G, *&* A E G F *super basi* A G F. *Super basi verò* G D F *pyramis* G D F H. *Quæ quidem pyramides extrinsecus sumptæ sunt quatuor, æquales adinuicem & similes, per octauam diffinit. vndecimi. Nam singulæ tribus hemiquadris cubi vnáque pyramidis inscripta basi cõcluduntur. Qualibet itaque earum super dimidia cubi basi ac ipsius cubi altitudine continetur, vt pyramis* A E G F *basim habet dimidiam quadrati* E H, *eam scilicet* E G F, *cubi verò altitudinem* A E. *Quæ ideo sexta erit ipsius cubi pars. Nam si secetur cubus in bina prismata plano* C E F G, *prisma* A C E G E F *triplum erit pyramidis* A E G F, *super eadem eius basi* E G F *& vertice* E A, *per coroll. primum septimæ duodecimi. Totius igitur cubi ipsa* A E G F *& pyramis exterior sexta pars erit. Et proinde ipsa eadem cum tribus reliquis* A F D E A G D C, *&* G D F H *totius cubi duo tertia complebit. Quare rliqua* A G D F *inscripta reliquum cubi tertium comprehendet, & proinde cubus ipsius triplum conuersim continebit. Datum itaque cubum sibi inscriptæ trilateræ æquilateræ pyramidis, triplum esse demonstrauimus.*

Propositio vigesimasexta. *Problema 2.*

Pyramidem trilateram ęquilateram, sibi inscripti octahedri duplam ostendere.

Propona

[illegible] æquilatera pyramis [illegible] B C D, cuius sex latera [illegible] secantur in E [illegible] G I F H, ascripto (ex [illegible] [illegible]ti) ipsi octahedro Pyramides igitur [illegible] C G I F & D H K I extra inscriptum octahedr[illegible], per eandem secundam decimiquinti [illegible] es extrinsecæ (scilicet A E K F & tres reliquæ) sunt toti similes, per septimam diffinit. vndecimi. Nam secantur earum bases in triangula similia, per parallelas, ex coroll. secundæ sexti. Tota itaque ad singulas earum triplam habet laterum rationem, per octauam duodecimi. Dupla autem fuit laterum A B ad A E ratio, per constructionem. Pyramis itaque A B C D pyramidis A E F K ac singularum ipsi A E F K æqualium, octupla erit. Dupla nanque bis in se ducta octuplam restituit. Sequetur igitur quatuor pyramides A E F K B E G H C G F I, & D E H I simul sumptas, dimidium totius A B C D pyramidis efficere. Reliquum igitur scilicet octahedrum E F I H K G, dimidium totidem restituet. Pyramis ideo ipsius octahedri duplum referet. Pyramidem igitur trilateram æquilateram sibi inscripti octahedri duplam ostendimus.

Propositio vigesimaseptima. *Problema 3.*

Cubum sibi inscripti octahedri, sextuplum esse propalare.

Exponatur cubus A B C D E F G H. Cuius quatuor stantes A B E F C H & D G bifariam secentur in I K M L, per ea verò signa ducatur planum K L M I. Quod quadratum erit & parallel[illegible] quadratis B C F H, per decimamquintam vndecimi. In ipso igitur erit basis communis binis pyramidibus octahedri in ipso cubo inscripti, per ostensa tertia decimiquinti. Sit igitur ipsa basis quadratum N P R Q centra basium cubi contingens, super ipsa verò (ex eadem tertia decimiquinti) construantur binæ octahedri pyramides N P Q R S & N P Q R T. Quoniam binæ illæ pyramides totius cubi altitudini æquantur sublimitate, singulæ dimidiam habent cubi altitudinem, scilicet dimidium cubi latus X B. Cùm autem quadratum K L M I quadrati N Q R P sit duplum, per 47 primi, Reliqua cubi quadrata ipsius N Q R P dupla erunt singula. Quia verò cubus vt patuit vltima decimiquinti, resoluitur in sex pyramides, quarum bases sunt bases cubi, vertices verò, quæ ex centro in bases, dimidio cubi lateri æquales, sequetur cubi singulas sex pyramides, super duplici basi eodem autem vertice ipsi octahedri pyramidibus, duplas esse pyramidum octahedri, per sextã duodecimi. Cùm itaque singulæ cubi pyramides binis octahedri pyramidibus sint æquales, sex cubi pyramides totius octahedri sextuplum proferent. Cubum itaque sibi inscripti octahedri sextuplum esse propalatum est.

Propositio vigesimaoctaua. *Problema 4.*

Datum Octahedrum, sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum patefacere.

Proponatur octahedrum A B C D E F, *ipsi vero inscriptus cubus esto* G H I K Q R S. *Dico octahedrum inscripti cubi quadruplum sesquialterum fore. Cùm à centro octahedri sive sphæra illud continentis in suarum basium centra ducta, æquales ostensæ sint, per 21 decimiquinti. Cubi vero anguli in harum basium centris degant, per quartam decimiquinti. Sequetur ipsas easdem rectas ab eodem cubi & octahedri centro ortas esse, cum idem sit eorum centrum, per coroll. 21 decimiquinti. Sit igitur illud centrum* T. *Basis itaque* B D F C *secans octahedrum in binas æquas & quadrilateras pyramides, per coroll. 14 decimitertij, secabit cubum bifariam, per coroll. 39 undecimi. Nam ea per centrum* T *transit, per demonstrata 14 decimitertij. Cum autem basis cubi in* G H I K *quatuor centris basium pyramidis* A B D F C *consistat, per ea signa extensum planum* L N O M *parallelum erit plano* B D F C, *per ostensa quarta decimiquinti, secabitque pyramidem in signis* L N O M, *& parallelæ erunt* L N B D, *&* N O D F, *necnon* O M F C, *&* L M B C, *& quadrato* L N O M *inscriptum erit quadratum cubi* G H I K, *per eandem. Duplum igitur erit* L O O M *ipsius* G H I K, *per 47 primi. Demittatur à solido angulo* A *perpendicularis in planum* B D F C, *quæ cadat in* T, *sitque* A T, *secans planū* L N O M *in* P. *Ipsa recta similiter erit ad* L N O M *planum, per coroll. 14 undecimi. Demittatur rursus ab angulo* B A D *trianguli* A D B, *per centrum trianguli scilicet* H *in basim, recta* A H X. *Sesquialtera igitur erit* A X *ipsius* A H, *per coroll. 12 decimitertij, quare dupla fiet* A H *ipsius* H X. *Similiter igitur sectæ erunt reliquæ* A B A D A F A C, *per 17 undecimi, Atque perpendicularis* A P T. *Dupla igitur erit* A P *recta* P T. *Et proinde ipsius cubi erit altitudo* A P, *cùm dimidia fuerit* P T. *Quia verò super* G H I K *cubi basi, & altitudine* A P, *eiusdem cubi constituitur pyramis* A G H I K, *ipsa cubi tertia pars est, per coroll. 7 duodecimi. Sed pyramidis* A G H I K *dupla est pyramis* A L N O M, *super dupla basi, per sextam duodecimi. Pyramis igitur* A L N O M *duo tertia cubi complet. Cùm autem similes sint pyramides* A L N O M *&* A B D F C, *per septimam diffinitionem undecimi, Ipsæ triplam habent quam latera* A H *ad* A X, *vel* A L *ad* A B *rationē, per coroll. octauæ duodecimi. Sed* A B *ipsius* A L *sesquialterum fuit latus, sesquialtera igitur quantitas rationis ter sumpta (per 5 diffinitionem sexti) triplam tripartientem octauas componet, hoc est,* $3\frac{3}{8}$ *quātitas rationis. Nam* $1\frac{1}{2}$ *in se efficit* $2\frac{1}{4}$, *quòd rursus, per* $1\frac{1}{2}$, *efficit 3 &* $\frac{3}{8}$. *Erit igitur pyramis* A B C D F *ad pyramidem* A L N O M, *sicut 27 ad 8, in ea scilicet ratione* $3\frac{3}{8}$. *Sed qualium* A L N O M *pyramis fuit 8, cubis fuit 12, sesquialterum nempe pyramidis. Qualium igitur cubus fuit 12 eorum totum octahedrum (duplum, scilicet pyramidis* A B D F C*) erit 54. Quæ quidem 54 ad 12 rationem habent quadruplam sesquialteram. Totum itaque octahedrum inscripti cubi quadruplum sesquialterum erit. Datum igitur octahedrum, sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum patefecimus.*

Corollarium.

Octahedrum & sibi inscriptus Cubus rationem quam latera potentia habent. *Nam 14 huius latus octahedri quadruplum sesquialterum potuit lateris sibi inscripti cubi.*

Propositio vigesimanona. *Problema 5.*

Propositum Octahedrum, sibi inscriptæ trilateræ æquilateræ Pyramidis, tredecuplum sesquialterum ostendere.

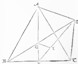
Propo



Propositum octahedrum esto A B *cui inscribatur cubus* E C E D, *per quartã decimiquinti, ipsi vero cubo pyramis* F E G D, *per primam decimiquinti inscribatur, quoniã anguli pyramidis (ex eadem) in cubi angulis morantur, cubi vero anguli in centris basium octahedri consistunt* F E C D G, *per quartam decimiquinti, anguli itaque pyramidis in centris basium octahedri* F E G D *constituentur. Pyramis igitur* F E D G *octahedro (per sextam decimiquinti) inscripta erit, cum autem octahedrum* A B *sibi inscripti cubi* F C E D *(per præfatam) quadruplum sesquialterum ostensum fuerit, cubus verò* C D E F *pyramidis* F E D G *sibi inscriptæ (ex vigesimaquinta huius) triplus esse demonstretur. Tribus igitur magnitudinibus expositis, octahedro scilicet cubo & pyramide extremorum (octahedri scilicet ad pyramidem) rationem, ex rationibus mediis (scilicet octahedri ad cubum, & cubi ad pyramidem) eliciamus, iuxta ea quæ decimam quinti diffinitionem exponẽtes docuimus. Tum igitur multiplicãdæ erunt rationũ (octahedri ad cubum quæ fuit $4\frac{1}{2}$, & cubi ad pyramidem quæ fuit 3) quantitates, ex quinta diffinitione sexti, vt oriatur $13\frac{1}{2}$ octahedri ad sibi inscriptam pyramidem ratio. nam $4\frac{1}{2}$ per 3 ducta, $13\frac{1}{2}$ restituent, pyramidis igitur inscriptæ octahedrum tredecuplum sesquialterum erit. Propositum itaque octahedrum sibi inscripta trilateræ, &c.*

Propositio trigesima. *Problema 6.*

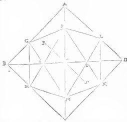
Trilateram æquilateram Pyramidem, sibi inscripti cubi nocuplam esse demonstrare.



Esto pyramis A B C D, *cuius duæ bases sint* A B C D B C, *earum vero centra sint* G & I, *ab angulo* A *in basim* B C *perpendicularis agatur* A E, *ab angulo autem* D *in basim eandem* B C *fiat perpendicularis* D E, *ipsæ conuenient in* E *sectionem, per tertiam tertij, & in eis erunt centra* G & I, *per corollarium primæ tertij: cùm autem* A D *sit pyramidis latus, ipsa* A D *erit dimetiens basis cubi pyramidem obeuntis, per primam decimiquinti. Iungantur ideo* G I. *Quia recta* G I *cẽtra coniungit basium pyramidis, ipsa* G I *erit dimetiens basis cubi ipsi pyramidi inscripti, per decimãoctauam decimiquinti, cùm autem* A G *sit ipsius* G E *dupla, ex corollario duodecimo decimitertii, tota* A E *tripla erit rectæ* G E, *necnon* D E *rectæ* I E, *quare parallelæ sunt* A D G I, *per secũdam sexti & ideo similia* A E D G E I *triangula, per corollarium eiusdem. Quia verò similia sunt triangula* A E D G E I, *tripla erit* A D *ipsius* G I, *per quartam sexti, sed* A D *fuit dimetiẽs basis cubi pyramidi* A B C D *circunscripti,* G I *vero fuit dimetiens basis cubi eidem pyramidi* A B C D *inscripti, basium verò dimetientes, laterum sunt æquemultiplices (nempe potentia dupli) cubi igitur circunscripti ipsi* A B C D *pyramidi latus, triplum erit lateris cubi eidem pyramidi inscripti, per decimamquintam quinti: similes autem cubi triplam habent laterum rationem, per trigesimamtertiam vndecimi, latera verò triplam inter se habent. Tripla itaque ter sumpta vigesimamseptuplam producet, quæ est 27 ad 1 in iam quatuor terminis 27, 9, 3, 1, in tripla ratione constitutis, erit (per decimam diffinitionem quinti) tripla ratio primi 27 ad quartum 1, sue rationis primi 27 ad secundum 9, quæ quidem est tripla laterum ratio, similibus conuenientis solidis, qualium itaque circũscriptus cubus erit 27, eorum inscriptus erit vnius. sed qualium circũscriptus cubus fuit 27 eorum sibi inscripta pyramis fuit 9, per vigesimamquintam huius: qualium igitur pyramis* A B C D *erit 9, eorum pyramidi inscriptus cubus erit vnius. Trilateram igitur æquilaterã pyramidem, sibi inscripti cubi nocuplam esse demonstrauimus.*

Propositio trigesimaprima.

Octahedrum ad sibi inscriptum Icosahedrum eam seruat quam binę Octahedri bases ad quinque Icosahedri bases rationem.



Sit propositum octahedrum A B C D *sibi vero inscriptũ icosahedrũ esto* F G H M K L I O *Dico octahedrum ad icosahedrum esse, sicut duæ octahedri bases ad quinque icosahedri bases. quoniam octahedri solidum constat octo pyramidibus, super octahedri basibus altitudine vero recta à centro in basim perpendiculari constitutis, sit ea perpendicularis* E R *vel* E S, *demissa ab* E *centro solidorum eodem (per corollar. vigesimæprimæ decimiquinti) in cẽtra basium* R & S. *Tres igitur pyramides, cum sint æquales & similes, æquales erunt prismati super eadem basi, & altitudine per corollariũ septimæ duodecimi. Sed huius prismatis duplũ est quod super eadẽ basi dupla vero altitudine, scilicet tota* R S, *per corollarium vigesimæquintæ undecimi: nam æquum est binis æquis & similibus ex quibus componitur. Prisma itaque super basi octahedri, altitudine verò* R S *æquum erit sex pyramidibus super basibus sex octahedri vertice verò* E R *cõstitutis. Supersunt autem binæ pyramides, cum sint octo octahedri bases, quæ igitur æquales erunt prismati, quod super tertia basis octahedri parte, & altitudine* R S *continetur: nam prismata eiusdem verticis ad se sunt ut bases, per corollarium septimæ duodecimi. Bina igitur prismata quæ super octahedri basi & tertia eius parte, vertice vero* R S, *octo octahedri pyramidibus, sive toti octahedri solido, sunt æqualia. Cùm autem octahedro inscriptum icosahedrum in basibus octahedri suas bases statuat, per decimamseptimam decimiquinti sequetur pyramides super basibus icosahedri constitutas, atque ad idem centrum* E *conos deducentes, sub eadem altitudine pyramidum octahedri contineri, scilicet ipsa* E R *vel* E S: *& proinde prisma super basi icosahedri, altitudine verò dupla pyramidis scilicet tota* R S, *æquum esse sex pyramidibus super basi icosahedri, vertice autẽ* E R *vel* E S *constitutis, ut ostendimus in octahedro. Viginti igitur basium icosahedri pyramides, æquantur tribus prismatis super basi icosahedri vertice autem* R S *constitutis, ac insuper alteri prismati super tertia icosahedri basis parte, vertice verò eadem* R S *contento, quod prisma prioris tertia pars est, per corollarium septimæ duodecimi, cùm ad se sint ut bases. Bina itaque prismata quæ super basi octahedri & eius tertia parte, vertice autem* R S *continentur. Ad quatuor quæ super tribus icosahedri basibus, & unius basis tertia parte, sub eodem verò* R S *vertice continentur, ad se erunt ut bases, hoc est ut quatuor tertiæ basis octahedri (quæ sunt uni basi & $\frac{1}{3}$ æquales) ad decẽ tertias basis icosahedri, quæ sunt tribus & $\frac{1}{3}$ basibus æquales, sive ut duæ tertiæ octahedri ad quinque tertias icosahedri, sed duæ tertiæ basis octahedri, ad quinque tertias basis icosahedri, sunt ut duæ bases ad quinque bases, per decimamquintam quinti, partes nanque æquemultiplicium. Bina verò octahedri prismata, ad quatuor icosahedri prismata, ad se sunt ut octahedri solidum ad icosahedri solidum, cùm utraque singulis solidis sint æqualia. Erunt igitur (per undecimam quinti) octahedrum ad sibi inscriptum icosahedrum solida, ut duæ octahedri bases ad quinque inscripti icosahedri bases. Octahedrum itaque ad sibi inscriptum icosahedrum, eam servat quam, &c.*

Propositio trigesimasecunda.

Icosahedri solidi ad sibi inscriptum dodecahedri solidum ratio constat, ex ratione lateris Icosahedri ad latus cubi eadem Sphæra comprehẽsi, & ratione tripla dimetiẽtis, ad eam quæ coniungit oppositarum Icosahedri basium centra.

Esto dodecahedrum cuius dimetiens sit H I, *icosahedrum verò eadem sphæra conceptum sit* A B G C, *cuius dimetiens* A C. *Recta autem oppositarum basium centra iungens, esto* B G, *idem insuper icosahedro inscriptum dodecahedrum sit quod sub dimetiente* B G, *per quintam decimiquinti, latus cubi esto* D E, *icosahedri verò esto* D F, *eadem sphæra descriptorum: Dico rationem icosahedri* A B G C *solidi ad sibi inscripti dodecahedri super dimetiente* B G *solidum constare, ex ratione* D F *ad*

D E

D E,& tripla rationis A C *ad* B G *quoniã icosahedri* A B G C *& dodecahedri* H I, *eadẽ sphæra comprehensorum solida, ad se sunt, vt* D F *ad* D E, *per octauam decimiquarti. Dodecahedrũ verò cuius dimetiens* H I *ad illud cuius dimetiens est* B G, *triplam habet dimetientium* H I *ad* B G *rationem, per corollarium decimæseptimæ duodecimi, sed* H I *&* A C *sunt æquales ex hypothesi. Vt igitur* H I *ad* B G *sic est* A C *ad* B G. *Ratio itaque extremorum, scilicet icosahedri* A B G C *ad dodecahedrum sub dimetiente* G B *cẽtra iungente cõstat, per quintam diffinitionem sexti, ex rationibus mediorum, scilicet ex ratione icosahedri* A B G C *ad dodecahedrum* H I *(quæ fuit eadem rationi* D F *ad* D E) *& ratione eiusdẽ* H I *ad reliquũ dodecahedrum sub dimetiente* B G, *eidem icosahedro* A B G C *inscriptum, per eandem quintam decimiquinti, quæ fuit tripla rationis rectæ* H I *(vel* A C) *ad* G B *iungentem centra oppositarum icosahedri basium. Icosahedri itaque solidi ad sibi inscriptum dodecahedri solidum ratio, &c.*

Propositio trigesimatertia.

Dodecahedri solidum excedit cubi sibi inscripti solidum, parallelepipedo solido, cuius basis à basi cubi deficit tertio minoris segmenti, vertex autem à cubi vertice minori segmento minoris, dimidij lateris.

Quoniam patuit decimaseptima tertij & octaua decimiquinti, basim cubi dodecahedro inscripti suis lateribus quatuor pentagonorum ad idem dodecahedri latus concurrentium, angulos subtendere, Sit igitur basis cubi A B C D, *quatuor verò bases dodecahedri circunscripti ad latus quod sit* E G *concurrant, comprehendentes solidũ* A E B D G C *subsultans super* A B C D *basi, secentur bifariã latera* A B *&* D C *ducta* L N, *quæ parallela est lateri* E G, *vt patuit decimaseptima decimitertij, necnon perpendiculares* E R G O *ipsas iungentes æquales esse, singulas dimidio* E G *lateri, esseq́; maius segmentum dimidij cubi lateris, & proinde totam* E G *totius* L N *cubi lateris maius esse segmentum. ducantur per signa* R *&* O *rectæ parallelæ lateribus* A B *&* C D H E F H I K, *quoniã* F H E R *tangentes ad binas* I K G O *tangentes sunt parallelæ nõ in eodem plano, parallela sunt quæ per ipsas plana* E F H *&* G I K *per decimamquintam vndecimi, solidum* A E B D G C *secantia. Quatuor itaque fiũt pyramides, quadrangulæ super rectangulis* L H L F N K *&* N I, *vertice autem* E *&* G, *quoniã triangula* G O K E R H *sunt æqualia & similia, per quartam primi, æquis nempe lateribus æquos angulos comprehendentia, ac parallela constructa, in planis* G I K *&* E F H *constituta, parallelogramma erunt* G E H E O K H R, *&* G O R E, *per trigesimamsextam diffinitionem primi, & hac de re prisma erit* G O E R H *solidum, per vndecimam diffinitionem vndecimi simili argumen o prisma patebit* G O I E R F, *quia verò super æquis basibus* N O K C *&* R L E H, *& verticibus* O G R E *constituta sunt pyrami-*

d.s, ipsæ æquales sunt pyramidi quæ super dupla basi C K I D, & eodẽ vertice O G, per sextam duodecimi, cùm etiam lateris C B latus O E sit maius segmẽtum rectæ K H rectæ G E æqualis per trigesimãtertiã primi, erit eiusdẽ C B maius segmẽtum, per secundam decimiquarti, reliquæ itaq; C K & H B componẽt minus segmentũ totius C B. Sicut autẽ K H maius ad binas C K & H B minus, sic rectangulum O H ad bina O C H L, per primam sexti. Rectanguli itaque N B minus segmentum, erunt bina O C H L rectangula, quibus æquale ponatur rectangulum O K M S, dupla existente M K rectæ C K, ex prima sexti, pyramis super basi O K M S, duo tertia prismatis super eadem basi constituti possidet, per quartum corollarium septimæ duodecimi. Quare prisma quod super duobus tertiis basis O K M S, binis pyramidibus N O K C G & R L B H E æquũ erit, nã prismatis sectiones ad se sunt vt basis sectiones, per primum corollarium vigesimæquintæ vndecimi, basis vero sectiones ad se vt rectæ C B siue K M sectiones, per primam sexti, binæ itaque pyramides N O K C G & R L B H E addunt prismati G O K E R H, duo tertia prismatis super basi O K M S cùm autem K M sit minus segmẽtum totius B C, est nanque æqualis binis C K H B, & similiter ipsi K M sectum sit prisma quod super O K H R, vt patuit, prisma binis pyramidibus æquum addet prismati G O K E R H quod super maiori segmento K H duo tertia minoris segmenti supererit itaque in recta B C tertia pars minoris segmenti, & ideo in rectãgulo N B dimidia cubi basi idem supererit tertium minoris segmenti, haud secus dicemus in reliquis pyramidibus O N D I G & R L A F E, atque prismate G O I E R F eundem relinqui basis L A N D excessum, tertium quidem minoris segmenti. Totum igitur prisma quod inter triangula I G K & F E H, sub longitudine verò maioris segmenti & duobus tertiis minoris lateris cubi B C, æquum est solido quod super basi cubi, à quatuor dodecahedri basibus componitur, quare basis eius prismatis à tota cubi basi tertio minoris segmenti tantum deficit, vertex autem eius prismatis fuit G O, maius quidẽ segmentum, dimidy cubi lateris. Cæterum quia trianguli I G K duplum est rectangulũ super eadem basi I K, & vertice O G per quadragesimamprimam primi, sequetur tria rectangula super eadem basi I K latere cubi, vertice autem O G maiori segmento dimidy lateris, trianguli I G K sextupla esse, Quæ ideo rectangulum super basi I K, vertice vero recta G O tripla constituunt, atqui sex sunt prismata proposito prismati æqualia, super singulis sex cubi basibus constituta & similia, per septimam diffinitionẽ vndecimi, quæ ad se sunt vt bases, per 3 corollariũ septimæ duodecimi. Solidum itaque illud sex prismatis compositum à basi A B C D tertium minoris segmenti tollet, verticem verò à præfato rectãgulo sumens tribus dimidy cubi lateris maioribus segmentis G O æqualẽ habebit. Hæc segmenta ostendamus à latere cubi minore minoris segmenti dimidy cubi lateris deficere. Esto latus cubi A B sectum in A C maius, & C B minus segmentum, per trigesimam sexti, secentur bifariam A C in G, & C B in E, rectæ C G æqualis fiat C L, quoniam A G & G C sunt maiora segmenta dimidiæ A B, vel dimidia maioris qua idem proferunt rectæ E B E C erunt minora segmenta dimidiæ rectæ A B, erit ideo tota C L maius, C E verò minus, sed sicut C L ad C E sic C E ad reliquam E L, recta igitur E L erit maius segmentum rectæ C E, vel E B sibi æqualis, reliqua igitur L B erit eiusdem E B minus segmentum atqui A G G C & C L sunt tria maiora segmenta dimidia totius A B, verticem eius solidi efficientia, vertex itaque solidi à latere cubi A B deficit recta L B, quæ fuit minus segmentum rectæ B E. Quæ rursus B E minus fuit dimidiæ lateris A B cubi, solidum itaque sex solidis constans, quibus dodecahedrum sibi inscriptum cubum excedit, continetur sub basi deficiente à basi cubi tertio minoris segmenti, vertice vero deficiente a latere cubi, minori segmento minoris dimidy cubi lateris. Dodecahedri itaque solidum excedit cubi sibi inscripti solidum, &c.

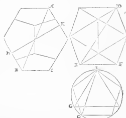
Coroll

Corollarium.

Dodecahedrum est sibi inscripti cubi duplum, dempto tertio minoris segmenti cubi, ac insuper minori segmento minoris dimidij huius excessus. *Nam si proponatur cubus, a quo secetur solidum quod super tertio minoris segmenti basis, eodem autem cubi vertice, ablatũ illud ad totum rationem sectionis ad basim seruat, per trigesimamsecundam vndecimi, demitur itaque a cubo tertium minoris segmenti. Præterea quia reliquum deficit a vertice cubi minori segmento minoris dimidij verticis, vel lateris, cum reliquum illud sit parallelepipedum, si secetur plano parallelo oppositis planis, per signum secans verticem cubi tollet ab eo parallelepipedo solidum habens ad totum rationem sectionis ad verticem, per tertium corollarium vigesimæquintæ vndecimi. Deficit itaque excessus eidem cubo æqualis tertio minoris segmenti, ac insuper minori segmento minoris dimidij huius excessus.*

Propositio trigesimaquarta.

Dodecahedri ad sibi inscriptum Icosahedri solidum ratio, constat ex tripla ratione dimetientis ad eam quæ coniungit oppositarum Dodecahedri basium centra, & ratione lateris cubi ad latus Icosahedri, eidem Sphæræ inscriptorum.



Esto dodecahedrum A H B C K *cuius dimetiens* A B, *recta verò oppositarum basium centra iungens sit* K H, *dodecahedro autem* A B C *inscriptum icosahedrum esto* D E F, *cuius dimetiens* D E, *quia idem circulus comprehendit dodecahedri quinquangulum, & icosahedri triangulum, eidem sphæræ descriptorum (per quartam decimiquarti) sit ille circulus* I G O, *erit ideo cubi latus* I O, *latus quidem icosahedri* I G, *per eandem. Dico rationem Dodecahedri* A H B C K *ad icosahedrum* D E F *sibi inscriptum constare, ex tripla rationis* A B *ad* K H *& ratione* I O *ad* I G. *quoniam icosahedrum* D E F *dodecahedro* A B C *inscriptum est, ex hypothesi, æqualis erit dimetiens* D E *rectæ* K H, *per septimam decimiquinti. Dodecahedrum igitur quod super dimetiente* K H *eidem sphæræ cui icosahedrum* D E F *inscribetur atqui dodecahedrum* A H B C K *ad dodecahedrũ quod super dimetiente* K H, *triplam habet rationem quam* A B *ad* K H *dimetientes, per corollarium decimæseptimæ duodecimi. idem autem dodecahedrum quod super dimetiente* K H, *ad icosahedrũ* D E F *(quod super eadem dimetiente, aut sibi æquali scilicet* D E) *rationem habet, quam* I O *cubi latus ad* I G *icosahedri latus, eidem sphæræ inscriptorum, per octauam decimiquarti. Dodecahedri itaque* A H B C K *ad icosahedrum* D E F *sibi inscriptum ratio constat, ex tripla ratione dimetientis* A B *ad eam* K H, *quæ coniungit oppositarum dodecahedri basium centra, quæ fuit dodecahedri* A H B C K, *ad dodecahedrũ quod super dimetiente* K H, *& ratione lateris cubi* I O *ad latus icosahedri* I G, *quæ fuit dodecahedri quod super dimetiente* K H *ad icosahedrum* D E F, *eidem sphæræ descriptorum, per quintam diffinitionem sexti. Dodecahedri itaque ad sibi inscriptum icosahedri solidum ratio constat, ex tripla ratione, &c.*

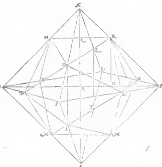
Propositio trigesimaquinta.

Dodecahedri solidum Pyramidis sibi circũscriptæ solidi bipartitur nonas, dempto vnius nonæ (extrema & media ratione sectæ) tertio minoris segmenti, ac insuper minori segmento minoris dimidij reliqui.

Ostensum est dodecahedrum cùm sibi inscripto cubo eadem contineri pyramide corollar. primæ huius. Dodecahedrum autem eiusdem cubi duplum fuisse, dempto tertio minoris segmenti, ac insuper minori segmento minoris dimidij reliqui, siue huius excessus, corollar. 33 huius patuit. Atqui pyramis eiusdem cubi sibi inscripti nocuplum complexa est, per trigesimam huius. Dodecahedrum itaque pyramidi inscriptum bis continens eundem cubum, dempto eodem tertio minoris segmenti, ac insuper minori segmento minoris dimidij reliqui, sibi sumet, siue bipartietur nonas solidi pyramidis (quarum singulæ præscripto cubo sunt æquales) dempto hoc eodem excessu. Dodecahedri igitur solidum pyramidis sibi circunscriptæ solidi, &c.

Propositio trigesimasexta.

Octahedrum excedit sibi inscriptum icosahedrum solido parallelpipedo quod super potentia lateris Icosahedri vertice autem ea quæ semidimetientis Octahedri est maius segmentum.



Esto octahedrū A B C F P L, *cui icosahedrum inscribamus* H K E G M X N V D S Q T, *per 16 decimiquinti, ductis dimetietibus* A Z R C B R O I F, *& perpendiculari* K O, *parallela rectæ* A Z R. *Dico* A B C F P L *octahedrum inscripto icosahedro maius esse, parallelepipedo quod super potentia lateris* H K *vel* G E, *vertice autem recta* K O *vel* R Z *maiori semidimetiētis* A R *segmento cōtinetur. Quoniam ostensum est eadem 16, triangula* K D G *&* K E Q *in basibus octahedri* A P F A L F *descripta esse. Quare circa angulum solidum* F *remanent super basi* F E G *tria triāgula* K E G K E F K F G, *pyramidem* K E F G *concludentia, cui eadem causa æqualis & similis erit, opposita super eadem basi* F E G *pyramis in* E F G. *Haud secus totidem supererunt singulis octahedri solidis angulis, scilicet binæ pyramides super basi* A H K, *binæ item super* B N V, *binæq́ super* D P S, *ac binæ super* Q L T, *æquales & similes, ex diffinit. 8 vndecimi. Duodecim itaque fient pyramides, super basi comprehensa latere icosahedri & binis minoribus segmentis lateris octahedri angulum rectum continentibus, vt* G E F. *Cùm autem latus* G E *angulum rectum subtendens, duplum poßit (ex 47 primi) singularum* E F F G *sicq́* H K *laterum* A H A K, *singulæq́* A H A K *vel* E F F G *duplum poßint singularum* A Z *vel* Z K *angulum rectum continentium, hoc est, trianguli siue basis* A H K. *Sequetur latus* G E *vel* H K *quadruplum posse trianguli* E F G *vel* A H K. *Pyramis autem* K E F G, *basim* E F G *in plano octahedri* F L E P *habens, suscipit verticem perpendicularem* K O, *per 4 diffinit. sexti, quæ quidem est maius segmentum semidimetientis octahedri, per 16 decimiquinti, tres itaque pyramides sub eodem vertice & æquis basibus, prismati quod super eisdem basi & vertice construitur erunt æquales, per 1 coroll. 7 duodecimi, quatuor igitur prismata super quadrupla basi ipsi* G E F *(quæ æquatur potentiæ lateris* G E*) vertice verò* K O, *(vel* R Z *maiori segmento sibi æquali) comprehendent solidum duodecim pyramidibus æquum. Quæ quidem duodecim pyramides componunt excessum octahedri in icosahedrum sibi inscriptum. Octahedrum itaque excedit sibi inscriptum icosahedrum solido, &c.*

Coroll

Corollarium.

Pyramis excedit sibi inscripti icosahedri duplum, solido quod super lateris icosahedri sibi inscripti potentia, vertice autem ea tota cuius, id est, maius segmentum. *Nam patuit 19 decimiquinti, octahedrum & sibi inscriptum icosahedrum eidem insidere pyramidi. Ostendimus insuper 26 huius, pyramidē octahedri comprehēsi duplam fuisse. In binis itaque octahedris bini icosahedrorum duplicantur in unum excessus, qui quidem super eadem basi latere icosahedri comprehensa constituitur, vertice autem dupla recta* K O *perpendicularis, cuius dupla scilicet iungens opposita latera* H K X M, *efficit maius segmentum idem icosahedri latus ex primo & secundo coroll. decimaquartæ decimiquinti. Quare super eadem basi & duplo vertice solidum, solidi duplum erit, ex coroll. trigesimaprima undecimi.*

Propositio trigesimaseptima.

Si trianguli certam propositam basim habentis, latera basi potētia commensurabilia fuerint, Ab vertice autem demissa perpendicularis basim secuerit, Sectiones toti basi longitudine, Perpendicularis verò potētia commensurabiles erunt.

Proponatur triangulum A B G, *cuius basis* B G *sit certa proposita, latera verò* A B *&* A G *eidem* B G *potentia saltem commensurabilia existant. A vertice autem* A *in basim* B G *perpendicularis basim secet in* P: *Dico basis sectiones toti* B G *commensurabiles esse lōgitudine, perpendicularem verò* A P *eidem* B G *basi potentia saltem commensurari. Producatur undique recta* B G *in* C *&* E. *Ipsi verò* A G *æqualis ponatur* G E, *rectæq;* A B *recta* B C, *& describantur ex ipsis quadrata* B K B D *&* G L. *A maiori autem quadratorum quæ ex* A B *vel* A G, *quod esto* G L, *minori* B K *æquum auferatur* E M, *per 45 primi, ac per eandem reliquo* G M *æquum ad rectam* G D *comparetur* O D. *Cùm enim recti sint* A P B *&* A P G *anguli. Recta* A G *binas* A P P G *potest. Rectáque* A B *binas* A P P B, *per 47 primi. Quanto igitur recta* A G *plus potest recta* A B, *eodem plus potest* P G *reliqua* B P. *Nempe ablato communi quadrato ex* A P *relinquitur excessus quadrati* P G *ad quadratum* B P. *Sed quadratum ex* A G (*quod est* G L) *excedit quadratum ex* A B (*ipsum quidem* B K) *rectangulo* G M (*vel* O D) *per constructionem. Quadratum igitur quod ex* P G, *excedet quadratum ex* B P, *rectangulo* O D. *Quoniam autē quadratis* A B A G *æqualia fuerunt ex* A P P B *& ex* A P P G *quadrata. Ablatúsque fuit eorū excessus, rectangulum scilicet* O D. *Relinquentur quadrata* A P P O *quadratis* A P P B *æqualia. Communi verò ex* A P *ablato quadrato. Reliqua ex* B P *&* P O *quadrata æqualia erunt, & proinde eorum latera (recta* B P *&* P O) *æqualia erunt. Cæterum cùm quadrata* G L *&* B K (*ex hypothesi*) *certa, & proinde commensurabilia existant, eorū excessus* O D *ipsis cōmensurabilis erit, ex corol. undecimæ decimi, & igitur certus, per 9 diffinitionem decimi. Certum itaque* O D *ad certam* G D (*vel* B G) *productum, latitudinem* O G *certam efficiet, & longitudine ipsi* B G *toti commensurabilem, per 20 decimi. Si autem tota* B G *uni partium* O G *commensuretur, Ipsæ* B O O G *&* B G *commensurabiles erūt, per eandem undecimā decimi, & coroll. eius. Quare & recta* O G *dimidiæ ipsius* B O (*scilicet rectæ* P O *vel* P B) *commensurabitur, per decimam decimi. Quia vero binæ* P O O G *commensurabiles sunt, tota* P G *rectæ* P O (*siue ipsi* B P) *commensurabitur, per eandem 11 decimi. Et utraque ideo* P G

[illegible] B G commensurabilis erit, [illegible] eandem. Id propterea recta B G P B & P G rationem inter [illegible] P B P G basis B G eidem basi long [illegible] numeri seruant, per quintam decimi. Sectiones igitur P B P G basis B G eidem basi long[illegible] ne commensurabiles erunt, per sextam decimi. Quod autem perpendicularis A P basi B G potentia commensurabilis fuerit, patet. Cum quod ex A B et quod ex B G (per hypothesim) fuerit commensurabile. Et vero quod ex A B certo commensurabile sit certum ex B P, per decimam decimi. Reliquum igitur ex P A eidem ex B P commensurabile erit, per secundam partē 11 vndecimi. Et proinde toti ex B G, per decimam decimi. Recta itaque A P perpendicularis rectæ B G basi potentia commensurabilis erit, per tertiam diffinitionem decimi, quod fuit positum. Hanc demonstrantes nusquam laterum A B A G longitudinem, sed solius basis B G expressimus, eò quod proposita recta sit B G, Reliquæ verò A B A G potentia tantùm ipsi commensurabiles exquiruntur. Itaque vt fortiori pateat argumento, si id demonstretur cum latera basi potentia tantum commensurabilia fuerint, facilius idem sequetur, si eadem latera potentia simul & longitudine eidem basi commensurabilia exhibeantur, hoc est, si earum longitudines per quadratorum numerorum radices expressæ sint, veluti supposito indicasimus typo.

Corollarium primum.

Hoc supposito acquirimus. Si à potentiis basis & vnius laterum, reliqui lateris potentia dematur. Eius autem quod superest dimidium ad totam basim comparetur latitudinem efficiet sectionem basis quæ ad primum latus copulatur. *Nam à potentiis basis B C & vnius laterum A G, hoc est, à quadratis B D & G L. Reliqui lateris A B potentia B E (hoc est, E M) aufertur. Eius autem quod superest (scilicet quadrati B D & rectanguli O D, siue D R ex hypothesi ipsi O D æqualis sumpti) dimidium (scilicet totius F R quod erit F D: nam G R & P B rectis O O & P O æquantur) ad totam B G (vel G D) comparetur, latitudinem efficiet P G sectionem quippe basis B O, quæ sectio ad primum latus A G copulatur. Haud secus in reliquo latere, si a quadratis B D & B K quadratum G L tollatur, supererit rectangulum F O. Nam E M rectangulum ipsi B K æquatur, O M verò ipsi O D. Reliqui igitur F O dimidium F P, latitudinem efficit B P, sectionem quæ ad sumptum prius latus A B copulatur.*

Corollarium secundum.

Si perpendicularis ab angulo trianguli basim secuerit, sectiones reliquis lateribus potentia sunt arithmetica ratione proportionales. *Nam patuit idem excessus potentiarum ex A G & A B, qui fuit earum quæ ex P G & P B. Si itaque potentiæ æqualiter sese excedant, Ipsæ Arithmetica ratione proportionales erunt.*

LIBRI DECIMISEXTI FINIS.

DE

DE MIXTIS ET COMPOSITIS REGVLARIBVS SOLIDIS.

COMPONI & misceri dicuntur regularia solida, quando singula eorum in alia transformantur solida, seruatis basium forma, numero, & inclinatione, ad seinuicē prius habitu, quorū tamen aliqua in mixta, alia in simplicia trāsformātur solida. In mixta, veluti Dodecahedrū & Icosahedron, quæ transferuntur si sectis bifariam lateribus, tollantur solidi anguli, iunctarum secantium figuris subtensi, quod superest solidum, icosidodecahedron dicetur. Si cubi & octahedri latera bifariam secta, rectis coniungātur, anguli solidi planis à coniungentibus descriptis subtensi & ablati, solidum relinquunt, quod exoctahedron dicetur. Vnde dicemus ex dodecahedro & icosahedro idem confici icosidodecahedron, ex cubo autem & octahedro aliud idem exoctahedron. Reliquum verò solidum scilicet pyramis, in simplex transformatur solidum: nam sectis bifariam singulis pyramidis lateribus, triangula à sectiones coniungentibus descripta, angulos pyramidis solidos subtedentia & tollentia, æqualia & similia sunt relictis in singulis basibus triangulis æquilateris, ex quibus oritur Octahedrum, simplex non compositum solidum. Octahedrum nanque quatuor habet bases, similes numero, forma, & inclinatione mutua, pyramidis basibus. Ac reliquas quatuor simili situ prioribus oppositas, & parallelas, quare bis repetita pyramidis applicatio, Octahedrum simplex, veluti reliqua corpora compositum mixtum, binarum interuentu componit. Quod iam antea inscriptum, siue hac lege pyramidi descriptum, secunda decimiquinti discußimus, quare huius fusiori parcemus expositioni.

Diffinitio prima.

Exoctahedron est figura solida, sex æqualibus quadratis basibus octóque triangulis æquilateris & æqualibus comprehensa.

Diffinitio secunda.

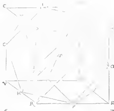
Ycosidodecahedron est figura solida, duodecim quinquangulis æquilateris æqualibus & æquiangulis, vigintíque triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

Problema primum.

Exoctahedron æquilaterum & ęquiangulum construere, & data Sphęra comprehendere, ostenderéque dimetientem lateris duplum esse.

Proponatur sphæra cuius dimetiēs sit A B, circa dimetientem A B fiat quadratum per sextam quarti, super quadrato verò cubus per 15 decimitertij, qui sit C D E F Q T V R, dimetiens verò Q R & centrum S, cubi latera bifariā diuidātur in G H I K L M N O P, &c. cōiunctis in sectionibus rectis I N N O O P P I & similibus, angulos quadratorum subtendentibus, quæ quidem sunt æquales, per quartam primi, & angulos rectos cōtinent, velut N I P. Nam N I D qui ad basim isosceleis est recti dimidius, similiter & oppositus R I P, reliquus itaque N I P rectus erit, & similes quadratum ideo erit N I P O, & eadem causa quadrata erūt reliqua N M L K & K G H I reliquis cubi basibus inscripta, quæ sunt sex iuxta basium cubi numerum. Rursus quia triāgulum K I N subtendit angulum cubi solidum qui ad D, similiter K G L eum qui ad C & reliqui, octo cubi solidos angulos subtendentes, qui quidem sunt æqua-

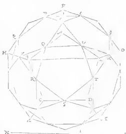
... æquilateri, nempe æquis lateribus constituti, ... quadrata concludentes, ut patuit, quadrataque triangula cõcludere. Exoctahedron erit L M N O P ... per diffinitionem, æquilaterum nam sub æqualibus subtendentibus rectis, & æquiangulum, cum solidus quisque eius angulus duobus quadratorum & binis triangulorum æquilaterum cõtineatur planis angulis. Cæterùm quia parallela sunt opposita cubi latera & dimetientes basium, parallelogrammum erit planum quod per rectas Q T V R. Quia item in eo plano iacet cubi dimetiẽs Q R, rectáque idem planum bifariam secans M H, angulos exoctahedri oppositos iungens, hæc ideo dimetientem bifariam secat per corollariũ 34 primi, ac se ipsam in eodem signo per quartam primi. Ostendetur eodem argumento reliquas angulos exoctahedri oppositos iungentes, bifariam in centro S cubi se adinuicem secare: nam singuli exoctahedri anguli in singulis cubi basibus degunt. Cẽtro itaque S interuallo S H vel S M sphæra ducta, singulos angulos à signo S æquidistantes tanget. Quia vero A B propositæ sphæræ dimetiens, æqualis posita est dimetienti basis cubi scilicet ipsi R T, eadem porro R T rectæ M H est æqualis per trigesimam tertiam primi, quæquidem per centrum oppositos exoctahedri iungit angulos, ea itaque dimetiens est propositæ sphæræ exoctahedron concipientis. Denique cùm triãguli R F T latera bifariam secet recta P O, proportionalia secat basibus, F R ad R T, ut F P ad P O, per secũdam sexti. Atqui dupla est F R rectæ F P ex hypothesi, dupla igitur erit R T (vel H M dimetiens) rectæ P O lateris exoctahedri. Exoctahedron itaque æquilaterum & æquiangulum construximus, &c.



Problema secundum.

Icosidodecahedron æquilaterum & æquiangulum construere, & data Sphæra comprehendere, ostenderéque dimetientem extrema & media ratione sectam, efficere maius segmentum duplum lateris Icosidodecahedri.

Esto proposita sphæra dimetiens N L, quæ (per trigesimam sexti) secetur in I, efficiens maius segmẽtum N I, ex N I recta describatur cubus, per decimãquintam decimitertij, huic cubo circunscribatur dodecahedrum, ex decimaseptima decimitertij, sit autem illud A B C D E F H K M O, cuius latera singula bifariam diuidantur signis Q R S T V X Y Z P ... G &c. coniunctis à sectionibus rectis, angulos pentagonorum subtendentibus, veluti, Q G G V V Q, Q Y Y R R Q, V T T X X V, ac reliquis. Quoniam hæ rectæ subtendunt æquos pentagonorum angulos, æquis (nempe dimidiis) lateribus comprehensos, ipsæ sunt æquales, ex 4 primi, triangula igitur æquilatera erũt G Q V, Y Q R, V X T, & reliqua solidos dodecahedri angulos tollentia. Rursus quia cuilibet pentagono describuntur quinque rectæ æquales, medias laterum sectiones iungentes, ut sunt Q V V T T S S R R Q, illæ pentagonum in plano pentagoni dodecahedri describunt, circulo comprehensum, nempe a centro pentagoni dodecahedri, in huius pentagoni angulos demissæ sunt æquales, cùm sint perpendiculares in sectas bases, per 12 quarti, æquiangulum itaque est pentagonum Q R S T V per 11 eiusdem, pari forma patebunt æqualia & similia reliqua pentagona, in basibus dodecahedri descripta,



descripta, quæ igitur sunt numero 12, triangula verò æqualia & simila, solidos angulos 20 dodecahedri subtendentia, siue tollentia, ea de causa 20 erunt numero triangula, icosidodecahedrum itaque construximus per diffinitionem æquilaterum quidem, cum omnia triangulorum latera sint æqualia & communia pentagonis, æquiangulum autem: nam singuli anguli solidi ex duobus pentagonis & binis trianguli æquilateri planis angulis constant. Quod autem data sphæræ cuius dimetiens fuit N L contineatur ostendamus, quoniam a centro dodecahedri in suorum laterũ dimidias sectiones perpendiculares, dimidiæ sunt earum quæ oppositas coniungunt dodecahedri laterum medias sectiones, per 3 coroll. 17 decimitertij, quæ (per idem) sese bifariam in centro secant, ab eo itaque signo in angulos ductæ sunt æquales, quæ quidem sunt triginta iuxta laterum dodecahedri numerum, possident nanque singuli anguli singulorum dodecahedri laterum dimidias sectiones, super dimetiente itaque per singulos æquidistantes a centro angulos sphæra descripta, solidum icosidodecahedrõ concludet, quia vero huius solidi dimetiens est ea recta, cuius maius segmentum est latus dodecahedro inscripti cubi, per 4 coroll. 17 decimitertij, quod quidem latus fuit N I per hypothesim, illud itaque solidum sphæra data cuius dimetiens fuit N L conclusimus, quod insuper huius (scilicet Q V) lateris sit duplum dimetientis maius segmentum doceamus. Quia trianguli A E B latera, bifariam secant, signa Q & V, parallela sunt Q V B E, per coroll. secundum 39 primi proportionalia itaque sunt A E ad A V sicut B E ad V Q per 2 sexti. Dupla autem est A E recta A V, dupla igitur erit B E rectæ Q V, per 4 sexti, sed B E æquatur datæ N I siue lateri cubi, per 2 coroll. decimæseptimæ decimitertij, quæ quidem est maius segmentum dimetientis N L. Maius itaque dimetientis propositæ segmentum duplum est lateris icosidodecahedri datæ sphæra inscripti. Icosidodecahedron itaque æquilaterum & æquiangulum construximus & data sphæra, &c.

MONITVM.

Huius icosidodecahedri natura binas præcipuorum solidorum complectitur intelligẽtias, ex vtrorúmque nempe basibus constãs, vtriusque bases opposito situ, sed eadẽ ad se inclinatione disponit, quibus actiones reliquorum regularum solidorum ac passiones in se contegat. Huius solidi inscriptiones ac circunscriptiones, non vanum apponere existimassemus, ni præpedisset temporis angustia. Quare ne quid Lectori circa huius intelligentia quæstum desit, inscriptionum singularum ac circunscriptionum inuenta, prout licuit, compendio descripsimus: quorum subsidio modico vel nullo negocio, visis priorum solidorum discussionibus, singula illi, illúdque singulis inscribi demõstrabit, implorato summi artificis numine.

De Icosidodecahedri inscriptionibus & circunscriptionibus.

Potest icosidodecahedron cætera quinque regularia solida continere. Nam dodecahedri suscipiet angulos, in centris triangulorum solidos angulos dodecahedri subtendentium, quæquidẽ sunt viginti, eo ordine quo solidi dodecahedri ab eis ablati, vel subtensi disposita. Ac proinde cubum & pyramidem dodecahedro concepta suscipiet, cùm habeant angulos ad idem sinum.

Octahedrum autem suscipit icosidodecahedron, in angulis oppositas dodecahedri sectiones sex secantibus non secus ac si simplex fuisset dodecahedron.

Icosahedron autem concipit, in eisdem duodecim pentagonorum centris collocans duodecim icosahedri angulos.

Potest non minus singulis inscribi, vtpote Pyramidi, collocans quatuor bases trigonas quatuor pyramidis basibus concentricas more pyramidi inscripti icosahedri. Itidem octahedro, bases octo suis basibus concentricas adaptare. Cubo verò inscribetur si angulos octahedrum sibi inscriptum suscipientes, in centris basium cubi constituat. Icosahedro autem, cùm triangula pentagonam basim obeuntia, triangulis icosahedri angulum solidum componentibus concentrica fuerint.

Dodecahedro demum, singulos icosidodecahedri angulos singulis dodecahedri laterum mediis sectionibus, iuxta constructionis eius ordinem coaptantes, nullo tedio inscribemus.

Parallela insuper sunt huius solidi opposita plana, nam subtenduntur anguli solidi qui ex opposito, parallelis planis æquè in angulis dodecahedri triangulis subtensis, & in angulis icosahedri pentagonis subtensis, quod facili demõstrationi subiacet. Præterea huic solido infinitæ adhærebunt symetriæ, ex solidis illud componentibus educta.

Patet igitur dodecahedrum & icosahedrum mixta, in idem concurrere solidum icosidodecahedron. Cubum autem & octahedron mixta, in aliud idem coire exoctahedron, pyramydem demum

omni cõsortio vt putatum est, destitutam, in præclarius reliquis solidum bis sumptam concidisse, quod instar cæterorum (quæ singulis sui appositionibus, in compositum solidum binis constans transeunt) in simplex ac perfectum bina suipsius applicatione concidit.

Quod si bina hæc solida in vnicum solidũ coniuncta concipere velimus, id vnicum ponemus. Dodecahedro quidem, si pentagono dodecahedri simile inscribatur pentagonũ, angulos inscripti in medius circunscripti lateribus constituens, inscriptum autem angulum icosahedri solidum subtendat, hácque lege in singulis dodecahedri basibus seruata, superpositi anguli, producent solidum vtroque integro dodecahedro & icosahedro descripto constans. Haud secus, si cuilibet icosahedri basi sectis bifariam lateribus inscribatur triãgulum æquilaterum, quod quidem dodecahedri subtendat angulum solidum illi superpositum, idem consurget vtroque integro constans solidum.

Eadem constructione, Si cubi basibus quadrata angulos octahedri solidos subtendentia, vel octahedri basibus triangula cubi solidos angulos subtendentia inscribantur, exurget inde solidum vtroque integro constans, scilicet cubo & octahedro.

Pyramidis verò basibus sectis bifariam lateribus inscripta triangula, pyramidis solidos angulos subtendentia solidum producunt binis pyramidibus æquis & similibus constans. Horum autem solidorum à planis deleti anguli priora composita solida restituunt, nempe à dodecahedro & icosahedro, icosidodecahedron, à cubo verò & octahedro, exoctahedron, à bis sumpta verò pyramide octahedrũ. Perplura his solidis suffragari liceret, quæ propensis disciplinarum cultoribus ocio nobis illud negante legamus.

Hac subeunt quinque solidorum aliquæ symetriæ, partim ex dictis, partim ex dicendis assumptæ, naturam solidorum elucidantes, quarum subuentu lector sagax & attentus, longe plura modico sudore quàm hactenus de solidorum regularium præstantia demonstrata sint, aperiet, quæ in sui leuamen velut obsonia instanti cœnæ dicata decoximus. Hæc itaque rite concepta ad geometriæ fœcunditatem summi Conditoris numine in immensa volumina propagare valeat.

De natura Pyramidis trilateræ æquilateræ.

Pyramis æquilatera trilatera, secatur bifariam tribus quadratis æqualibus, sese in centro pyramidis bifariam & ad rectos secantibus, & quorum anguli in medius laterum pyramidis sectionibus degunt. A pyramide tolluntur quatuor pyramides similes toti, pyramidísque latera penitus auferentes, reliquum autem pyramidi inscriptum octahedrum efficientes, cui quidem omnia à pyramide concepta solida inscribuntur. Perpendicularis ab angulo in basim pyramidis, dupla est dimetientis inscripti cubi. Recta verò medias oppositorum pyramidis laterum iungens sectiones, tripla est lateris eiusdem cubi: triplum item pyramidis latus ad basis cubi dimetientem. Idem itaque pyramidis latus, oppositorum laterum sectiones iungentis rectæ, duplum potest. Rectæ vero ab angulo in basim perpendicularis, sesquialterum. Perpendicularis igitur, iungentis sesquitertium poterit. Pyramis, sibi inscriptum octahedrum, octahedróque inscriptum icosahedrum, eandem sphæram suscipiunt.

De natura Octahedri.

Octahedri quatuor perpendiculares, à duobus oppositis eius angulis, per bases se iungentes rhombum describunt, cuius vna dimetientum reliqua duplum potest: ea quippe dimetientis ad latus est ratio. Octahedrum & sibi inscriptum icosahedrum, eandem sphæram suscipiunt. Octahedri solidi dimetiens, potentia sesquialtera est dimetientis circuli basim comprehendentis, tripla verò iungentis oppositarum basium centra, & dupla bipartiens tertias perpendicularis siue lateris præfati rhombi: iungentis autem proximarum basium centra longitudine tripla. Angulus autem inclinationis babasium octahedri, cum angulo inclinationis basium pyramidis, duobus rectis æquos efficit angulos.

De natura Cubi.

Cubi dimetiens sesquialterum potest dimetientis basis, lateris verò triplum, iungentis autem proximarum basium centra, sextuplum. Insuper cubi latus est ad sibi inscriptorum latera, icosahedri quidem, vt tota ad maius segmentum, Dodecahedri verò vt tota ad minus, Octahedri duplum potest lateris, Pyramidis verò lateris dimidium. Cubus præterea Pyramidis triplus fuit, Cubi autem dodecahedrum ferè duplum. Idem itaque dodecahedrũ eiusdem pyramidis ferè sextuplũ esse cõperietur.

De

De natura Icosahedri.

Icosahedri angulum solidum constituunt quinque triangula, quorum reliquæ bases pentagonum componunt. Si itaque ab oppositis basibus aliud descriptum sumatur pentagonum, hæc pentagona dimetientem icosahedri angulos præfatos copulantem ita secabunt, vt quæ inter plana maius segmentum sit, quæ verò à plano ad angulum reliqua, minus. Siquidem binarum coniunctarum basium oppositos angulos recta coniungat, huius rectæ maius segmentum est latus icosahedri. A centro autem icosahedri ad angulos ducta, quintuplum potest dimidiæ eius quæ inter pentagona fuit suscepta, siue dimidiæ eius quæ à centro circuli præfatum pentagonum capientis, quæ ideo sunt æquales. Singulas ipsarum potest latus icosahedri, tum etiam minus segmentum potest ab angulo solido in pentagonum cadens. Icosahedri dimetiens potest totam oppositos angulos coniunctarum basium copulantem, & maius eius segmentum, hoc est latus icosahedri. Potest etiam dimetiens quintuplum eius quæ inter pentagona suscepta fuit, siue eius quæ à centro pentagoni ex lateribus icosahedri cõpositi. Dimetiens potest rectam centra basium oppositarum icosahedri coniungentem, & dimetientem circuli basim continentis. Dimetiens insuper potest dimetientem circuli pentagonum continentis & eam quæ ex eiusdem centro, hoc est quintuplum eius quæ ex centro, iungens centra oppositarum basium, potest iungentem centra proximarum, & reliquam cuius latus cubi icosahedro inscripti est maius segmentum, iungens medias oppositorum laterum sectiones, tripla est lateris inscripti dodecahedri. Quare si latus icosahedri & eius maius segmentum componantur, totius tertia pars, est latus dodecahedri icosahedro inscripti.

De Dodecahedri natura.

Dodecahedri dimetiens potest latus, & eam cuius latus est minus segmentum, cubi verò inscripti maius, illa porrò est recta, quæ subtendit angulum inclinationis basium, binis perpendicularibus basium dodecahedri comprehensum. Si bina dodecahedri bases longitudine vnius lateris distantes sumantur, earum centra coniungens extrema & media ratione secta, efficit maius segmẽtum coniungentem centra proximarum basium. Si per centra quinque basim circa vnam basim constitutarum, ducatur planum, & per centra basium quæ circa oppositam basim, aliud planum·centra autem oppositarum basium coniungat recta, ipsa à planis ita secatur, vt singulæ extra plana constituta, sint maius segmentum eius quæ inter plana concluditur. Latus dodecahedri, est maius segmentum subtendentis angulum pentagoni. Quæ à centro dodecahedri in vnam basium perpendicularis, quintuplum potest dimidiæ eius quæ inter plana est, & ideo tota basium oppositarũ centra cõiungens, quintuplum potest totius quæ inter plana. Subtendens angulum basis dodecahedri & basis latus, possunt quintuplum eius quæ ex centro circuli basim continentis. Sectio sphæræ continens tres dodecahedri bases, sumit dimetientis tertiam partem. Dodecahedri latus & angulũ pentagoni subtendens, æquãtur rectæ coniungenti medias oppositorum dodecahedri laterum sectiones.

FINIS.

...torum ordo per libros distinguitur, postmodum numeri præcedentes line. quotam propositionem indicant, deinde linea quota demonstrationis, corollarij, aut moniti succedit. Quod si in figuram, aut textum incidat error, ibidem è limine offendes text. aut figur.

Primus.

Pro.3.linea 8 lege minori G *æquã.* 4.*text.lege subtensi eadẽ prop.lin.*12 *ab inclinationũ.* 5.*li.*9 *necnon anguli* A B I *reliqui. Item lin.*13 *lege auferatur* G B I *&* B G Z. 6.*lin.*1 *angulos* G B A B G A. 7.*lin.*2 *concurrant. Itẽ lin.*17 *ipsi* A D *&* B D. 10.*lin.*2 *constituatur* D C B. 11.*figu. triangulum æquilaterum* D C E. 25.*lin.*4. *æquales essent.* 27.*lin.*7 *per* 15 *diffinit.* 30.*moniti lin.*22 *infinitæ suppom.* 32.*lin.*5 *angulum* E G D *interiori.* 39.*coroll.*1 *lin.*3 *constituitur.* 41.*lin.*6 *trianguli* A E B. 44.*figu.ad sectionem dimetien.* B *ponatur.*

Secundus.

*Diffi.*1.*li.*37 *ab* A B *ad* D C *in* E *ibid lateri idemq; ab* A D. *Diffi.*2 *fig.sit* C *pro* G. *item fig. moni. transponantur* D *&* C. *prop.*1.*li.*4. *Ad rectã* B G. 2.*li.*8. D A *quæ sub iota, item quolibet.lin.*9 *contenta scilicet* A G E Z G D C E, *&* D B K E. *lin.*10 *quadratum* A K, *lin.*12 *scilicet ipsi* A B K Z. 3.*li.*8 O Z *erit sub segmentis.* 4.*lin.*11 *ex recta* B G. *lin.*12 *contineri, item figuræ* I *in concursu.* 5.*li.*19 *à media* B G. 6.*lin.*11. *reliqua* B G *reliquæ* M Z, *figuræ* X *in concursu.* 8.*text.descripto quadrato.li.*18 (*hoc est in* O K.) 9.*lin.*8 *per* Z *verò recta* B G. *lin.*10 *scilicet* G A B G E A G E B G B E. *lin.*11 *recti unius erunt.* 12.*lin.*5 *tex.opposito angulo, ibid.lin.*10 *atqui* A B *quadratum.* 13.*lin.*9 *fiunt ex* A D D G. 14.*lin.*20 *constituimus.*

Tertius.

*Diffi.*8.*li.*7 *reliqua* B C A *minori.* *Diffi.*10.*moni.li.*12 *necessariò metietur & sola.* 8.*li.*1 *à quo in, item lin.*4 *vtcunque sint* D K E D L Z D T G. 12.*figuræ sint centra* Z I. 16.*Monit.li.*1 *cognitio siue, ibid.li.*43 *iuxta vera, ibid.li.*45 *ab hac angulorum, ibid.li.*76 *maior rectilineus.* 24.*li.*11 D Z G *vel* D Z E. 37.*coroll.lin.*5.*sumpto.*

Quartus.

5.*Coroll.lin.*2 *ambligonium.*

Quintus.

*Diffi.*1.*lin.*7 *peculiaris existit ibid.quouismodo à maiore sumpt.* *Diffi.*3 *ante figu.*6.*lin.memores esse.* *Diffi.*5.*ad finem præcipit multiplicatione.monit.lin.* 8. *saniorum salua.* *Diffi.*19.*figuræ* A B E *pro* 1.*monit.li.*11 *sub voce multiplicis.* 2.*fig.apponatur* E *inter* D *&* T.

Sextus.

1 *lin.*13 *ipsi* A G D *æqualia.* 26.*lin.*12. *Si igitur a* 29.*lin.*8 *deleatur in.*

Septimus.

*Prohe lin.*7 *vt præcinimus proximis.* *Diffi.*1.*lin.*14 *qua quidem numerus.* *Diffi.*4.*li.*7 *partes verò.* *Diffi.*7. *text.qui vnitate.* *Diffi.*8.*li.*2 *discernantur* 2,4,8. *Diffi.*16.*lin.*2 *ante vlti.figu.lege cũ* ± *augens.* *Moni sequẽte sentẽtias facie* 2.*li.*48 *loquemur posthac numeris.* 5.*text.vtriusq; eadem pars.* 6.*figu.* B 9 A 6 D 9 G 6. 8.*figu.* G *&* Z *transponantur.* 9.*figuræ fiant* B I 4 *&* E T 4, 11.*figu.* A E 3 E B 3 G Z 4 Z D 4. 15.*li.*3 *quoniam vnitas.* 21.*Monit.figura* A 2 B 6 G 5 D 15. 38.*lin.*7 *minimo* D *ab ipsis.*

Octauus.

8.*figura* B ... *ibid.li.*8 E *ad* Z *sint vt* A *ad* B *erit.* 14.*li.*3 *si* G *metiatur* D *&,* 19.*li.*18 *feceris* S, *erit per.* 27.*coroll.lin.*6 *cubi, idem ostendetur.*

Nonus.

6.*li.*5 *quã cubus* G *ad cubũ* B. 12.*li.*4 *sunt ab vnitate, itẽ fig.*3,9,27,81. 18.*Moni.li.*8, 26 *octaui.* 21.*li.*4.*ipsi porro* E D *addatur.* 23.*li.*4 *dico totũ* A E *parẽ.* 26.*fig.trãsponãtur* D *&* G. 28.*tex trãsponãtur & impar par* 36.*Mon.li.*3.*vt si dixissemus hãc.* 37.*li.*22.*nullus esse horũ.*

Decimus.

Prohemio facie 3.*li.*35 *reliqua verò illi.* *Diffi.*7 *monit.li.*5.*ad aliam rationem habeat aliquam.* 14.*li.*9 *sicut* B *ad* G. 17.*li.*19.*Plus igitur.* 18.*Monit post figu.li.*4, D E 4, A V S, *li.*5 V B 2, E H 16, *lin.* 6 *secatur in* V. *li.*9 *ad* 13, A V 4. 21.*Monit.li.*22.*deleatur me. item.lin.*28 *res rei scilicet* 162. 49.*fig.* E *ra.*12. 52.*li.*15 *antecedẽs ad* A G *cõsequens, itẽ fig.inter* A *&* G *esto* 16. 56.*li.*19 *cõflato ex quadratis.* 68.*lin.*15 *cõmensurabile itaque erit quod.* 71.*tex.eam quæ ex binis nominibus quæ, item li.*9 *&* 10 *rectãgulum.* 72.*tex.adinuicem incõmensurabilia.coroll.li* 25 *ex diffinitionibus binomiorum.* 78.*Scholio.li.*16 *huius cũ sex eam, itẽ li.*23 *ad certam rectã applicatæ.* 86.*fig sumatur præcedẽtis.* 91.*li.*33 *quadrata* L M N X *ipsis.* 96.*li.*22 *illud* L X *compo.* 98 *li.*11 *ex* A I I B *media cõmens.* 99.*li.*14 *ad certã* D G. 102.*li.*23 *lõgitudine* G K K M. 104.*li.*19 *quod sub* G Z Z D *per.* 105.*li.*22 *&* 23 *quod verò sub.* 111.*Monit.li.*15 *eam autem cui statutam, item li.*25 *seu certam quod ab ea.*

Vndecimus.

*Diffi.*6.*diffi.sexta.* 2.*li.*13 *extra subiectũ.* 10.*li.*3.*dico ipsas* D E. 13.*li.*10 *aut in plano.* 16.*cor.li.*1 *nã si plana* D G G H, *itẽ monit.li.*3.*quare ead.necess.itate.* 18.*li.*9 *ad angulos rectos existẽtes.* 23.*fig.esto* I *loco* T, *item li.*32 L O M L O K *&* K O M. 26.*fig.loco* A E *esto* A O. *li.*14 *plano* B A F H *perpendi.* 33.*li.*24 *rectis* E K E L E M *ipsis.*

Duodecimus.

12.*li.*51 *propriorũ dimetiẽtiũ, itẽ moni fig.loco* Z T, 4, *esto* Z I, 2. 18.*li.*10 *reliqua* D E Z.

Decimustertius.

7.*li.*18 *anguli* B E A B D G *æquales.* 10.*li.*31 *sub* B A A N *per.* 14.*li.*9.*duodecimam vndecimi, item li.*14 (*qui ad* K.) 16.*li.*9 *eæ itaque cõiun.item li* 66.*atqui ipsas* H C *&* C *cor.*1 *li.*4.*scilicet* F E. 17.*li.*56 *quadrati* N O. *li.*59 B F *per quadragesi.li.*82 *per* 5 *diffi.*11. 18.*li.*48 *decimasexta & decimasept.*

Decimusquartus.

4.*li.*19 *angulos continentis.* 11.*li.vlti.ad octahedrũ cor.*20.*lin.*1. *potẽtia distinguere.*

Decimusquintus.

6.*cor.*1.*li.*3.*sunt per ipsas plana.* 8.*li.*7 *duodecim duxerimus.li.*16 *subtẽdãt angulos.*

Decimussextus.

4.*li.*27 *rursus parallelæ sunt.* 25.*li.*19.*tollatur &.* 33.*cor.lin.*5.*tertiam minoris.* 37.*li.*41.*partem* 11.*decimi.fol.*203.*lin.*35 *ad idem signum.*

